АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Г. В. КАРПЕНКО

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ И ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

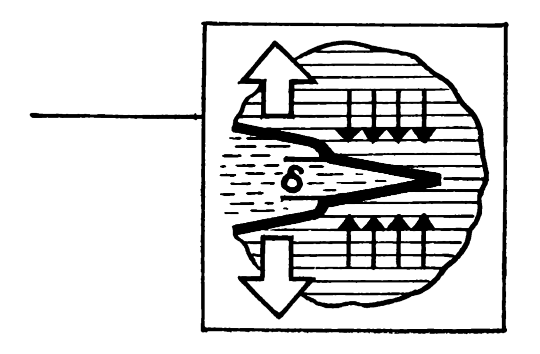
Под общей редакцией академика АН УССР В. В. ПАНАСЮКА

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1988

ТОМ I

В. В. ПАНАСЮК, А. Е. АНДРЕЙКИВ,
В. З. ПАРТОН

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ



КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1988

УДК 539.375

Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей ред. Панасюка В В — Киев : Наук. думка, 1988—• -ISBN 5-12-0003001-1.

Т. 1 : Основы механики разрушения / Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.— 1988.— 488 с.— ISBN 5-12-000301-Х.

В первом томе справочного пособия изложены основные положения прочности и разрушения твердых тел, дана сводка расчетных моделей и критериев разрушения хрупких и упругопластических материалов, подвергнутых статическому, динамическому и циклическому нагружениям, приведены наиболее эффективные математические методы решения статических и динамических задач теории трещин, а также основные подходы в исследованиях влияния температурных, магнитных и электромагнитных полей, поверхностно-активных, диффузионно-подвижных и коррозионно-активных сред на распространение трещин в конструкционных материалах.

Для широкого круга специалистов — физиков, механиков, материаловедов, инженеров, работающих в области механики разрушения и прочности материалов, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этой области науки.

Ил. 189. Табл. 9. Библиогр.: с. 478—485.

Ответственный редактор *В. В. Панасюк*

Печатается по постановлению ученого совета
Физико-механического института АН УССР
и решению редакционной коллегии
справочной литературы АН УССР

Редакция справочной литературы

Заведующий редакцией *В. В. Панюков*

Редактор *Г. М. Ледяева*

$\frac{2105000000\text{–}533}{М221(04)\text{–}88}$ КУ-3-16-88

ISBN 5-12-000301-Х (т. 1)
ISBN 5-12-000301-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие техники всегда выдвигает перед наукой о прочности материалов и конструкций новые задачи. Они обусловлены главным образом необходимостью повышения качества, надежности и долговечности машин и конструкций, работающих в сложных эксплуатационных условиях; например, при низких и высоких температурах и резких теплосменах, при воздействии ударных или больших по своему абсолютному значению переменных нагрузок, при воздействии коррозионно-агрессивных или активно взаимодействующих с деформируемым материалом рабочих сред.

Реальные конструкционные материалы обладают различным сопротивлением этим воздействиям, т. е. по-разному сопротивляются разрушению при указанных выше и других воздействиях. По-разному проявляют себя в заданных эксплуатационных условиях и различные несовершенства структуры материала (трещины, включения, дислокации и другие дефекты). Существенное влияние на работоспособность материала в конструкции оказывают также и его макронеоднородности (например, макровключения), конструктивные концентраторы напряжений — отверстия, надрезы, сварные швы. Поэтому при эксплуатации инженерных конструкций наблюдаются различные разрушения и потери работоспособности машин.

Для обеспечения заданного ресурса безопасной работы конструкции необходимо знать причины возникновения разрушения материала и конструкции в целом, а также характер развития процесса в зависимости от заданных условий внешнего воздействия, рабочей среды и структуры материала. На этой основе необходимо установить (в зависимости от условий эксплуатации) обоснованные значения допускаемых нагрузок на конструкцию, определить ее запасы прочности с учетом рационального использования материала и служебных функций конструкции, найти пути повышения физико-механических свойств конструкционных материалов.

Указанные выше и другие аналогичные проблемы материаловедения, физики и механики прочности конструкционных материалов были и остаются предметом внимания многих исследователей и конструкторов. Начиная с работ известных зарубежных ученых — А. А. Гриффитса, Дж. И. Тейлора, Е. О. Орована, Дж. Р. Ирвина и др., а также советских ученых — А. Ф. Иоффе, Н. Н. Давиденкова, А. П. Александрова и С. Н. Журкова, С. В. Серенсена, Н. Н. Афанасьева, Я. Б. Фридмана, Г. В. Ужика и др.— во второй четверти XX в. в науке о прочности и разрушении материалов начали формироваться новые подходы к оценке работоспособности материалов в конструкциях. Они сводились к тому, что вместо классического постулирования определенных условий, при нарушении которых происходит разрушение материала и потеря работоспособности элементов конструкций, большое значение стали придавать изучению особенностей самого процесса разрушения. При этом особое внимание уделялось изучению кинетики распространения трещины в деформируемом материале как главному инструменту его разрушения, а оценка прочности материала осуществлялась через его способность оказывать сопро-

тивление распространению трещины. Интенсивное развитие исследований в этом направлении привело к формированию новой ветви науки о прочности и разрушении материалов. Так, в середине нашего века на стыке классической механики деформируемого твердого тела, физики твердого тела и химии поверхностных явлений сформировалась быстроразвивающаяся область науки о прочности материалов — механика разрушения. Научный и практический интерес к этой области знаний непрерывно растет. Это обусловлено ее большой значимостью для изыскания методов оценки работоспособности материала в конструкции в экстремальных условиях их эксплуатации, а также для создания конструкционных материалов с высокими физико-механическими характеристиками.

Многие советские и зарубежные ученые внесли свой вклад в развитие этого научного направления. Необходимо отметить научную и научно-организационную деятельность таких советских ученых-механиков: академиков АН СССР Н. И. Мусхелишвили, А. Ю. Ишлинского, В. В. Новожилова, Ю. Н. Работнова, Л. И. Седова, Р. А. Христиановича; академиков академий наук союзных республик — В. И. Моссаковского, М. Я. Леонова, Г. С. Писаренко, Г.Н. Савина, С. В. Серенсена и других известных ученых. Большое значение в утверждении этого научного направления имеют также работы Г. М. Бартенева, В. В. Болотина, И. А. Одинга, Г. В. Ужика, Я. Б. Фридмана и других.

Существенным вкладом в формирование и утверждение этого научного направления в СССР начиная с 50-х годов XX века стали работы А. Е. Андрейкива, Г. И. Баренблатта, Л. Т. Бережницкого, Н. М. Бородачева, П. М. Витвицкого, Р. В. Гольдштейна, Д. В. Грилицкого, А. Н. Гузя, А. П. Дацышин, И. Н. Дмытраха, Б. Я. Дроздовского, В. С. Ивановой, Д. Д. Ивлева, А. А. Каминского, Г. П. Карзова, Б. С. Касаткина, Г. С. Кита, С. Е. Ковчика, А. Я. Красовского, В. Г. Кудряшова, А. А. Лебедева, Н. А. Махутова, Е. М. Морозова, Н. Ф. Морозова, Л. В. Никитина, В. А. Осадчука, В. В. Панасюка, В. З. Партона, Л. В. Ратыча, О. Н. Романива, К. Н. Русинко, М. П. Саврука Л. Р. Салганика, Л. И. Слепяна, М. М. Стадника, В. Т. Трощенко, В. И. Труфякова, А. Ф. Улитко, Г. П. Черепанова, А. А. Чижика, С. Я. Яремы и др.

Исследования и разработки в области механики разрушения материалов стали проводиться по таким направлениям:

1) изучение процессов образования и развития трещин в деформируемом кристаллическом теле;

2) определение напряженно-деформируемых состояний в твердых телах с трещинами;

3) разработка критериев предельного равновесия деформируемых конструкционных материалов с трещинами в заданной среде и на этой основе создание методов оценки долговечности элементов конструкции;

4) разработка технологий формирования структуры материала с высоким сопротивлением распространению в нем трещины (его трещиностойкостью), а также с высокими значениями других его физико-механических характеристик;

5) разработка методов ускорения развития трещины или его торможения и другие аспекты этой проблематики.

В СССР и за рубежом за истекшие три десятилетия второй половины XX в. опубликовано большое количество фундаментальных теоретических и прикладных исследований, в том числе обобщающих монографий и специальных пособий, посвященных различным аспектам механики разрушения материалов и элементов конструкций. Здесь прежде всего отметим известные первые советские монографии В. В. Панасюка (1968), В. З. Партона и Е. М. Морозова (1974), Г. П. Черепанова (1974), а также семитомную энциклопедию «Разрушение», изданную в США под редакцией Г. Либовица в 1968—1972 гг. В этих трудах достаточно полно отражены успехи механики разрушения материалов на конец 60-х годов в мировом масштабе.

Они во многом содействовали интенсивному развитию этой области науки в последующие десятилетия.

За минувшие годы рассматриваемая область науки пополняется новыми результатами как по физике и механике процессов разрушения твердых тел, так и по разработке новых методов расчета элементов конструкций на прочность и долговечность. Это, естественно, ставит вопрос о периодическом анализе и синтезе получаемых результатов и подготовке публикаций соответствующих обобщающих трудов с целью более эффективного использования новых достижений науки в инженерной практике и содействия научно-техническому прогрессу в целом.

В 1970—80 гг. в СССР и за рубежом достигнуты важные успехи в разработке самого предмета механики разрушения материалов и обосновании критериев разрушения, в развитии методов решения задач математической теории трещин (решение краевых задач для тел с трещинами), в создании методических и технических средств определения сопротивления материала распространению в нем трещины, т. е. его трещиностойкости.

В рамках механики разрушения значительное развитие получили теории усталости материалов и определения долговечности элементов конструкции. Решены новые важные задачи о предельно-равновесном состоянии деформируемых твердых тел, ослабленных трещинами и остроконечными отверстиями различной конфигурации; определены коэффициенты интенсивности (концентрации) напряжений для многих практически важных конфигураций элементов конструкций; найдены значения трещиностойкости для многих конструкционных материалов при статическом, динамическом и циклическом воздействии нагрузок, а также при влиянии различных физико-химических факторов рабочей среды. Все это стало важным этапом в углублении понимания явлений разрушения и в создании новых методов определения прочности конструкционных материалов, значительно расширило области практического использования результатов механики разрушения материалов.

Однако эти результаты рассеяны в различных периодических научно-технических изданиях и отдельных монографических трудах. Фундаментальных справочных трудов (пособий) по этому разделу науки практически еще нет. Поэтому предлагаемое читателю справочное пособие «Механика разрушения и прочность материалов» представляется актуальным и важным как в научном, так и в практическом плане. Справочное пособие состоит из четырех томов: первый — «Основы механики разрушения материалов»; второй — «Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами»; третий — «Характеристики трещиностойкости материалов и методы их оценки»; четвертый — «Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов».

Авторами справочного пособия обобщены результаты исследований, представляющие (на их взгляд) основы механики разрушения материалов. Последовательность подачи материалов в книге — физическая трактовка строения и дефектности материалов, а также их разрушения — отражает определенную ограниченность применения классических феноменологических теорий прочности, развиваемых в рамках континуальной модели механики сплошной, бездефектной среды, для характеристики прочности тел с трещинами. Для оценки работоспособности материала (или элемента конструкции), с учетом возможной дефектности его структуры в рамках механики деформируемых сплошных сред, необходимо было ввести новые (по сравнению с классическими) расчетные концепции и модели, которые и стали исходным этапом в развитии механики разрушения материалов. Анализ и синтез этих концепций и расчетных моделей, методы и пути реализации их в расчетах на прочность, надежность и долговечность элементов конструкций и составляют содержание настоящего пособия.

В. В. Панасюк

ОТ АВТОРОВ

В первом томе справочного пособия впервые вместе представлены расчетные модели деформируемых твердых тел с трещинами, учитывающие влияния на эти тела физических полей (температурных, магнитных, электромагнитных) и агрессивных сред (поверхностно-активных, диффузионно-подвижных, коррозионно-активных). Основные критерии, расчетные модели и методы излагаются в полном объеме, другие — менее эффективные, производные от основных и малоупотребляемые — конспективно.

В первой и второй главах, написанных В. В. Панасюком, приведен материал вспомогательного характера. Здесь дана краткая сводка основных представлений о структуре материала и общих положений механики деформируемого твердого тела, необходимых для последующего рассмотрения проблем прочности и разрушения материалов.

Критерии разрушения твердых тел (материалов) при однократном статическом нагружении, изложенные В. В. Панасюком и А. Е. Андрейкивым в третьей главе, объединены в следующие пять групп: энергетические, силовые, деформационные, а также критерии для сложного напряженного состояния тела и микрофрактографические. Применение многих из них продемонстрировано на конкретных примерах, а также сопоставлено с экспериментом, что дает возможность показать степень адекватности критерия реальным процессам разрушения материалов.

Четвертая глава подготовлена А. Е. Андрейкивым. В ней рассмотрены основные расчетные модели разрушения материалов, учитывающие характер изменения нагружения во времени, процессы зарождения и кинетику развития разрушения. При этом исследуется кинетика распространения трещины при длительно статическом, динамическом и циклическом нагружениях. Особое внимание уделяется расчетным моделям зарождения и распространения усталостных трещин.

Пятая глава, подготовленная В. В. Панасюком и А. Е. Андрейкивым, посвящена математическим методам решения статических задач теории трещин. Наиболее подробно (с демонстрацией применения на конкретных примерах) здесь изложены эффективные и широко используемые методы: функции комплексного переменного, сингулярных интегральных уравнений, граничных интегральных уравнений, конечных элементов, граничной интерполяции.

В шестой главе, написанной А. Е. Андрейкивым, освещены основные математические методы решения динамических задач теории трещин: Винера — Хопфа, сингулярных интегральных уравнений, интегральных преобразований, парных рядов, конечных элементов и др.

Основные аспекты физико-химической механики материалов изложены А. Е. Андрейкивым и В. В. Панасюком в седьмой главе. Здесь представлены основные расчетные модели для исследования влияния поверхностно-активных, диффузионно-подвижных и коррозионно-активных сред на характер распространения трещин в твердых телах.

В восьмой главе, написанной А. Е. Андрейкивым, приводятся методы для исследований влияния переменных по геометрии температурных полей на распространение трещин в твердых телах. В ней освещены возникновение температурных напряжений и изменение физико-механических свойств тела в результате теплового воздействия.

Девятая и десятая главы подготовлены В. З. Партоном. В них исследуется поведение тел с трещинами при воздействии электрических и электромагнитных полей.

Авторы выражают благодарность сотрудникам ФМИ АН УССР оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к изданию: В. М. Бойко, С. А. Ваганову, Я. П. Гладкому, А. И Дарчуку, Ю. В. Зиме, О. П. Осташу, П. С. Куню, Т. І. Любицкому, Я. Ю. Морозовичу, Р. В. Ризничуку, И. В. Рокачу, В. С. Харину, М. М. Шведу. Существенную роль в доведении рукописи до уровня справочного пособия сыграли замечания рецензентов А. А. Лебедева и А. А. Каминского, которым авторы также выражают глубокую признательность.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

B — магнитная индукция
c_1 — скорость продольных волн
c_2 — скорость поперечных волн
c_R — скорость волн Релея
D — коэффициент диффузии
D_f — удельная энергия разрушения
D_ε, D_σ — тензоры-девиаторы деформаций и напряжений
d_{ikl} — пьезоэлектрические модули
E — модуль Юнга
$E_в$ — энергия образования вакансии
E_J — полный эллиптический интеграл второго рода
F — эллиптический интеграл первого рода
G — модуль сдвига
$H_n^{(1)}(X)$ — функция Ханкеля n-го порядка 1-го рода
$H_n^{(2)}(X)$ — функция Ханкеля n-го порядка 2-го рода
$I_в$ — интенсивность деформаций
$I_{1\varepsilon}$, $I_{2\varepsilon}$, $I_{3\varepsilon}$, $I_{1\varepsilon D}$, $I_{2\varepsilon D}$, $I_{3\varepsilon D}$ — инварианты тензора деформации и девиатора деформации
$I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$, $I_{1\sigma D}$, $I_{2\sigma D}$, $I_{3\sigma D}$ — инварианты тензора напряжений и девиатора напряжений
J — интеграл по контуру, охватывающему вершину трещины, равный скорости освобождения упругой энергии для нелинейно-упругого тела
J_{IG} — критическое значение J-интеграла
K — полный эллиптический интеграл 1-го рода
K_I, K_{II}, K_{III} — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) соответственно для нормального отрыва, поперечного сдвига и продольного сдвига
K_{IC}, K_{IIC}, K_{IIIC} — критические значения K_I, K_{II}, K_{III}
K_G — критическое значение K_I при плоском напряженном состоянии
$K_{Iд}$, $K_{IIд}$, $K_{IIIд}$ — динамический аналог K_I, K_{II}, K_{III}
K_{IF} — КИН, соответствующий точке перехода от замедленного разрушения к быстрому

K_{ISCC} — пороговое значение КИН для обусловленного водородом роста трещины
$K_{I\min}$ — минимальное значение КИН за цикл
$K_{I\max}$ — максимальное значение КИН за цикл
K_{th} — пороговое значение КИН, ниже которого трещина не растет
K_{fc} — критическое значение КИН, выше которого трещина начинает спонтанно развиваться
M — вектор намагниченности
$n_в$ — равновесная концентрация вакансий
$P_n(X)$ — полином Лежандра n-го порядка
$P_n^{(\alpha,\beta)}(X)$ — полином Якоби n-го порядка
pH — параметр, определяющий кислотность среды
T — температура
T_σ — тензор напряжений
T_σ^0 — шаровой тензор напряжений
T_ε — тензор деформаций
T_ε^0 — шаровой тензор деформаций
t — время
U — вектор смещения
u_r, u_z, u_φ — компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат
u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат
V_H — парциальный молярный объем водорода
α — температурный коэффициент линейного расширения материала
γ — удельная поверхностная энергия
$\gamma_п$ — удельная работа пластической деформации на единицу поверхности трещины
$\gamma_р$ — эффективная работа разрушения
Δ — оператор Лапласа
δ_{nm} — символ Кронекера—Капелли
δ_{fc} — критическое значение раскрытия
δ_I — раскрытие вершины трещины нормального отрыва
δ_{II}, δ_{III} — смещение берегов трещины в вершине для поперечного (тип II) и продольного (тип III) сдвигов
δ_{Ic}, δ_{IIc}, δ_{IIIc} — критические значения δ_I, δ_{II}, δ_{III}
ε — деформация
ε_T — предел текучести материала по деформации
$\varepsilon_у$, $\varepsilon_{пл}$ — упругая и пластическая составляющие деформации
ε_c — критическое значение деформации при статическом нагружении
ε_{fc} — критическое значение деформации при усталостном нагружении

$\varepsilon_н$	— номинальная деформация нетто-сечения тела
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \ldots, \varepsilon_{yz}$	— компоненты тензора деформации
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	— главные относительные удлинения
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$	— главные сдвиги
Θ	— объемное расширение
Π	— эллиптический интеграл третьего рода
λ	— постоянная Ламе
$\lambda_т$	— коэффициент теплопроводности
μ	— коэффициент Пуассона
ρ	— плотность материала
σ	— напряжение
$\sigma_{0,2}$	— условный предел текучести материала при растяжении
$\sigma_в$	— предел прочности (временное сопротивление материала)
σ_n	— нормальное напряжение на площадке с нормалью n
$\sigma_т$	— предел текучести материала при растяжении
$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{\theta r}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}$	— компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	— компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\zeta\zeta}$	— нормальные компоненты тензора напряжений в системах координат x, y, z и ξ, η, ζ соответственно
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	— главные напряжения
$\tau_т$	— предел текучести при сдвиге
τ_i	— интенсивность касательных напряжений
τ_n	— касательное напряжение на площадке с нормалью n
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{\xi\eta}, \tau_{\xi\zeta}, \tau_{\eta\zeta}$	— касательные компоненты тензора напряжений в системах координат x, y, z и ξ, η, ζ соответственно
$\varphi_в$	— электродный потенциал металла в вершине трещины
ψ	— относительное сужение гладкого цилиндрического образца при растяжении

ГЛАВА 1

О ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Процессы разрушения реальных твердых тел сложны и происходят для различных материалов с учетом структуры материала, его химического состава, состояния поверхности и дефектности структуры, вида нагружения, влияния внешней среды и других факторов по-разному. В зависимости от них вид разрушения может изменяться от мгновенного, хрупкого до замедленного и вязкого*. Разрушение твердого тела больших объемов — макроразрушение предопределяется, как известно, теми микропроцессами, которые происходят в его структуре до и в процессе самого разрушения. А эти микропроцессы в свою очередь зависят от свойств тех микросоставляющих материала, которые в результате физического взаимодействия между собой образуют его макроструктуру. Поэтому, чтобы определить прочность или предвидеть разрушение твердого тела и управлять им, необходимо располагать данными о характерных особенностях микропроцессов разрушения твердых тел в зависимости от структуры материалов.

1.1. Некоторые понятия и определения

Различные элементы машин и сооружений (например, стержни, пластины, балки, лопатки турбин, сосуды высокого давления) в механике твердого деформируемого тела рассматриваются как твердые тела заданной конфигурации. При этом считается, что данное твердое тело обладает некоторым комплексом физико-механических свойств, отражающих главные свойства реального материала и элемента конструкции в целом.

Твердое тело под воздействием внешних усилий в большей или меньшей степени меняет свои размеры и форму, т. е. деформируется. Возникающие в таких случаях деформации бывают упругими и (или) пластическими. Упругими называются такие, которые полностью исчезают при удалении воздействий. обусловивших их появление, а остаточными или пластическими — такие, которые не исчезают после удаления указанных воздействий. Свойство твердого тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры называется упругостью, а сохранять возникшие в нем деформации (заданную форму) — пластичностью.

---

* Разрушение твердого деформируемого тела называется хрупким, если оно происходит без предварительных пластических деформаций; в противном случае его считают вязким Если пластические деформации сосредоточены только в тонком слое, примыкающем к поверхности разрушения, которое макроскопически воспринимается как хрупкое, то такое разрушение называется квазихрупким.

Если действующие на твердое тело усилия достаточно велики, то, пройдя некоторую стадию деформирования, тело разрушается, т. е. теряет свою целостность — распадается на отдельные части. Свойство твердого тела оказывать сопротивление деформированию называется его жесткостью, а разрушению — прочностью. Благодаря им проявляется характер физического взаимодействия между частицами (атомами, ионами, молекулами и др.), составляющими твердое тело, в зависимости от изменения расстояния между этими частицами в процессе деформирования тела. Эти и другие свойства реальных твердых тел определяются путем испытания различных образцов из данного материала на заданный вид деформации, например растяжение (рис. 1.1, *а*), кручение, изгиб, сдвиг. В результате такого эксперимента строится диаграмма (рис. 1.1, *б*), отражающая зависимость между значениями действующей нагрузки P и деформацией образца Δl. На рис. 1.1, *б* показана характерная (схематическая) диаграмма, получаемая при растяжении стандартного цилиндрического образца из стали.

Максимальное усилие на единицу площади поперечного сечения образца, которое он выдерживает до разрушения, называется технической прочностью материала. Это значение прочности $\sigma_в$ на диаграмме, показанной на рис. 1.1, *б*, соответствует точке C. Другие характерные точки диаграммы также соответствуют важным физико-механическим свойствам материала. Так, точка A характеризует предел упругости $\sigma_у$, а точка B —предел текучести $\sigma_т$.

Предел условной прочности материала $\sigma_в$ отличается от теоретической $\sigma_{теор}$, которая оценивается интенсивностью взаимодействия (притяжения) между атомными плоскостями в идеальном кристалле такого материала. Предел теоретической прочности подтверждается экспериментально при разрушении образцов материала в виде очень тонких стержней — «усов». Уровень условной прочности большинства материалов на два-три порядка меньше теоретической, что обусловлено различными дефектами в структуре реальных твердых макротел (тел больших размеров, сечений). Дефекты структуры приводят к убыстрению начала разрушения материала. Поэтому для нахождения прочности какого-либо материала или детали из него необходимо располагать данными о характере процессов деформации и разрушения материала с учетом дефектности его структуры.

1.2. Строение совершенных кристаллов

Существующие в природе вещества могут находиться в одном из четырех агрегатных состояний: твердом, жидком, газообразном или плазменном. Вещества, находящиеся в твердом состоянии (твердые тела), в отличие от находящихся в других агрегатных состояниях способны сохранять свою форму и размеры (при постоянной температуре), т. е. они обладают прочностью и жесткостью. Под действием внешних сил в твердом теле возникают внутренние силы представляющие собой результат взаимодействия между частицами, составляющими тело, вызванного изменением расстояния между ними. При низких температурах все вещества переходят в твердое состояние. Равновесное состояние тела с заданной структурой определяется из условия минимума полного термодинамического потенциала:

$$F = U - TS + PV, \qquad (1.1)$$

где U — внутренняя энергия; S — энтропия; P — давление; V — объем.

Твердые тела могут быть кристаллическими или аморфными (стеклообразными). Для кристаллического строения характерно наличие так называемого дальнего порядка, т. е. периодичности повторения, присущей дан-

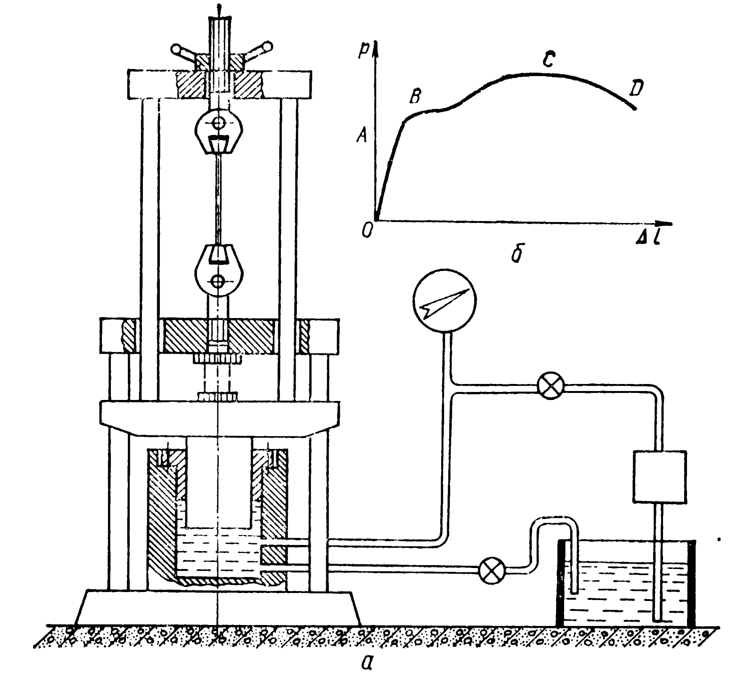


Рис. 1.1. Схема испытательной машины на растяжение — сжатие с гидравлическим приводом (*а*) и характерная диаграмма, получаемая при растяжении стандартного цилиндрического образца из стали (*б*).

ному материалу элементарной группы атомов (на больших расстояниях), для аморфного — так называемого ближнего порядка, т. е. упорядоченности лишь в расположении близлежащих частиц.

При одинаковом составе исходных частиц твердые тела могут иметь несколько различных кристаллических структур. Такая их способность — полиморфизм — обусловлена наличием нескольких относительных минимумов термодинамического потенциала (метастабильных состояний).

Отличительной особенностью монокристаллических тел (монокристаллов), для которых типичен дальний порядок в их структуре, является анизотропия свойств, т. е. их свойства зависят от направления. Поликристаллы, состоящие из множества беспорядочно ориентированных монокристаллитов, а также аморфные тела изотропны.

Для описания внутреннего строения кристаллов используется понятие кристаллической решетки, т. е. пространственной сетки, в узлах которой располагаются частицы (атомы, ионы или молекулы). В основе кристаллической решетки лежит элементарная ячейка, представляющая собой параллелепипед, простым перемещением которого в трех направлениях (вдоль трансляций) может быть построена пространственная кристаллическая решетка. Длины ребер указанного параллелепипеда **a**, **b**, **c** и значения углов между его гранями α_0, β_0, γ_0 (см. рис. 1.2) характеризуют кристаллическую решетку данного кристалла. Французский кристаллограф О. Бравэ в 1948 г. показал, что в зависимости от величины и взаимной

ориентации ребер элементарной ячейки возможно существование 14 типов кристаллических решеток (решетки Бравэ). Различают как наиболее типичные базоцентрированные, объемно-центрированные и гранецентрированные решетки кристаллов, расположения узлов для которых следующие. Если узлы кристаллической решетки находятся только в вершинах параллелепипеда, решетка называется примитивной или простой, если, кроме того, узлы есть и в центре оснований параллелепипеда,— базоцентрированной, если узел размещен в центре ячейки, — объемно-центрированной, а если имеются узлы в центре каждой боковой грани,— гранецентрированной.

В зависимости от углов α_0, β_0, γ_0 между гранями ячейки и отношениями между длинами ее ребер a, b, c различают семь кристаллических систем (сингоний): 1) кубическая; 2) гексагональная; 3) тетрагональная; 4) тригональная, или ромбоэдрическая; 5) ромбическая; 6) моноклинная; 7) триклинная.

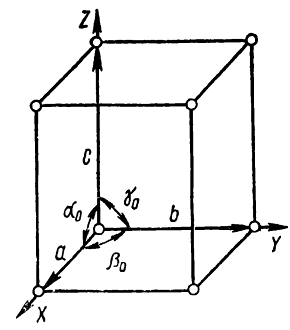


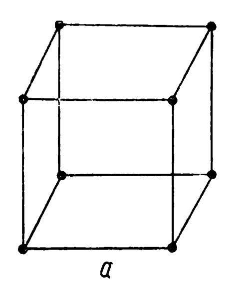
Рис. 1.2. Схематическое изображение кристаллической решетки.

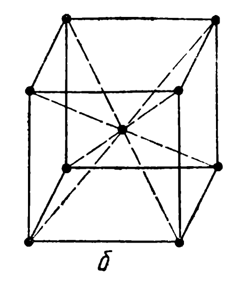
Для кубической сингонии $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90°$, $a = b = c$ (рис. 1.3). При этом возможны три разновидности кубической решетки: простая, объемно- и гранецентрированная. Для гексагональной сингонии ($\alpha_0 = \gamma_0 = 90°$, $\beta_0 = 120°$, $a = c \neq b$) элементарная ячейка представляет собой шестигранную призму (рис. 1.4). Элементарной ячейкой тетрагональной сингонии ($\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90°$, $a = b \neq c$) служит прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат (рис. 1.5). В этой системе могут быть простая и объемно-центрированная решетки. В тригональной сингонии ($\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 \neq 90°$, $a = b = c$) элементарной ячейкой является ромбоэдр (рис. 1.6), а в ромбической ($\alpha_1 = \beta_0 = \gamma_0 = 90°$, $a \neq b \neq c$) — прямоугольный параллелепипед с различной длиной ребер (рис. 1.7). В этой сингонии наблюдается четыре пространственные решетки: простая, базо-, объемно- и гранецентрированная.

В моноклинной сингонии ($\alpha_0 = \beta_0 = 90°$, $\gamma_0 \neq 90°$, $a \neq b \neq c$), элементарная ячейка которой представляет собой наклонный параллелепипед (рис. 1.8), существуют две пространственные решетки: простая и базоцентрированная. Пространственная решетка триклинной сингонии ($\alpha_0 \neq \beta_0 \neq \gamma_0 \neq 90°$, $a \neq b = c$) имеет элементарную ячейку в виде параллелепипеда (рис. 1.9), все ребра и углы которого не равны между собой.

В связи с наличием анизотропии кристаллов необходимо систематизировать обозначения координатных плоскостей и направлений в кристалле. Для этого выбирается система координат, оси которой совпадают с тремя ребрами элементарной ячейки, и начало ее размещается в одном из углов решетки. Принимается, что осевые единицы длины соответствуют длине ребер ячейки, т. е. единица длины по оси X будет a, по оси Y — b и по оси Z — c. Положение любой плоскости в пространстве определяется тремя точками, в качестве которых удобно взять точки пересечения плоскости с осями координат.

Пусть плоскость S пересекает оси координат в точках A, B, C (рис. 1.10) и отсекает по осям отрезки $m = OA/a$; $n = OB/b$ и $p = OC/c$. Для случая, изображенного на рис. 1.10, $m = 4$, $n = 3$, $p = 2$. Отношение обратных значений осевых отрезков $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$, выраженное через отноше-





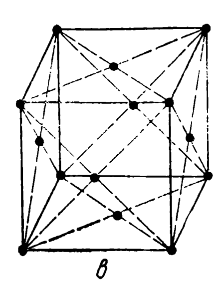


Рис. 1. 3. Простая (*а*), объемно-центрированная (*б*) и гранецентрированная (*в*) решетки кубической сингонии.

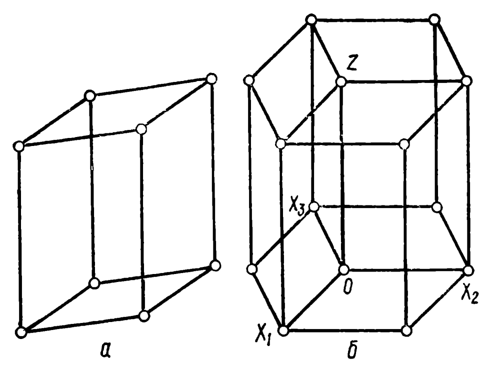
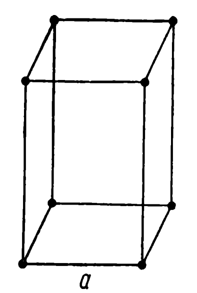
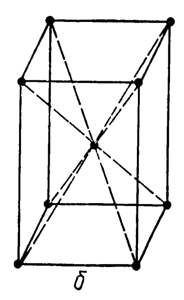


Рис. 1.4. Элементарная ячейка гексагональной сингонии (*а*) и три элементарные ячейки, образующие шестигранную призму (*б*).





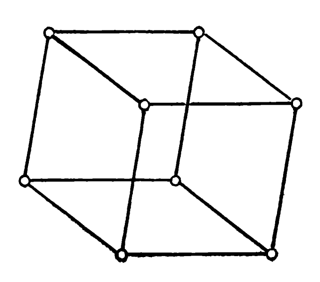


Рис. 1.5. Простая (*а*) и объемно-центрированная (*б*) решетки тетрагональной сингонии.

Рис. 1.6. Элементарная ячейка тригональной (ромбоэдрической) сингонии.

ние трех наименьших целых чисел h, k, l, называемых индексами Миллера, записывается как

$$h:k:l=\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}. \tag{1.2}$$

Индексы Миллера заключаются в круглые скобки $(h\,k\,l)$ и знак отношения между ними не ставится.

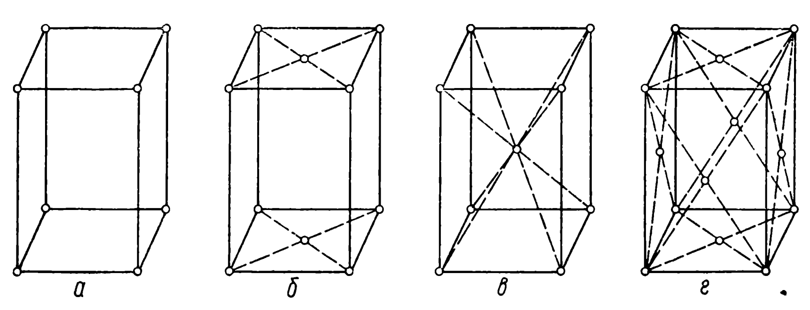


Рис. 1.7. Простая (*а*), базоцентрированная (*б*), объемно-центрированная (*в*) и гранецентрированная (*г*) решетки ромбической сингонии.

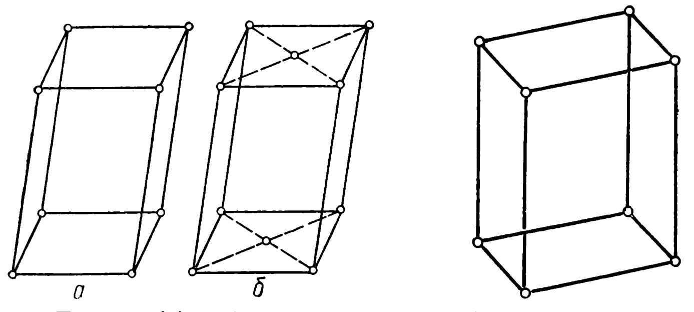


Рис. 1.8. Простая (*а*) и базоцентрированная (*б*) решетки моноклинной сингонии.

Рис. 1.9. Элементарная ячейка триклинной сингонии.

Для плоскости S (рис. 1.10)

$$\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{3}{12}:\frac{4}{12}:\frac{6}{12}=3:4:6, \tag{1.3}$$

т. е. индексы Миллера $h=3$, $k=4$, $l=6$ или (346). Читается это обозначение так: «три, четыре, шесть». Если плоскость параллельна какой-либо из осей, индекс Миллера, соответствующий этой оси, равен нулю $\left(0=\frac{1}{\infty}\right)$. При отрицательном значении отрезка, отсекаемого плоскостью, соответствующий индекс Миллера имеет отрицательный знак. Этот знак ставится над индексом, например $(\bar{1}02)$. По известным индексам Миллера легко определить отрезки, отсекаемые плоскостью по осям координат.

Семейство эквивалентных плоскостей обозначается фигурными скобками. Например, символом {100} обозначается все семейство граней куба (100), (010), (001) и т. д.

Индексы направлений в кристалле представляют собой набор наименьших чисел n_1, n_2, n_3, отношение которых друг к другу равно отношению проекций вектора, параллельного заданному направлению на оси координат (значения проекций вектора на оси координат должны быть выражены в соответствующих масштабах a, b, c). Эти индексы заключаются в квадратные скобки: $[n_1, n_2, n_3]$. Семейство эквивалентных направлений обозначается так: $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle$.

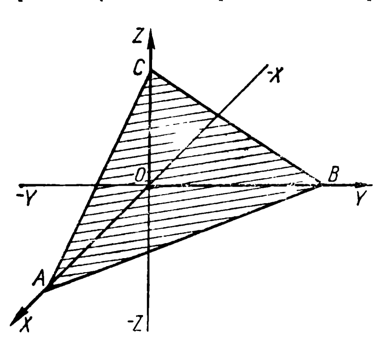


Рис. 1.10. Схематическое изображение сечения координатного угла плоскостью.

Кристаллы гексагональной системы описываются с помощью четырех осей координат x_1, x_2, x_3 и z. Оси x_1, x_2, x_3 имеют одинаковый масштаб лежат в одной плоскости и расходятся из начала координат под углом 120°, ось z перпендикулярна к ним (рис. 1.4). В гексагональной сингонии применяются индексы Миллера — Бравэ. Принцип нахождения этих индексов такой же, как и индексов Миллера:

$$\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p} : \frac{1}{g} = h : k : l : l. \qquad (1.4)$$

В узлах кристаллической решетки располагаются частицы, составляющие твердое тело. В зависимости от физической природы сил, действующих между этими частицами, в кристаллическом теле возможны несколько типов межчастичных связей: ионная, ковалентная, металлическая и молекулярная. Такая классификация позволяет сделать некоторые обобщения относительно их свойств. В узлах кристаллической решетки кристаллов с ионной связью находятся положительные и отрицательные ионы. Силы электростатического притяжения между разноименными ионами больше, чем силы отталкивания между одноименными. Ионная (полярная, электровалентная, гетерополярная) связь типична для неорганических соединений (например, NaCl, CsCl).

В основе возникновения ковалентной (гомеополярной) связи лежит обменное взаимодействие между атомами посредством электронов, имеющее чисто квантовую природу. Под влиянием ковалентной связи атомы не только устанавливаются на определенных расстояниях друг относительно друга, но и образуют определенные пространственные конфигурации. Ковалентная связь возникает между двумя атомами за счет образования общей пары валентных электронов, по одному из каждого атома (например, атомы в молекулах H_2, O_2, N_2). Такая связь бывает не только между атомами одного элемента, но между разными (например, Si и C). Ковалентная химическая связь очень прочна и кристаллы с этим типом связи отличаются большой прочностью, твердостью, высокой температурой плавления.

В узлах кристаллической решетки с металлической связью находятся ионы. При образовании металлической структуры составляющие ее атомы сближаются настолько, что происходит перекрытие взаимодействия валентных электронов. В результате этого последние получают возможность довольно свободно перемещаться по всему объему металла и становятся

общими («коллективизированными»). Электронный газ является общим для всего кристалла и создает «цементирующее» действие, связывая в прочную систему положительно заряженные ионы металла. Наличие сил отталкивания между ионами металла и «стягивания» в результате действия «коллективизированных» электронов приводит к тому, что ионы металла располагаются на некотором равновесном расстоянии друг от друга (соответствующем минимуму потенциальной энергии системы), образуя прочную металлическую связь.

При молекулярной связи в узлах кристаллической решетки находятся устойчивые молекулы, например H_2, N_2, Br_2, CO_2, которые сохраняют свои индивидуальные особенности и удерживаются в узлах решетки силами Ван-дер-Ваальса.

1.3. Дефекты кристаллической решетки

Реальный кристалл обычно отличается от идеального различными отклонениями от правильного строения решетки, называемыми ее дефектами. Последние играют очень важную роль в формировании и протекании процессов деформации и разрушения твердых тел. Дефекты в кристаллах подразделяют на точечные (нульмерные), одно-, двух- и трехмерные. Точечные дефекты в свою очередь делятся на энергетические, электронные и атомные. Энергетические дефекты (фононы) — это искажения регулярности решетки кристалла, вызванные тепловыми колебаниями частиц,

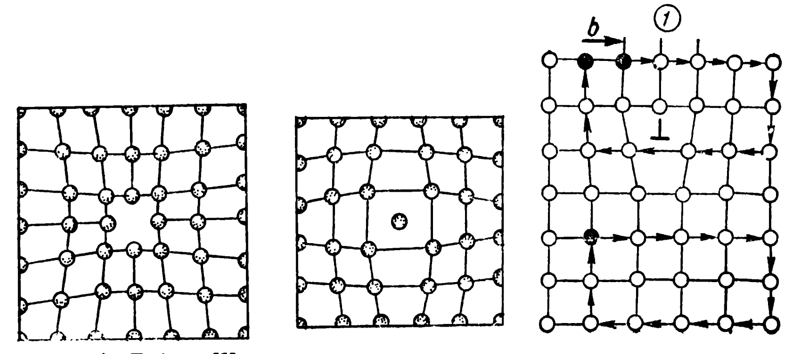


Рис. 1.11. Дефект Шотки.

Рис. 1.12. Дефект Френкеля.

Рис. 1.13. Краевая дислокация.

находящихся в узлах решетки. К ним относятся также несовершенства решетки, вызванные воздействием различных излучений (свет, рентгеновское, α-, γ-излучения и др.). К электронным дефектам относят избыток и недостаток электронов (незаполненные валентные связи — дырки).

Атомными дефектами являются следующие: вакансия (дефект Шотки, рис. 1.11), образующаяся при уходе атома из узла решетки; междоузельный атом (дефект Френкеля, рис. 1.12), т. е. атом того же сорта, что и атомы, составляющие решетку, но находящийся между узлами решетки; примесный или чужеродный атом, который, как правило, содержится даже в самых чистых материалах. Примесные атомы могут замещать атомы, составляющие решетку, в узлах (примеси замещения) или размещаться в межузель-

ном пространстве (примеси внедрения). Хотя концентрация атомных дефектов при обычных температурах небольшая, но изменение многих свойств кристалла, вызванные этими дефектами, может быть значительным. Например, тысячные доли процента некоторых примесей в практически чистых полупроводниках изменяют их электропроводность на 5—6 порядков.

По теоретическим оценкам значение энергии образования точечных дефектов в металлах с плотноупакованной структурой для вакансий примерно в два раза меньше, чем для межузельных атомов. Поэтому при достижении теплового равновесия основным видом точечных дефектов в металлах являются вакансии.

Они имеются в каждом кристалле. В реальном кристалле вакансии постоянно зарождаюся и исчезают под влиянием тепловых флюктуаций. Равновесная концентрация вакансий $n_в$ в кристалле при температуре T определяется по формуле Больцмана

$$n_в = n \exp\left(-\frac{E_в}{kT}\right), \tag{1.5}$$

где n — число атомов в единице объема кристалла; k — постоянная Больцмана.

К одномерным (линейным) дефектам кристаллического строения относятся дислокации (что означает «смещение»). Типичным представителем такого класса нарушений структуры является краевая дислокация. Например, если в кристаллической решетке по тем или иным причинам (в процессе роста кристалла, при пластической деформации и др.) возникла лишняя полуплоскость атомов, так называемая экстраплоскость (*1* на рис. 1.13), то край ее образует несовершенство (линейный дефект) решетки, которое называется краевой дислокацией. Последняя может простираться в длину (перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 1.13) на многие тысячи параметров решетки, быть прямой и выгибаться в ту или иную сторону. Эта линия называется линией (или осью) дислокации. Вокруг линии дислокации возникает область упругого искажения решетки. Расстояние от центра дефекта до того места решетки, где она не искажена, принимается равным ширине дислокации (оно равно нескольким межатомным расстояниям).

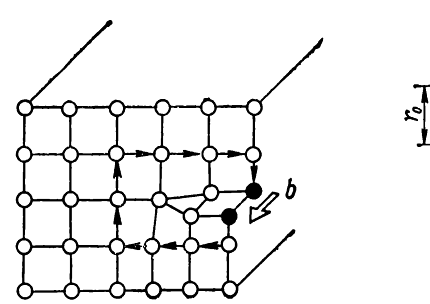
Дислокацию характеризует вектор Бюргерса $\mathfrak{b}$, указывающий направление скольжения атомных плоскостей, в процессе которого возникает такой дефект. Строгое определение этого вектора можно сделать с помощью контура Бюргерса. В совершенной решетке кристалла (см. нижний контур на рис. 1.13) такой контур* окажется замкнутым прямоугольником, в случае краевой дислокации (см. верхний контур на рис. 1.13) он будет иметь разрыв, величина и направление которого определяют вектор Бюргерса $\mathfrak{b}$ данной дислокации (рис. 1.13). Вектор Бюргерса находится следующим образом: вдоль произвольно выбранного положительного направления оси дислокации строится контур Бюргерса в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Вектор Бюргерса равен отрезку, на который не замкнут контур, т. е. это вектор, замыкающий контур Бюргерса и проведенный из конечной точки контура к его началу. При изменении положительного направления оси дислокации на обратное знак вектора Бюргерса меняется на обратный. Вектор Бюргерса краевой дислокации

---

* Для проведения контура необходимо сделать одинаковое количество шагов (трансляций) в горизонтальном направлении влево и вправо и одинаковое количество шагов в вертикальном направлении (вверх и вниз).

параллелен направлению скольжения и соответствует вектору скольжения, который равен межатомному расстоянию в направлении скольжения. Линия дислокации перпендикулярна вектору Бюргерса. Краевая дислокация обозначается символом «⊥» или «⊤», или же символом другой конфигурации, отражающей ориентацию экстраплоскостей*. Иногда используются также символы «+» и «—», обозначающие «положительную» и «отрицательную» краевые дислокации соответственно.

Вторым основным типом дислокаций является винтовая (рис. 1.14). Она возникает при сдвиге частей кристалла по обе стороны неполного раз-



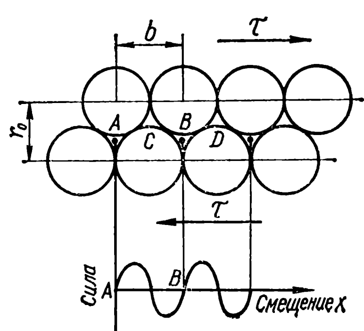


Рис. 1.14. Винтовая дислокация.

Рис. 1.15. Модель идеального кристалла.

реза, сделанного в совершенном кристалле, друг относительно друга на одно межатомное расстояние в направлении, параллельном краю разреза. В отличие от краевой в винтовой дислокации отсутствует экстраплоскость, а вектор Бюргерса коллинеарен линии дислокации. Дислокации в кристаллах редко бывают чисто краевыми или чисто винтовыми. Криволинейные дислокации имеют, как правило, смешанный характер. Дислокационная линия не может оборваться внутри кристалла, а выходит на свободную поверхность или замыкается на себя, образуя петлю.

Винтовые дислокации, как и краевые, могут быть двух знаков, которые определяются из направления вектора Бюргерса при заданной системе координат. Длина вектора Бюргерса винтовой дислокации (рис. 1.14), определяемая по контуру Бюргерса, имеет такое же значение, что и такого же вектора для аналогично ориентированной краевой дислокации, но перпендикулярного к нему. Между дислокациями разного знака существует сила притяжения, а между дислокациями одного знака — сила отталкивания.

Напряжение сдвига, необходимого для движения дислокации, впервые определили Пайерлс и Набарро. Согласно их расчетам для передвижения линии краевой дислокации с одного равновесного состояния в ближайшее другое (принимая напряжение сдвига τ, действующее в плоскости скольжения, периодической функцией относительного смещения соседних плоскостей) необходимо приложить напряжение τ_0, которое определяется по формуле

$$\tau_0 = 2G\,(1-\mu)^{-1} \exp\left[-2\pi r_0 \Lambda b^{-1}\right], \qquad (1.6)$$

---

* Вертикальная рисочка в символе «⊥», «⊤» указывает, с какой стороны плоскости скольжения (горизонтальная рисочка) находится экстраплоскость.

где r_0 — межплоскостное расстояние между скользящими атомными плоскостями; b — межплоскостное расстояние в направлении скольжения; $\Lambda = \frac{3 - 2\mu}{4(1 - \mu)}$ (рис. 1.15).

Напряжение сдвига τ_0 меняется экспоненциально с изменением отношения r_0/b: чем больше межплоскостное расстояние r_0 и чем плотнее упакована плоскость скольжения, тем меньше напряжение сдвига. В случае плотноупакованной плоскости скольжения межатомные связи в поперечном к этой плоскости направлении слабы. В результате энергия активации и напряжение для скольжения намного меньше, чем в случае плоскостей, расположенных ближе друг к другу и поэтому обладающих более рыхлой атомной упаковкой и характеризуемых более сильными атомными связями с соседними плоскостями. Вследствие этого дислокации легко движутся в наиболее плотноупакованных плоскостях и направлениях, поскольку силы Пайерлса — Набарро меньше для дислокаций с малыми векторами Бюргерса. Движение дислокации — элементарный акт пластического сдвига.

Наличие дислокаций в реальных кристаллах подтверждено экспериментально. В связи с этим теория о дислокациях, их взаимодействии и движении в деформируемом твердом теле стала важным этапом в понимании процессов пластического деформирования кристаллов. Результаты и выводы теории дислокаций широко используются для объяснения многих явлений деформирования и разрушения кристаллических тел и для выявления путей повышения их прочности.

Рассмотрим некоторые механизмы зарождения дислокаций. Плотность дислокаций в отожженных металлах составляет от 10^3 до 10^6 на 1 мм^2. Такое их количество не в состоянии, например, привести к образованию наблюдаемых на поверхности деформированных металлов макрополос скольжения. Размеры полос скольжения свидетельствуют о том, что для их образования по отдельным плоскостям скольжения должно двигаться большое количество дислокаций, причем они должны зарождаться внутри кристалла. Один из простейших способов, по которому дислокации могут непрерывно зарождаться внутри кристалла в одной плоскости, был впервые описан Франком и Ридом (источник Франка — Рида). Действие такого источника показывает возможность пояснения неограниченного числа дислокаций внутри деформируемого кристалла. На этой основе можно объяснить и появление макрополос скольжения на поверхности деформируемого металлического образца.

Поскольку дислокации являются малыми областями с искаженной кристаллической решеткой* и с электронным потенциалом, отличающимся от такового для основного металла, то они могут быть местами преимущественного химического взаимодействия при травлении. На этом принципе основан простой метод выявления дислокаций в кристалле по ямкам травления (рис. 1.16). Другим методом выявления дислокаций в кристалле служит метод декорирования, основанный на взаимодействии примесных атомов с дислокациями (с их полем напряжений). При таком взаимодействии примесные атомы сегрегируют вдоль линий дислокаций. При пересыщении твердых растворов примесями в стареющих сплавах будут образовываться выделения. Так как дислокации — это области с высокой концентрацией примесей, то они станут преимущественными местами зарождения частиц выделений. Это явление использовано для обнаружения дислокации во многих кристаллических телах (рис. 1.17).

---

* Это приводит к возникновению локального поля напряжений около линии дислокации.

Наиболее мощное средство исследования дислокаций — дифракционная электронная микроскопия. Высокая разрешающая способность электронного микроскопа и разработка методики получения тонких образцов металлов позволяют непосредственно наблюдать дислокации или, точнее, их поля искажений кристаллической решетки. На электронно-микроскопическом изображении дислокации выявляются в виде темных линий на

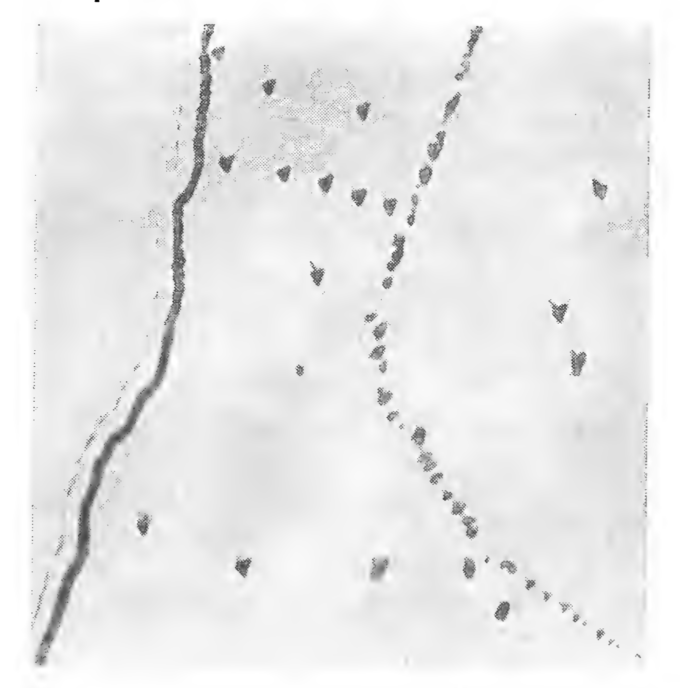


Рис. 1.16. Дислокации, выявленные травлением во фториде лития (×500).

тех участках, где преимущественно рассеиваются электроны, при соблюдении условий дифракции (рис. 1.18).

Для нахождения дислокаций в кристаллитах с низкой их плотностью успешно используются рентгеновские методы [1]. Кристалл просвечивается узким горизонтальным пучком рентгеновских лучей, а отраженный пучок проходит через узкую щель в свинцовой пластине, расположенной между кристаллом и пленкой. Источник и свинцовый экран неподвижны, кристалл и фотопленка перемещаются одновременно с одинаковой скоростью вверх и вниз параллельно друг другу. В результате получают плоские проекции дислокаций в кристалле (рис. 1.19).

Большинство кристаллических тел не являются монокристаллами, а представляют собой поликристалл, т. е. твердое тело, состоящее из большого числа монокристаллов (или зерен). В поликристалле всегда возникают области несогласованности в местах соприкосновения соседних кристаллов. Часто каждый отдельный кристалл в поликристаллическом теле называют зерном, а область несогласованности между ними — границей зерна. Этот вид дефекта в строении твердых тел относится к двухмерным



Рис. 1.17. Выделение карбида молибдена на дислокациях в ферритной стали (электронная микрофотография) (×185 000).

(плоскостным) дефектам. К ним же принадлежат и ряды линейных дислокаций, дислокационные стенки (дислокационные образования) и др.

Трехмерными дефектами кристаллического строения являются различные включения, поры, остроконечные полости — трещины и др.

1.4. Дислокационные механизмы зарождения и роста трещин

При растяжении образца, например стержня, из достаточно пластичного металла в рабочей части образца происходит поперечное сужение (образование шейки). После определенного этапа деформирования (удлинения, сужения) наступает разрыв образца — его разрушение. Такой тип разрушения называется вязким. Для металлов с объемно-центрированной кубической решеткой и ионных кристаллов при низких температурах характерно хрупкое разрушение. Этот тип разрушения, который называется также сколом, сопровождается образованием и распространением трещины без макроскопически заметных пластических деформаций (без образования шейки). Однако имеется много экспериментальных данных, свидетельствующих о том, что хрупкому разрушению все-таки предшест-

вует микропластическая деформация — движение и остановка дислокаций, приводящих в результате к образованию трещин.

Известен ряд возможных дислокационных механизмов (схем) зарождения трещин приводящих затем к хрупкому разрушению твердого деформируемого тела. Эти механизмы предусматривают (как исходный этап) блокирование продвижения дислокации некоторым препятствием (например, границей зерна или включением). Если дислокации в какой-то плоскости скольжения останавливаются перед достаточно мощным препятствием, то образуется скопление дислокаций, которое вызывает высокую

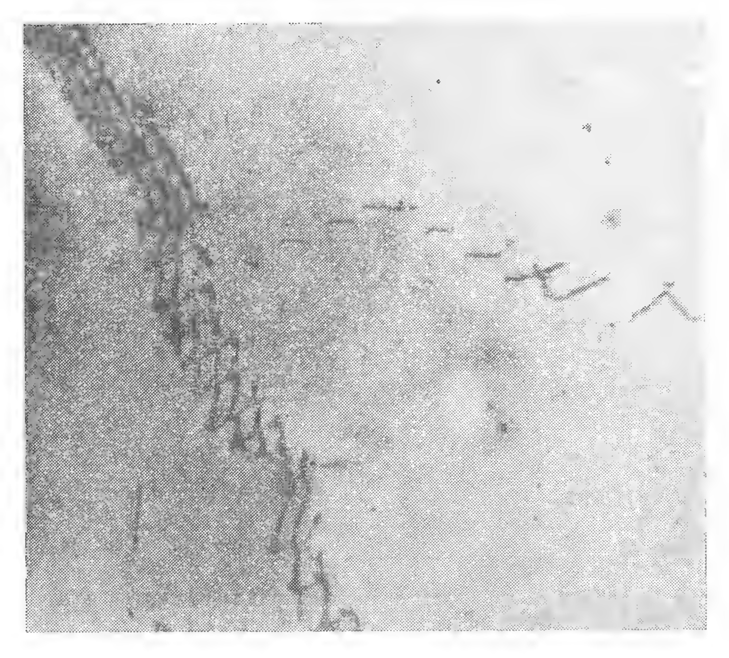


Рис. 1.18. Дислокации, выявленные в железе (трансмиссионная электронная микроскопия) (×42 000).

концентрацию напряжений у препятствия. Взаимное отталкивание дислокаций одного знака стремится увеличить расстояние между ними, с другой стороны, действующее в плоскости скольжения касательное напряжение прижимает дислокации друг к другу, а все скопление — к препятствию. Если в скоплении n дислокаций и каждая дислокация прижимается к препятствию напряжением τ, тогда на препятствие действует сила, пропорциональная $n\tau$. К. Зинер показал, что при увеличении числа дислокаций в скоплении головные дислокации скопления могут сблизиться настолько, что сольются вместе и образуют трещину (рис. 1.20). А. Н. Стро установил, что как только две головные дислокации сольются вместе, появляется возможность непрерывного роста атомной микротрещины в поле высоких растягивающих напряжений (пока все оставшиеся дислокации скопления не сольются в одну трещину). Для возникновения трещины необходимо скопление в плоскости скольжения перед препятствием n дислокаций. Число этих дислокаций примерно равно отношению теоретической проч-

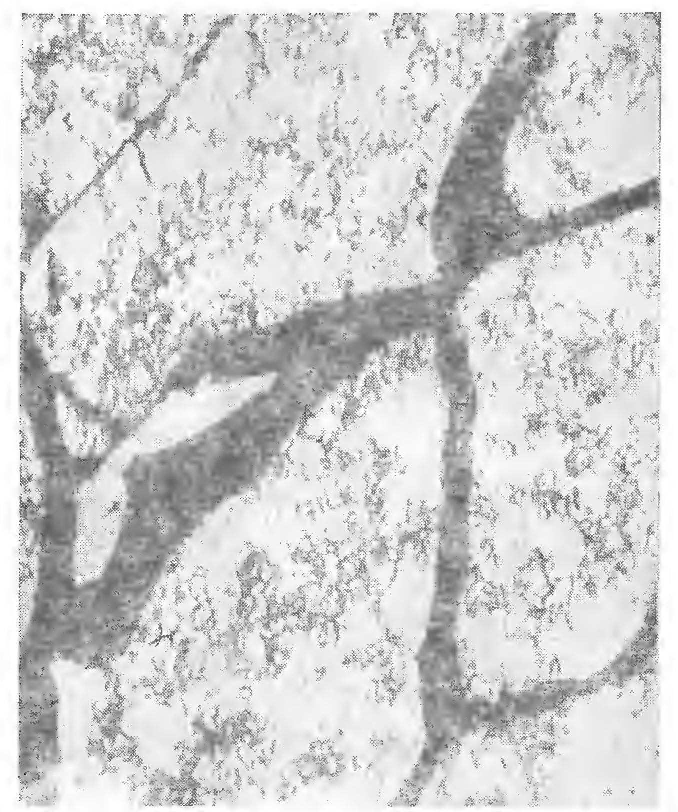


Рис. 1.19. Рентгеновская топография дислокаций, расположенных в объеме зерен (кристалл LiF) (×30).

ности $\sigma_{теор}$ к пределу текучести при растяжении:

$$n \approx \frac{\sigma_{теор}}{\sigma_т}. \qquad (1.7)$$

А. Н. Стро показал также, что скопившиеся в вершине полосы скольжения дислокации образуют зародыш трещины, когда действующее сдвигающее напряжение на дислокационное скопление достигает значения, определяемого формулой

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi G \gamma_1}{2(1-\mu)L}}, \qquad (1.8)$$

где γ_1 — работа образования единицы свободной поверхности трещины; L — длина линии скольжения.

Таким образом, для зарождения трещины (при $\gamma_1 = \text{const}$) требуется просто достаточное число сжатых дислокаций в конце полосы скольжения (например, для металлов около 300).

Несмотря на то, что растягивающее напряжение, возникающее у скопления дислокаций, имеет наибольшее значение на площадках, которые составляют с плоскостью скольжения угол 70°, трещины могут образоваться и в плоскости спайности кристалла путем скола. В поликристаллическом материале напряжение, необходимое для возникновения трещины, зависит и от размера зерна, поскольку он определяет длину линии скольжения *L*.

Зарождение трещин в результате скопления дислокаций перед препятствием предполагает, что уменьшение концентрации напряжений путем скольжения или двойникования в окрестности вершины этого скопления невозможно и что образование трещины — единственный выход в плане уменьшения энергии системы. Есть данные о появлении таких трещин в вершинах скоплений дислокаций в кристаллах оксида магния, подвергнутых сжатию при комнатной температуре.

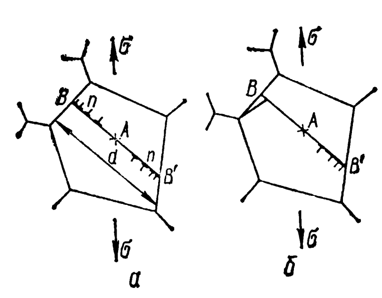


Рис. 1.20. Возникновение микротрещин при слиянии дислокаций в вершине скопления:

а — возникновение краевых дислокаций от источника (*А*) под действием касательных напряжений; *б* — возникновение микротрещины у границы зерна при достижении критической плотности дислокаций.

В соответствии с механизмом зарождения трещин в результате образования скопления дислокаций в объемно-центрированной кубической решетке, предложенным А. Г. Коттрелом, для образования нескользящей (сидячей) дислокации (рис. 1.21), которая служит препятствием движению других дислокаций и очагом зарождения трещины, необходимо объединение двух движущихся в пересекающихся плоскостях скольжения дислокаций. Однако маловероятно, чтобы этот механизм играл большую роль при зарождении трещин в процессе деформирования кристаллов.

Если малоугловая граница наклона атомных плоскостей под влиянием касательных напряжений сдвигается так, как показано на рис. 1.22, *а*, или, наоборот, она образуется при построении краевых дислокаций в ряд в ходе скольжения по параллельным плоскостям, то в конце границы наклона может возникнуть высокая концентрация напряжений. Если локальные растягивающие напряжения достигают уровня теоретической прочности и если концентрация напряжения с расстоянием затухает не слишком быстро, то возникает трещина (рис. 1.22, *б*). Этот вид зарождения трещин — общий для неоднородно деформированных металлов с гексагональной решеткой, а также для монокристаллов ионных соединений типа оксида магния. Рассматривая этот механизм зарождения трещины, А. Н. Стро вычислил прочность кристаллов цинка на растяжение, которая хорошо согласуется с экспериментальными результатами.

Известны и другие механизмы образования трещин. Так, в ряде структур высокой симметрии, подвергнутых достаточно большим нагрузкам, возможно образование деформационных двойников. При пересечении границ таких двойников может возникнуть высокая локальная концентрация напряжений и образоваться трещина (рис. 1.23). Этот механизм возникновения трещин экспериментально подтвержден многими исследователями. Так, Д. Халл наблюдал трещины в монокристалле твердого железокремниевого раствора, которые возникали при пересечении деформационных двойников. Однако, несмотря на большое количество пересечений двойников, трещины были обнаружены лишь на некоторых из них.

На поверхности кристаллов, испытанных на усталость, наблюдаются небольшие и очень тонкие, как бы выдавленные из металла выступы (экструзия), а также впадины, которые распространяются от поверхности в глубь кристалла (интрузия), т. е. отрицательная экструзия. Интрузия является фактически малой трещиной, которая оканчивается на поверхности

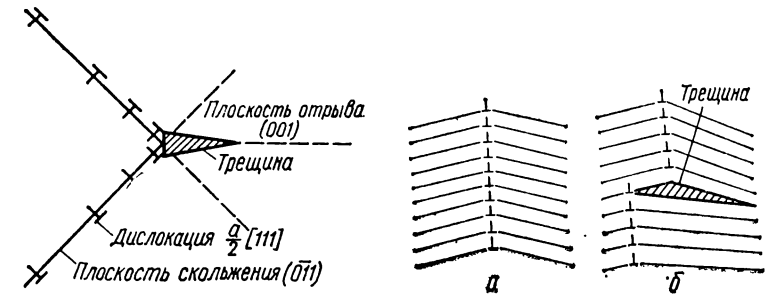


Рис. 1.21. Возникновение микротрещин при пересечении двух плоскостей скольжения.

Рис. 1.22. Возникновение микротрещины при сдвиге части границы наклона:

а — малоугловая граница наклона; *б* — возникновение микротрещины.

кристалла. Очевидно, она может расти и в конце концов приводить к усталостному разрушению. Для объяснения экструзии и интрузии А. Г. Коттрел и Д. Халл предложили дислокационный механизм. Два источника дислокаций (рис. 1.24, *а*), которые действуют в различных плоскостях скольжения, находятся около поверхности образца. Сначала действует один источник и вызывает скольжение (рис. 1.24, *б*), затем активизируется второй в своей плоскости и смещает плоскость скольжения первого (рис. 1.24, *в*). Во время скольжения в противоположном направлении из-за смещения плоскости скольжения на поверхности кристалла образуется интрузия (рис. 1.24, *г*). В результате действия второго источника в противоположном направлении на поверхности кристалла возникает экструзия (рис. 1.24, *д*). Таким образом, на основании описанных выше механизмов в процессе деформирования твердого тела возможно создание микротрещины.

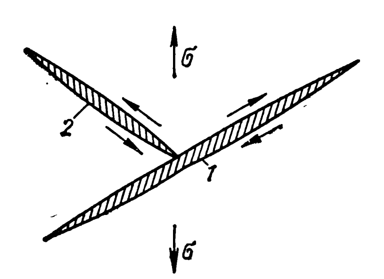


Рис. 1.23. Возникновение трещины при пересечении двух (*1*, *2*) деформационных двойников.

Считают экспериментально доказанным и теоретически обоснованным [2], что стадия зарождения микротрещины заканчивается, если ее длина l достигает значения примерно 10^{-7} м. Зародившись как атомная ($l \sim 10^{-9}$ м), микротрещина растет за счет быстрого движения к ней дислокаций, которое может продолжаться вплоть до полного «сваливания» скопления в эту микротрещину. При реальной мощности скопления $n \sim$ ~ 100 дислокаций и получается указанный выше размер 10^{-7} м. Трещины такой длины обнаружены в ряде пластичных металлов, трещины меньшей длины, несмотря на то что методика позволяла выявлять их ($l \ll 10^{-7}$ м),

экспериментально обнаружены не были. Поэтому принято считать, что процесс зарождения микротрещины завершается, когда она достигает длины $l \sim 10^{-7}$ м, затем наступает стадия ее докритического развития.

Стадия докритического развития трещины (разрушения), несмотря на обычно макроскопически хрупкий тип окончательного излома, всегда неразрывно связана с протекающей в теле микропластической деформацией в зоне разрушения. Это подтверждается прямыми и косвенными экспериментальными данными. Установлено образование в плоскостях спайности

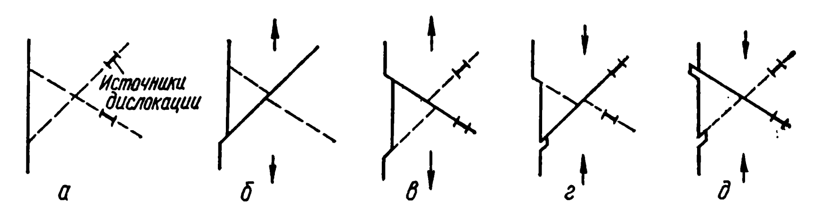


Рис. 1.24. Механизм возникновения экструзий и интрузий в полосах скольжения:

а—д — этапы осуществления механизма.

кристаллов каменной соли трещин размером примерно $5 \cdot 10^{-7}$ м, которые при последующем деформировании этих кристаллов увеличивались до (3—5) 10^{-6} м [3]. А. И. Одинг и Ю. П. Либеров при остаточном удлинении образца на 7—9 % обнаружили в нем появление микротрещины размером (1—5) 10^{-8} м. Дальнейшее увеличение до 10 % сопровождалось существенным ростом микротрещин, длина которых достигала примерно 10^{-7} м. Все наблюдавшиеся трещины возникали в результате встречи полос скольжения с границами зерен задолго до окончательного разрушения. Вследствие слияния мелких зародышевых микротрещин образуются усталостные трещины [4].

Приведенные примеры свидетельствуют о связи между подрастанием субкритических трещин и пластической деформацией. Эта связь отражает то обстоятельство, что микропластическая деформация является составной частью деформирования и роста трещин. Так, в работе [5] установлен анизотропный характер движения микротрещин в направлениях, определяемых пластической деформацией. Обнаружено скольжение в кристаллах, которое и обусловило медленный рост микротрещин. Микрокиносъемкой выявлен рост микротрещин при напряжениях, существенно меньших критических по Гриффитсу, а также подрастание микротрещин только на поверхностях, на которые выходят полосы скольжения.

Доказано [6] наличие докритического развития микрорастрескивания в зоне предразрушения у вершины магистральной микротрещины задолго до обнаружения ее микроскопического подрастания. С помощью метода акустической эмиссии и металлографических средств анализа обнаружено образование докритических микротрещин в зоне вершины микротрещины при нагрузке, составляющей около 40 % той, при которой отмечается наблюдаемое подрастание трещины. При этом фронт трещины распространяется не равномерно, а скорее по типу «выбрасывания» вперед некоторых «языков», подобно тому как перемещение дислокации происходит с помощью выбрасывания перегибов.

Получены результаты [7, 8], показывающие, что распространение микротрещины в кремнистом железе происходит именно вследствие пластической деформации. Дислокационная структура, порождаемая малой (около 10^{-4} м) трещиной, имеет форму квадрата, что подтверждает сколь-

жение не только по плоскостям, пересекающим вершину трещины, но и по плоскостям, которые расположены вне ее. Таким образом, поле напряжений от трещины вызывает наблюдаемое скольжение на определенном удалении от ее вершины. Электронно-микроскопическими исследованиями установлено, что на некотором расстоянии от названной вершины исходной трещины образуется небольшая микротрещина, скачкообразное соединение которой с главной и представляет собой подрастание последней.

Подробное описание ранних физических моделей докритического подрастания трещин дано в работах [2, 9—11].

Если длина l_0 зародившейся в данном материале трещины ($l_0 \approx 10^{-7}$ м) меньше критической l_* для данного поля действующих на тело нагрузок, т. е. меньше размера, при достижении которого наступает спонтанное развитие трещины, то зародившаяся трещина остается стабильной. Ее распространение требует дополнительной нагрузки на тело (его деформации), за счет которой в трещину попадают вновь образовавшиеся дислокации. При наличии этих факторов длина трещины l постепенно увеличивается, пока не достигнет критического значения l_*.

Важную роль в кинетике распространения трещины играют также структурные образования в теле более крупного масштаба, чем дислокационная структура, а именно: различные включения, размер зерен, границы зерен и т. п.

Роль включений двоякая: с одной стороны, они являются слабыми местами — зародышами трещин и разрушения, с другой — тормозят разрушение [10, 11]. Предложена [11] также статистическая модель для массивного образца, в которой учитывается неоднородность распространения фронта трещины. Считается, что макротрещина растет за счет зарождения микротрещин в окрестности ее вершины, которые, сливаясь между собой, образуют микротрещину критического размера, а последняя уже объединяется с макротрещиной в деформируемом кристалле.

1.5. Фрактография поверхностей распространяющихся трещин

Для оценки физико-механических свойств материалов, в частности их прочности, пластичности, склонности к хрупкому разрушению, определяется строение изломов — структура поверхностей распространившейся трещины. Для этого широко используют фрактографический анализ. Особое место такие исследования занимают при изучении проблем прочности и разрушения поликристаллических материалов, например конструкционных металлов и сплавов. Наибольшее распространение получили макро- и микроскопический* фрактографические методы исследования поверхностей разрушения. Макроскопическая фрактография предусматривает изучение поверхностей изломов невооруженным глазом или с применением макроувеличений до 20—60 раз. Инструментами микроскопической фрактографии служат оптические и электронные микроскопы. Использование последних оказало плодотворное влияние на развитие фрактографических исследований и их широкое применение в материаловедении.

Уже первые работы по электронной фрактографии, выполненные в 1960-х годах с помощью реплик на трансмиссионном электронном микроскопе [12—14], позволили обнаружить важные особенности микромеха-

* Здесь не представлены фотометрические, рентгенографические, рентгеноспектральные, электрохимические и другие методы локального анализа изломов.

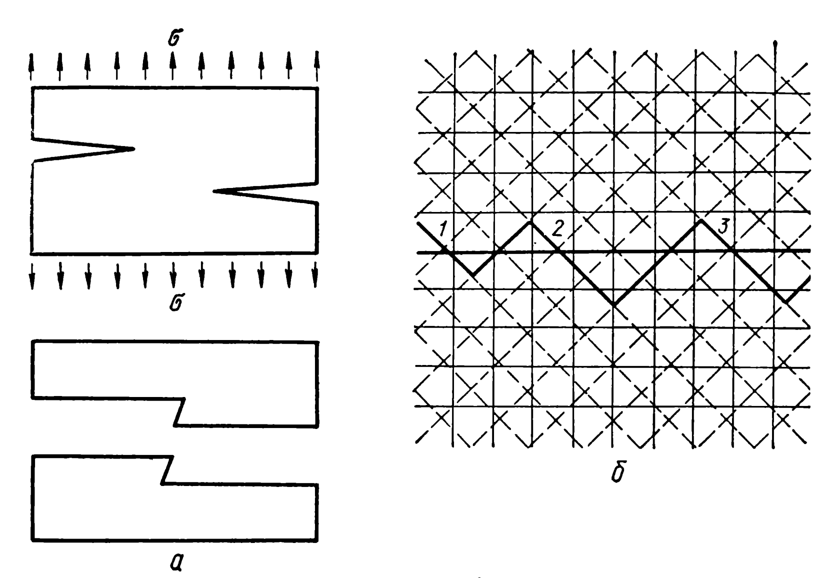


Рис. 1.25. Схематическое представление образования ступенек скола:

а — образование ступенек вследствие разрыва перемычек между сближающимися трещинами скола; *б* — образование ступенек вследствие реинициирования трещины скола в соседнем кристалле (*1*, *2*, *3* — точки начала реинициирования; пунктирная сетка показывает ориентацию решетки в соседнем кристалле).

низмов хрупкого, вязкого и усталостного разрушений, в частности особенности микропластических деформаций, которые стали важным звеном в расширении физических основ в механизме разрушения материалов.

Развитие и создание новой электронно-оптической техники, в частности растровых электронных микроскопов, в значительной мере расширило возможности фрактографии при определении взаимосвязи между микромеханизмами разрушения и физико-механическими свойствами конструкционных материалов.

Методами фрактографического анализа установлено, что в зависимости от условий нагружения и структурного состояния материала трещины в нем могут распространяться путем реализации следующих микромеханизмов разрушения: транскристаллитного скола, квазискола, межзеренного скола, ямочного отрыва, расслоений по плоскости скольжения, формирования бороздчатого микрорельефа в процессе усталостного распространения трещины. Каждый из этих микромеханизмов оставляет свои специфические «следы» на поверхности излома.

Транскристаллитный скол. Под сколом подразумевается процесс отрывного расчленения (разрушения) материала по определенным кристаллографическим плоскостям. Путем дифракционного рентгеновского анализа, а также с использованием ямок травления установлена связь между ориентацией плоскости трещины и кристаллической структурой, что является главной особенностью транскристаллитного скола. Так, в металлах и сплавах с объемно-центрированной кубической решеткой распространение трещин транскристаллитного скола осуществляется преимущественно вдоль плоскостей {001}. Такая ориентационная связь обусловливает ряд микроскопических особенностей, наблюдаемых на поверхности разрушения. В реальных кристаллах транскристаллитный скол осуществля-

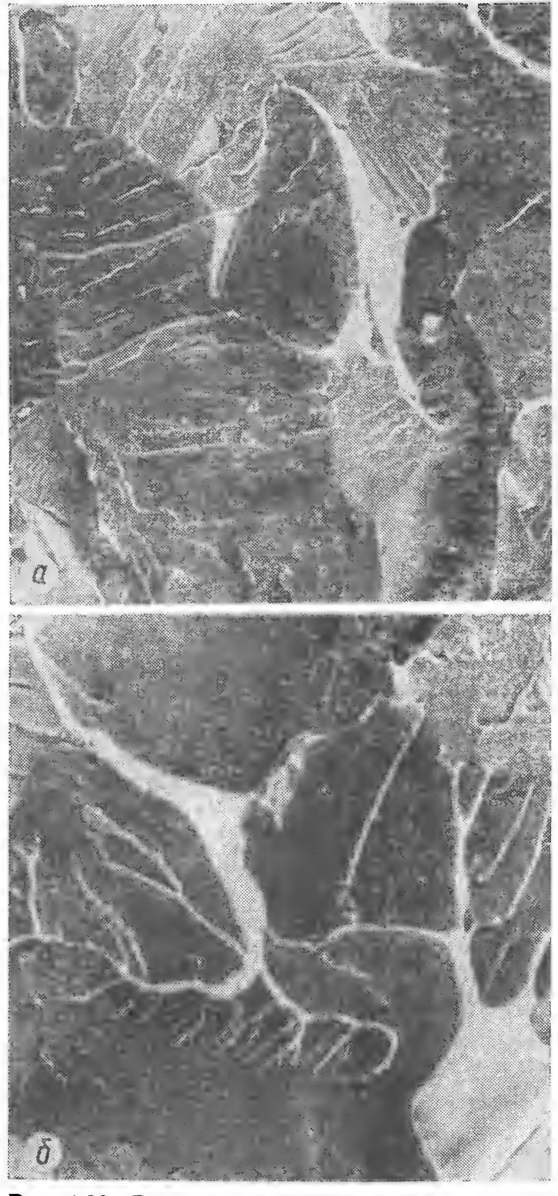


Рис. 1.26. Транскристаллитный скол стали ферритного класса 15Х25Т:
а — ×300; *б* — ×700.

ется обычно путем распространения множества микротрещин скола по определенным семействам кристаллографических плоскостей. При сближении таких трещин происходит объединение последних (рис. 1.25, *а*) путем разрушения разделяющей их перемычки, что сопровождается образованием отчетливой фрактографической особенности — ступенек скола (рис. 1.26, *а*, *б*). Последние могут быть следствием как вторичного скола, так и

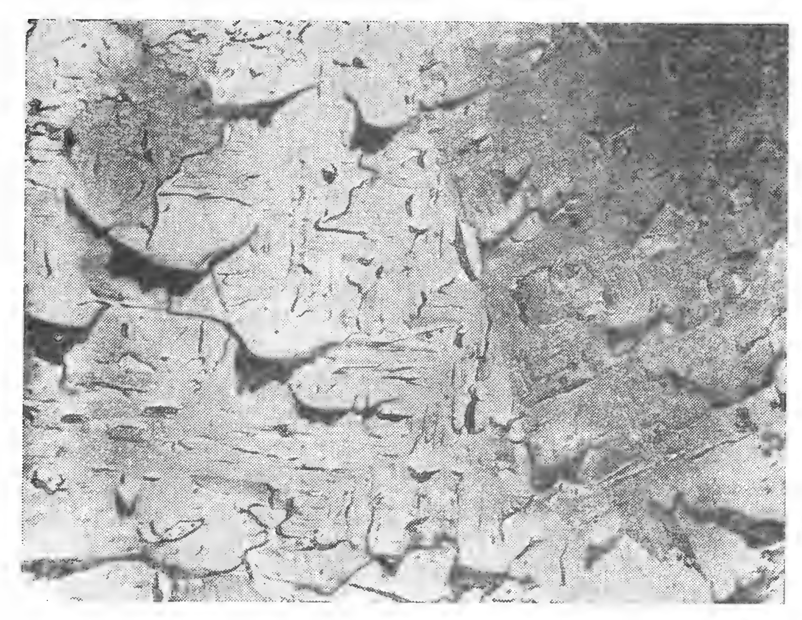


Рис. 1.27. Двойниковые вырывы («языки»), образующиеся при транскристаллитном сколе стали 15Х25Т (×300).

процессов пластической деформации в микрообъеме перемычки. Ступеньки скола имеют тенденцию сливаться в направлении локального распространения трещины, образуя при этом специфические «речные» узоры. Их появление связано с дополнительными энергетическими затратами при разрушении.

Кристаллографическая разориентация зерен и субзерен в металлах обусловливает локальные отклонения в направлении развития трещин транскристаллитного скола — переход трещины от зерна одной ориентации к зерну другой ориентации сопровождается реинициированием последней и распространением через второе зерно в новом направлении (см. рис. 1.25, *б*). Анализ направления слияния ступеней скола на поверхности излома показывает, что микротрещины скола двигаются в различных, часто противоположных направлениях, сливаясь воедино в магистральную, микроскопическую трещину хрупкого разрушения.

При отрывном разрушении железа и сталей на поверхности скола часто возникают локальные вырывы, называемые «языками» (на рис. 1.27 темные места), которые образуются в результате локального разрушения вдоль поверхности раздела матрица — двойник (рис. 1.28).

Транскристаллитный скол — основной микромеханизм низкоэнергоемкого хрупкого разрушения сталей с ферритоперлитной структурой

(низколегированных конструкционных и обычных углеродистых). Топография поверхностей скола в таких сталях зависит от содержаний углерода и перлитной составляющей. По мере увеличения содержания углерода возрастает количество ступенек скола и уменьшаются размеры элементарных скольных фасеток [15].

Квазискол. Для хрупкого разрушения закаленных и низкоотпущенных сталей (особенно с повышенным содержанием углерода) типичен так называемый квазискольный характер разрушения (рис. 1.29). Термин «квазискол» появился в литературе [12, 15] для характеристики транскристаллитного скольного разрушения мартенсита и бейнита, у которых фасетки скола значительно дисперснее и имеют структурированный вид, как бы имитирующий тонкое их строение.

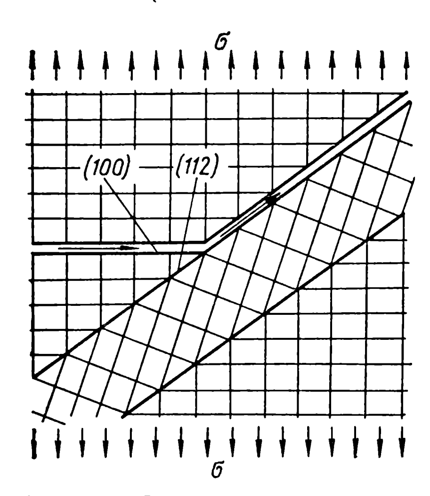


Рис. 1.28. Схематическое представление скола по границе двойник — матрица.

К особенностям квазискола принадлежит отсутствие специфических «речных» узоров, характерных для низкопрочных структурных состояний. Микромеханизм разрушения квазисколом предполагает мультиочаговое зарождение тысяч микротрещин впереди макротрещины, последующий их рост и слияние между собой, а также с фронтом магистральной трещины. Процессы слияния таких микроскольных трещин сопровождаются микропластическим течением в объеме перемычек, что ведет к образованию ступеней и гребней на поверхности излома.

Межзеренный скол (рис. 1.30) состоит в отделении кристаллов поликристаллического агрегата один от другого по границам между ними (по границам зерен) и обычно связан с низкой когезионной прочностью* металла в приграничных участках, в связи с чем энергия разрушения, т. е. работа, затрачиваемая на распространение трещины вдоль границ зерен, оказывается значительно меньше соответствующей энергии транскристаллитного скола.

Реализация межзеренного скола при разрушении конструкционных сплавов может быть обусловлена сегрегацией выделений вторичных фаз по границам зерен, миграцией к ним точечных и дислокационных дефектов, а также процессами адсорбционного снижения прочности [15] или коррозионного растрескивания границ зерен в результате проникшей к ним активной среды.

Межзеренный скол — характерный микромеханизм разрушения легированных сталей в состоянии отпускной хрупкости, железа, охрупченного кислородом, свежезакаленных (неотпущенных) и низкоотпущенных после закалки сталей. Взаимодействие металлов и сплавов с активной ра-

* Когезионной прочностью называют значение силы сцепления, которое обусловлено притягивающим взаимодействием между частицами двух смежных плоскостей в кристаллической решетке.

Рис. 1.29. Фрактограмма квазискола стали 60ХС (×400).



Рис. 1.30. Фрактограмма межзеренного скола стали 15Х25Т (×520).

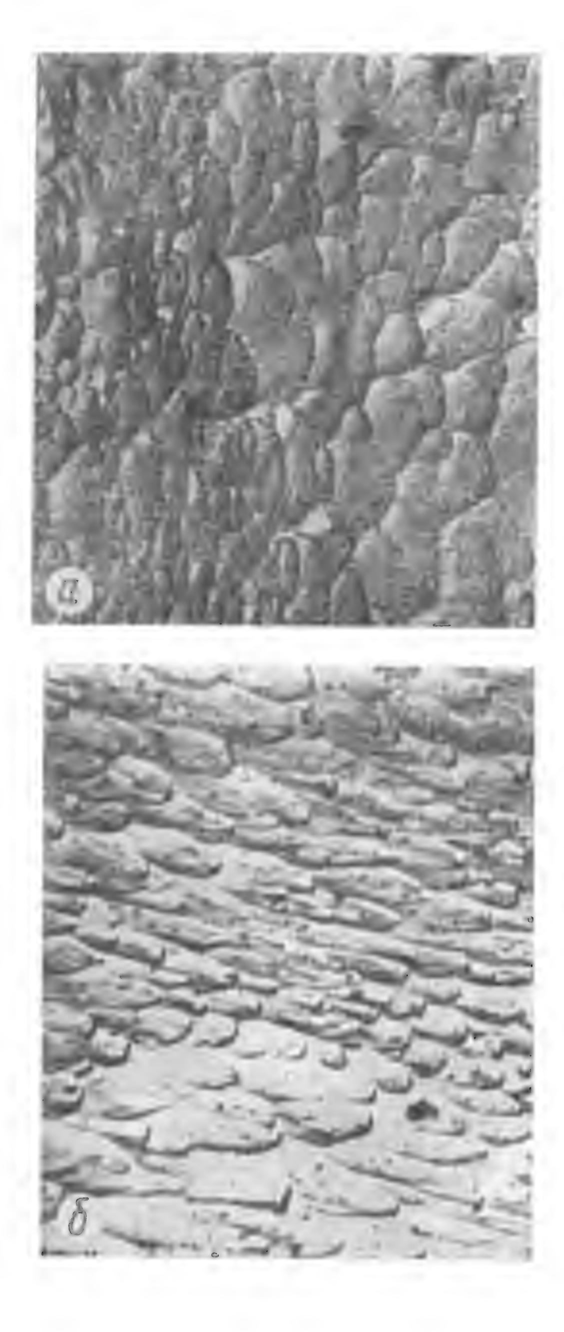




Рис. 1.31. Фрактограммы, иллюстрирующие три типа ямочных микрообразований на поверхности излома стали 40Х (×400):

а — нормальный отрыв; *б* — сдвиговый отрыв; *в* — внецентренный отрыв.

бочей средой также часто проявляется в межзеренном скольном разрушении. Это касается, в частности, явлений коррозионного растрескивания сталей и водородной хрупкости, а также разрушения сталей под влиянием жидкометаллических расплавов (см. более подробно [9, 13, 15, 16]).

Ямочный отрыв. Микрофрактографический анализ показывает, что поверхности вязкого разрушения абсолютного большинства металлов и сплавов содержат небольшие углубления, ямки (рис. 1.31), возникшие в результате микропластического течения и разрыва перемычек между микропустотами. Такой механизм разрушения часто называют ямочным отрывом, или слиянием микропустот (микротрещин). Последние зарождаются вследствие локализации пластической деформации возле включений, частичек второй фазы, границ зерен или субзерен. В процессе роста и коалесценции таких пустот происходит микропластическая деформация перемычек между ними, локально достигающая высокого уровня (сотни и тысячи процентов удлинения), фиксируемого для таких же материалов при испытаниях образцов на растяжение.

Характер ямочных микрообразований на поверхности вязких изломов определяется не только видом напряженного состояния, он в значительной мере зависит от структуры сплавов, температуры испытаний, уровня энергоемкости разрушения (более подробно см. [15]).

Расслоения по плоскостям скольжения. При вязком разрушении металлов и сплавов на поверхностях изломов наряду с ямочными участками

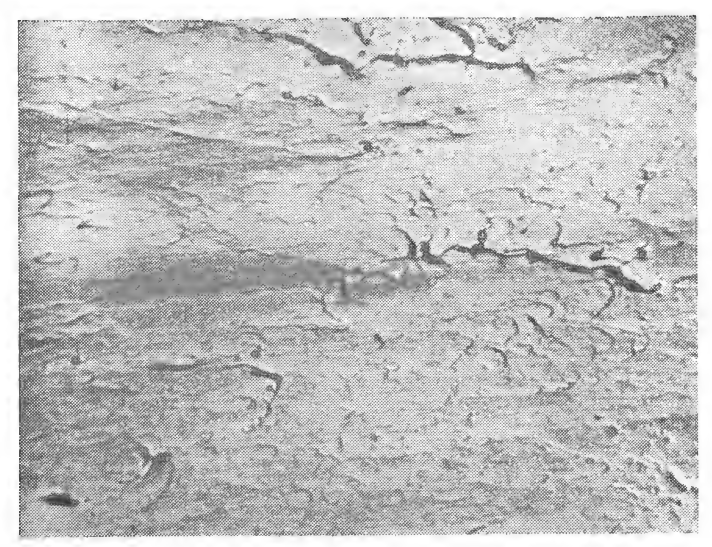


Рис. 1.32. Расслоение по плоскостям скольжения («вязкий скол») стали 60ХС (×4000).

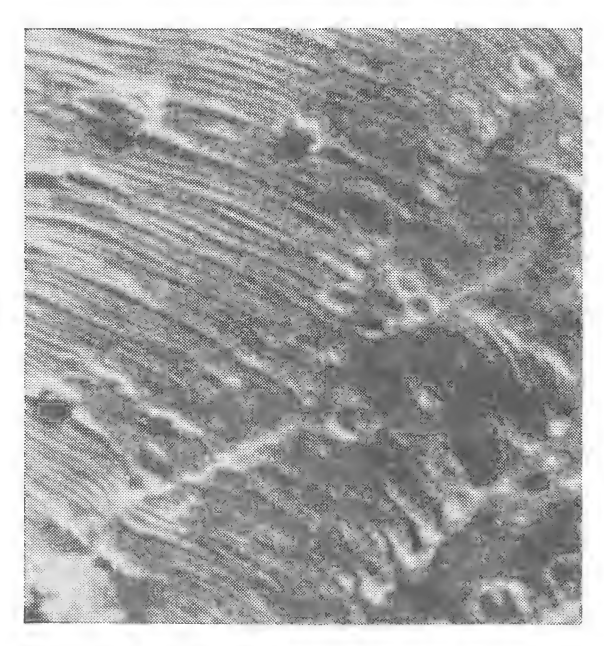


Рис. 1.33. Бороздки усталости в техническом железе (×1500).

существуют также сравнительно бесструктурные гладкие поверхности, иногда декорированные линиями скольжения и изолированными ямками отрыва при разрушении перемычек сдвигом (рис. 1.32). Формирование такого микрорельефа — следствие сильной локализации пластического течения в области действия касательных напряжений приводящего к разделению материала по плоскости скольжения. Эти микрообразования называются плоскостями расслоения или вязким сколом [15], который (в отличие от хрупкого) сопровождается интенсивной пластической деформацией. Распространение трещины путем формирования вязкоскольного микрорельефа осуществляется легче, чем путем ямочного отрыва. Данное микростроение характерно, в частности, для таких участков вязких изломов, как конус после разрушения шейки образца при растяжении или «губы» среза при изгибе.

Бороздчатый микрорельеф. Характерные микростроения усталостных изломов алюминиевых и титановых сплавов, меди, железа, некоторых сталей, а также ряда других металлов — бороздки (рис. 1.33) по мнению многих исследователей образуются вследствие задержки (остановки) усталостной трещины после каждого этапа нагружения тела. Они, как правило, параллельны и располагаются под прямым углом к локальному направлению распространения трещины. Расстояние между ними меняется с изменением амплитуды цикла нагружения, а их количество равно числу этапов нагружения. Бороздки, возникающие при усталостном распространении трещины, могут быть двух типов: пластичные и хрупкие (рис 1.34). Различие между типами бороздок далеко не всегда легко обнаруживается при их рассмотрении только в плане; однако существуют некоторые признаки, позволяющие определить его. Пластичные бороздки обычно группируются параллельными рядами, разделенными глубокими впадинами. Поля хрупких бороздок имеют вид скольных фасеток, покрытых исходящими из некоторых центров линиями типа «речного» узора.

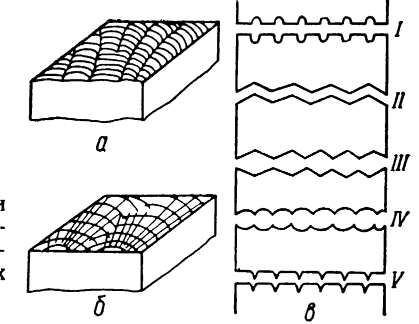


Рис. 1.34. Пластичные (*а*) и хрупкие (*б*) усталостные бороздки, а также разновидности профилей сопряженных бороздчатых усталостных поверхностей (*в*).

Хрупкие бороздки — явление более редкое, чем пластичные. Они наблюдаются в высокопрочных алюминиевых сплавах, а также в сталях. Склонность к образованию таких бороздок усиливается при усталости в коррозионной среде. Они обусловлены разрушением путем отрыва по фасеткам вдоль строго определенных кристаллографических плоскостей спайности, тогда как образование пластичных бороздок необязательно связано с кристаллической структурой материала [15] Хрупкие бороздки наблюдаются, например, и при усталостном разрушении таких материалов, как полимеры.

Механизм образования пластичных бороздок еще недостаточно изучен. Однако уже имеется ряд [17, 18] схематических моделей формирования бороздчатого рельефа при усталости материалов.

Анализ имеющихся данных о микростроении изломов металлов и сплавов показывает, что ни один из описанных микромеханизмов разрушения практически не является абсолютно доминирующим в процессе распространения трещины (разрушения) деформируемого твердого тела. Неоднородность напряжений и деформаций, а также и главным образом структурная гетерогенность приводит к тому, что разрушение происходит путем смешанной реализации нескольких из рассмотренных выше микромеханизмов образования микротрещин, их объединения и распространения. При этом в зависимости от особенностей структуры материала и характера напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле, может проявляться относительное преобладание того или иного микромеханизма разрушения.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ БЕЗДЕФЕКТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Все технические материалы обладают характерным внутренним строением, наличием разного масштаба элементов структуры, взаимодействие которых обусловливает их прочность и жесткость, а также реакцию на внешние воздействия в реальных рабочих условиях (при механических нагрузках, смене температур и сред, влиянии физических полей и т. д.). Для нахождения физико-механического состояния материала как элемента конструкции в заданных условиях эксплуатации создаются адекватные объекты, расчетные схемы и модели. При этом несущественные для рассматриваемого круга проблем свойства и взаимодействия реальных объектов не учитываются, т. е фактически изучается поведение некоторых идеализированных материалов (твердых тел). Наиболее простая физическая модель для определения напряженно-деформированных состояний твердого тела при заданных внешних воздействиях — материальный континуум, т. е. сплошная среда с заданными физико-механическими свойствами*[1]. Основным качеством сплошной среды является то, что всякий сколь угодно малый элемент объема в ней обладает вполне определенными физико-механическими свойствами — конечной плотностью, деформативностью*[2] и прочностью*[3], характерными для макрообъемов реального тела, т. е. каждая точка области, занятой телом, оказывается наделенной материальными физико-механическими свойствами. Если эти свойства во всех точках одинаковы, то тело называется однородным. Однако понятие однородности относительно. На практике с достаточной для расчетов точностью тело принимается однородным, если его размеры велики по сравнению с характерным размером неоднородности его структуры (как, например, размеры бетонных сооружений или металлических изделий велики по сравнению с размерами соответственно гравия или структурных составляющих сплава — зерен). Вследствие свойства непрерывности к сплошной среде при расчете напряженно-деформированных состояний может быть применен математический аппарат анализа бесконечно малых

---

*[1] Здесь реальной дискретной атомистической структурой материала пренебрегают. Считается, что материя непрерывно распределена в заданном объеме.

*[2] Деформативность — способность реального материала изменять свои геометрические размеры—форму и объем—под действием внешних факторов.

*[3] Здесь прочность — максимальное усиление, которое выдерживает реальное тело до разрушения.

В настоящей главе дается краткая сводка общих положений механики деформируемого твердого тела. Более глубокое и подробное освещение различных вопросов механики сплошной среды и теории твердого деформируемого тела приведено в учебных и справочных изданиях [1—12].

2.1. Напряженно-деформированное состояние твердых тел

Напряжения. Рассмотрим континуальную модель твердого тела, т. е. область Ω пространства, заполненную материальным континуумом (рис. 2.1). Пусть к телу (а значит, и к континууму Ω) приложена некоторая система сил: массовых (или объемных) и поверхностных, т. е. таких, которые действуют на элемент поверхности тела. При произвольном разделении рассматриваемого тела воображаемой поверхностью $S_\mathbf{n}$ на части Ω_1 и Ω_2 для сохранения равновесия каждой из этих частей взаимодействие между ними должно быть компенсировано поверхностными силами, распределенными по разделяющей поверхности $S_\mathbf{n}$. На элементарной площадке $\Delta S_\mathbf{n}$ этой поверхности, имеющей вектор единичной нормали $\mathbf{n}$, внешний к области Ω, будут существовать силы воздействия частей тела Ω_2 на Ω_1, равнодействующая которых обозначается через $\Delta \mathbf{P}_\mathbf{n}$. Величина (вектор)

$$\mathbf{P}_\mathbf{n} = \lim_{\Delta S_\mathbf{n} \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}_\mathbf{n}}{\Delta S_\mathbf{n}} \tag{2.1}$$

называется напряжением в точке M на площадке с нормалью $\mathbf{n}$. Проекция вектора $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ на нормаль $\mathbf{n}$ называется нормальным напряжением $\sigma_\mathbf{n}$, а его проекция на плоскость площадки $\Delta S_\mathbf{n}$ — касательным напряжением $\tau_\mathbf{n}$. Вектор напряжения $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ обычно представляется в виде проекций на координатные оси системы координат x, y, z (см. рис. 2.1): $P_{\mathbf{n}x}$, $P_{\mathbf{n}y}$, $P_{\mathbf{n}z}$, где первый индекс указывает ориентацию площадки, а второй — направление координатной оси, на которую спроектирован вектор.

Произвольное проведение операции мысленного расчленения тела некоторой поверхностью и выделения ее элементарной части означает, что воздействие частей тела друг на друга определяет поле внутренних сил — поле напряжений в сплошной среде. Его количественные характеристики изменяются от точки к точке и являются функциями положения точки и ориентации площадки.

Напряжение $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ является результатом действия части Ω_2 тела на часть Ω_1. Согласно третьему закону Ньютона часть Ω_1 воздействует на часть Ω_2 тела с напряжениями, имеющими противоположный знак:

$$-\mathbf{P}_\mathbf{n} = \mathbf{P}_{-\mathbf{n}}. \tag{2.2}$$

В каждой точке сплошной среды вектор напряжения $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ зависит от ориентации элементарной площадки в данной точке, которая задается направлением нормали $\mathbf{n}$ к площадке. Совокупность всех возможных пар векторов $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}$ в точке M определяет напряженное состояние в точке деформируемого континуума. Для полного описания такого состояния в рассматриваемой точке M достаточно указать векторы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках в этой точке.

Для определения напряженного состояния в точке выбираются плоскости, перпендикулярные осям прямоугольной системы координат (рис. 2.2). Каждый из трех векторов напряжения $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}_z$, действующих в точке M по площадкам с нормалями x, y, z, выражается через их декарто-

вые компоненты:

$$\mathbf{P}_x = \sigma_{xx}\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{P}_y = \tau_{yx}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \tau_{yz}\mathbf{k}, \qquad (2.3)$$
$$\mathbf{P}_z = \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k},$$

где **i**, **j**, **k** — единичные векторы вдоль соответствующих направлений координат осей Ox, Oy, Oz (здесь относительно индексов при компонентах напряжений сохраняется прежнее правило, сформулированное для векто-

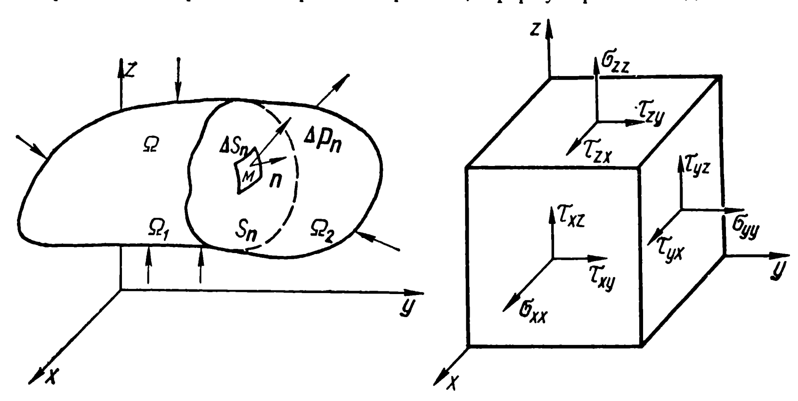


Рис. 2.1. Внешние воздействия и внутренние силы, действующие в деформируемом теле.

Рис. 2.2. Силы, действующие на элемент тела в точке; тензор напряжений.

ра **Pn**, а обозначение самой компоненты через σ или τ указывает на то, что она является соответственно нормальной или касательной к данной площадке).

Растягивающие нормальные компоненты напряжений считаются положительными. Касательные компоненты положительны, если на площадке, внешняя нормаль которой совпадает с положительным направлением одной из осей координат, касательные напряжения действуют вдоль положительных направлений соответствующих осей координат. Все направления, показанные на рис. 2.2, положительны.

Девять скалярных величин σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy} называются компонентами тензора напряжений T_σ, который обычно представляется в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Связь между тензором напряжений T_σ в точке M и вектором напряжения $\mathbf{P}_n$ на произвольно ориентированной площадке с нормалью **n** в этой точке можно установить из условия равновесия сил для бесконечно малого тетраэдра с вершиной в точке M, нормалями к граням которого являются векторы —**i**, —**j**, —**k**, **n**. Из условий равновесия тетраэдра сле-

дует равенство

$$\mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \mathbf{S}_x n_x + \mathbf{S}_y n_y + \mathbf{S}_z n_z, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ — векторы напряжений, действующих по граням тетраэдра с нормалями вдоль осей x, y и z, или в представлении через компоненты тензора напряжений:

$$\begin{cases} P_{\mathbf{n}x} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ P_{\mathbf{n}y} = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\ P_{\mathbf{n}z} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z, \end{cases} \tag{2.6}$$

где n_x, n_y, n_z — компоненты вектора $\mathbf{n}$ в декартовой системе координат

Из условий равновесия того же тетраэдра для касательных напряжений τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy} следует закон парности этих напряжений, который выражается равенствами

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{2.7}$$

Этот закон является непосредственным следствием условия равенства нулю момента всех сил, действующих на элементарный объем тела в точке M.

Нормальное напряжение $\sigma_{\mathbf{n}}$ на наклонной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ определяется как проекция

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_{\mathbf{n}}\mathbf{n} = (\mathbf{S}_x n_x + \mathbf{S}_y n_y + \mathbf{S}_z n_z)(\mathbf{i} n_x + \mathbf{j} n_y + \mathbf{k} n_z) = \sigma_{xx} n_x^2 +$$

$$+ \sigma_{yy} n_y^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z, \tag{2.8}$$

а касательное напряжение на этой площадке выражается равенством

$$\tau_{\mathbf{n}} = \sqrt{P_{\mathbf{n}}^2 - \sigma_{\mathbf{n}}^2}. \tag{2.9}$$

Представление тензора напряжений в виде (2.4) существенно связано с выбором системы координат. Однако поскольку тензор напряжений дает количественную характеристику объективного физического состояния в заданной точке материального тела, то значения компонент тензора напряжений в различных системах координат взаимосвязаны. Так, при переходе от системы координат x, y, z к системе ξ, η, ζ компоненты тензора напряжений записываются как

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{xx} l_{\xi x}^2 + \sigma_{yy} l_{\xi y}^2 + \sigma_{zz} l_{\xi z}^2 + 2\tau_{xy} l_{\xi x} l_{\xi y} + 2\tau_{xz} l_{\xi x} l_{\xi z} + \\ &+ 2\tau_{yz} l_{\xi y} l_{\xi z}, \\ \tau_{\eta\zeta} &= \sigma_{xx} l_{\eta x} l_{\zeta x} + \sigma_{yy} l_{\eta y} l_{\zeta y} + \sigma_{zz} l_{\eta z} l_{\zeta z} + \tau_{xy} (l_{\eta x} l_{\zeta y} + \\ &+ l_{\eta y} l_{\zeta x}) + \tau_{xz} (l_{\eta x} l_{\zeta z} + l_{\eta z} l_{\zeta x}) + \tau_{yz} (l_{\eta y} l_{\zeta z} + l_{\eta z} l_{\zeta y}), \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

где $l_{\xi x} = \cos(\xi, x)$, $l_{\xi y} = \cos(\xi, y), \ldots, l_{\zeta z} = \cos(\zeta, z)$. Неприведенные здесь соотношения для нормальных и касательных компонент тензора напряжений в новой системе координат получаются из выписанных циклической перестановкой индексов ξ, η, ζ в выражениях для $l_{\alpha\beta}$.

Среди всего многообразия площадок, проходящих через точку, существуют такие, на которых касательных напряжений нет. Данные площадки и соответствующие направления нормалей к ним, а также и сами

напряжения называются главными. Они (а значит, и направления) взаимно перпендикулярны. При совмещении осей системы координат в точке континуума с главными направлениями напряженного состояния в ней (эти оси называются главными) представление тензора напряжений (2.4) упрощается:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где компоненты σ_1, σ_2, σ_3 в главных осях 1, 2, 3 обозначены как главные компоненты напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, причем упорядочены таким образом, что $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$.

Главные напряжения обладают свойствами экстремальности: они включают максимальное и минимальное значения в данной точке компонент нормального напряжения.

В рассматриваемой точке тела они являются корнями уравнения

$$\Lambda^3 - I_{1\sigma}\Lambda^2 + I_{2\sigma}\Lambda - I_{3\sigma} = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \\ I_{2\sigma} &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2; \\ I_{3\sigma} &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Из формул (2.6), (2.8), (2.9) вытекает, что на площадках, наклоненных под углом 45° к главным площадкам и проходящих через главные оси рассматриваемой точки тела, касательные напряжения достигают экстремальных значений. Они называются главными касательными напряжениями и определяются равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \\ \tau_{12} &= (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \\ \tau_{23} &= (\sigma_2 - \sigma_3)/2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Максимальное касательное напряжение выражается как

$$\tau_{max} = \tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \tag{2.15}$$

Поскольку напряженное состояние в точке есть объективное физическое состояние, то на его экстремальные характеристики выбор системы координат не влияет. Таким образом, главные напряжения в рассматриваемой точке тела инвариантны (т. е. их значения независимы) относительно выбора системы координат. Это значит, что коэффициенты уравнения (2.12), определяемые формулами (2.13), не зависят от выбора системы координат и являются инвариантами напряженного состояния в точке. В терминах главных напряжений инварианты напряженного состояния наряду с экспликациями (2.13) имеют также следующее эквивалентное представление:

$$\left.\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_{2\sigma} &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3; \\ I_{3\sigma} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.13a}$$

Величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (2.16)$$

называется средним или гидростатическим напряжением в точке и определяет напряженное состояние равномерного всестороннего растяжения (сжатия).

Для ряда приложений тензор напряжения (2.4) удобно представлять в виде суммы

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{pmatrix}, \qquad (2.17)$$

где шаровой тензор напряжений T_σ^0 и девиатор напряжений D_σ характеризуют соответственно среднее давление и касательные напряжения в точке.

Для инвариантов девиатора напряжений справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} I_{1\sigma D} &= 0; \\ I_{2\sigma D} &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]; \\ I_{3\sigma D} &= (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0). \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Величина

$$\tau_i = \sqrt{I_{2\sigma D}} \qquad (2.19)$$

называется интенсивностью касательных напряжений.

При нагружении твердого тела компоненты напряжения в различных его точках в общем случае различны, однако в каждой точке тела они должны удовлетворять условиям равновесия произвольно выбранного его элемента. Эти условия состоят из равенства нулю главных (результирующих) вектора и момента всех сил, действующих на рассматриваемый объем. Второе из названных условий приводит к закону парности касательных напряжений (2.7).

Из условия равновесия всех сил, действующих на произвольно выбранный элемент тела, включая и объемные силы **F**, имеющие компоненты F_x, F_y, F_z, получаются известные (см., например, [1]) дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0; \\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0; \\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Для движущегося тела объемные силы должны включать также инерционную составляющую вида $\rho\ddot{\mathbf{u}}$, где ρ — плотность тела в данной точке, а $\ddot{\mathbf{u}}(\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_z)$ — вектор ускорения точки тела.

Деформации. Под действием внешних факторов точки твердого тела могут менять свое взаимное расположение, что приводит к изменению формы и размеров тела, т. е. деформации. Деформация тела вполне определяется относительным перемещением двух его точек. Положение каждой точки твердого тела, которое в недеформированном состоянии в момент времени $t = 0$ занимает область Ω пространства, определяется в некоторой системе координат ее радиусом-вектором $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Под воздействием внешних факторов в какой-то момент времени тело займет в пространстве область Ω^*. Точка M области Ω при этом переместится в точку M^* области Ω^*. В той же системе координат x, y, z положение точки M^* определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}^* = x^*\mathbf{i} + y^*\mathbf{j} + z^*\mathbf{k}$. Соответствие между точками M и M^* определяется соотношениями

$$\begin{cases} x^* = x^*(x, y, z, t), \\ y^* = y^*(x, y, z, t), \\ z^* = z^*(x, y, z, t), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(x^*, y^*, z^*, t), \\ y = y(x^*, y^*, z^*, t), \\ z = z(x^*, y^*, z^*, t). \end{cases} \qquad (2.21)$$

Смещение точки тела при деформировании изображается вектором вызванного деформацией перемещения точки $\mathbf{u} = \mathbf{R}^* - \mathbf{R}_0$, или в записи через компоненты векторов в декартовой системе координат

$$\begin{cases} u_x = x^* - x_0, \\ y_y = y^* - y_0, \\ u_z = z^* - z_0. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Задание вектора $\mathbf{u}$ как функции начальных координат точек вполне определяет деформацию тела.

В окрестности произвольной точки тела удлинение любого линейного элемента длиной $s = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, соединяющего до деформации точки $M(x, y, z)$ и $N(x + dx, y + dy, z + dz)$, описывается посредством шести величин

$$ds = s(M, N) - s^*(M^*, N^*) = \varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + $$
$$+ \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz. \qquad (2.23)$$

Величины ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} представляют собой относительные удлинения прямолинейных элементов dx, dy, dz, до деформации расположенных вдоль координатных осей, а величины ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz} — угловые деформации или сдвиги—изменения в результате деформации прямого угла между указанными элементами dx, dy, dz, где

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_x/\partial x; \quad \varepsilon_{yy} = \partial u_y/\partial y; \quad \varepsilon_{zz} = \partial u_z/\partial z; \qquad (2.24)$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right). \qquad (2.25)$$

Величины ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}, определяемые равенствами (2.23) — (2.25), образуют тензор T_ε малых деформаций в точке деформи-

руемого твердого тела:

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix}. \qquad (2.26)$$

Он вполне характеризует линейные и угловые деформации для всевозможных направлений элементарных отрезков, проходящих через рассматриваемую точку, т. е. деформированное состояние в точке.

Свойства тензора деформаций T_ε аналогичны таковым тензора напряжений T_σ, а именно: 1) при переходе к другой системе координат его компоненты преобразуются по тем же формулам (2.10), что и компоненты напряжений (с заменой соответствующих символов напряжений на символы деформаций); 2) тензор деформации имеет главные оси и направления, а также соответствующие инварианты.

В физическом отношении главные направления деформаций в точке — это три таких взаимно перпендикулярных направления, углы между которыми в результате деформации не меняются. Линейные деформации по главным направлениям называются главными деформациями или главными относительными удлинениями. Они обозначаются через ε_1, ε_2, ε_3, причем принимается, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

В главных осях тензор деформации имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.27)$$

Главные удлинения — это корни кубического уравнения вида (2.12), коэффициентами которого служат инварианты тензора деформаций

$$\left.\begin{aligned} I_{1\varepsilon} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_{2\varepsilon} &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)/4 = \\ &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3; \\ I_{3\varepsilon} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Величины

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad (2.29)$$

называются главными сдвигами, а наибольший сдвиг — максимальным $\varepsilon_{max} = \varepsilon_{13}$.

Относительное изменение объема в данной точке тела (дилатация) определяется формулой

$$\varepsilon_0' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{2.30}$$

Как и в случае напряжений, тензор деформации можно представить в виде суммы

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_0 \end{Bmatrix}, \tag{2.31}$$

где шаровой тензор T_ε^0 характеризует изменение объема ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0'/3$), а девиатор деформации D_ε — формы элемента среды, обусловливаемое сдвигами.

Инварианты девиатора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_{1\varepsilon D} &= 0, \\ I_{2\varepsilon D} &= [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]/\sigma, \\ I_{3\varepsilon D} &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)(\varepsilon_3 - \varepsilon_0). \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Величина

$$\Gamma = 2\sqrt{I_{2\varepsilon D}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)} \tag{2.33}$$

называется интенсивностью деформации сдвига, а величина $I_\varepsilon = \Gamma/\sqrt{3}$ — интенсивностью деформаций.

В общем случае деформации тела зависят от координат точек среды и времени. Это значит, что различные элементы тела деформируются поразному. Если бы деформации частиц тела происходили независимо, то после деформации элементы тела могли бы оказаться не прилегающими друг к другу, а перекрывающими друг друга или отделенными один от другого, т. е. среда перестала бы быть сплошной. Поэтому компоненты тензора деформации не могут быть произвольными, а должны удовлетворять определенным условиям, которые обеспечивали бы сохранение сплошности среды. Такими являются условия совместимости (или сплошности), установленные Сен-Венаном:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}, \ldots \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right), \ldots \end{aligned} \tag{2.34}$$

Полная система этих уравнений состоит из шести. Недостающие здесь уравнения получаются из приведенных круговой перестановкой символов x, y, z.

2.2. Уравнения состояния тела. Реологические модели

Изложенные выше представления относятся к описанию статики (и, посредством введения инерционных членов, динамики), а также кинематики континуума. По существу, в рубрике «Напряжения» рассматривается равновесие сплошной среды и соответствующие статические соотношения, а в рубрике «Деформация» представлен подход к описанию геометрии континуума и соответствующие геометрические соотношения. Все эти соотношения не зависят от конкретных физико-механических свойств самого тела и в равной мере относятся к телам любой природы. Для анализа реакции тела, имеющего конкретные свойства, на действие внешних факторов — сил, температуры и т. д.— их недостаточно. Для построения замкнутой теории, способной описать состояние и эволюцию твердого тела, подвергнутого внешним воздействиям, необходимо задать связь между статическим и кинематическим состоянием тела. Такие физические соотношения, учитывающие реальные физико-механические свойства тел, называются физическими законами состояния, а установление законов состояния среды при учете термодинамических параметров и влияния истории деформирования составляет предмет реологии.

Физико-механические свойства твердых тел весьма многообразны и сложны. Формулировка какой-либо общей модели твердого деформируемого тела, приемлемой для всех материалов при любых условиях, а тем более решение на ее основе конкретных задач о деформировании тел — моделей реальных изделий — вряд ли осуществимо и целесообразно. Предпочтительным оказывается развитие частных моделей сред и соответствующих теорий, хорошо описывающих поведение определенных классов материалов при заданных условиях.

В основе реологических моделей, как правило, лежит существенное феноменологическое допущение, заключающееся в том, что реакция элементарного объема тела, в качестве которой принимаются его деформации ε_{xx}, $\varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{yz}$, на внешние факторы — напряжения σ_{xx}, $\sigma_{yy}, \dots, \tau_{yz}$ вполне определяется напряжением, температурой T и их эволюцией во времени t. При этом приросты результирующих величин $\{\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{yz}\}$ контролируются приростом указанных факторов, т. е. считается, что

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon_{xx} &= A_{xx}^{(x)}\, d\sigma_{xx} + \dots + A_{xz}^{(yz)} d\tau_{yz} + B_{xx} dT + C_{xx} dt, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
d\varepsilon_{yz} &= A_{yz}^{(x)}\, d\sigma_{xx} + \dots + A_{yz}^{(yz)} d\tau_{yz} + B_{yz} dT + C_{yz} dt,
\end{aligned}
\qquad (2.35)
$$

где $A_{xx}^{(x)}, \dots, B_{xx}, \dots, C_{xx}, \dots$ — величины, зависящие от $\varepsilon_{xx}(x, y, z, t), \dots$, $\dots, \sigma_{xx}(x, y, z, t), \dots, T(x, y, z, t)$ и «истории» изменения последних в течение времени от $t = 0$ до $t = t$. В силу последнего обстоятельства величины $A_{xx}^{(x)}, \dots, B_{xx}, \dots, C_{xx}, \dots$ становятся не функциями от перечисленных аргументов, а функционалами.

Известные в механике твердых деформируемых тел основные реологические модели, применяемые для решения конкретных практических проблем о напряженно-деформированном состоянии и прочности конструк-

ций, относятся к системам с близкодействием, т. е. к таким, для которых уравнения (2.35) для каждого элементарного объема не зависят от состояния любого другого элементарного объема. Кроме того, эти модели — безградиентны, т. е. уравнения (2.35) не зависят от производных основных характеристик рассматриваемого элемента по пространственным координатам точки.

К основным реологическим моделям механики твердого деформируемого тела относятся следующие модели упругого (термоупругого), упругопластического, вязкого и вязкоупругого тел и некоторые их модификации.

Упругое тело. В упругих телах реакции системы (т. е. взаимосвязи между величинами $\varepsilon_{xx}, \ldots, \varepsilon_{yz}, \sigma_{xx}, \ldots, \tau_{yz}$) при внешнем воздействии мгновенны и обратимы. Это означает, что уравнения состояния не зависят от времени, а форма, размеры (и вообще состояние) тела восстанавливаются полностью после снятия внешних воздействий. Математически это значит, что в уравнениях (2.35) отличны от нуля только параметры $A_{xx}^{(x)}, \ldots, A_{yz}^{(yz)}$, которые являются обычными функциями от компонент тензора напряжений, причем удовлетворяющими условию существования полного дифференциала. В таком случае уравнения (2.35) превращаются в

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{yz} + b_1 T, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.36) \\ \varepsilon_{yz} &= a_{61}\sigma_{xx} + a_{62}\sigma_{yy} + a_{63}\sigma_{zz} + a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{yz} + b_6 T, \end{aligned}$$

где a_{ij} — функции напряжений $\sigma_{xx}, \ldots, \tau_{yz}$.

Соотношения (2.36) — уравнения состояния нелинейно упругого твердого тела. При достаточно малых напряжениях и деформациях поведение упругого тела хорошо описывается линейными соотношениями между напряжениями и деформациями. В этом случае величины $\{a_{ij}\}$ в выражении (2.36) — константы.

Соотношения (2.36) представляют собой запись обобщенного закона Гука для анизотропного тела, т. е. такого, в котором свойства в данной точке зависят от выбранного направления (тело обладает разными упругими свойствами по разным направлениям). В общем случае в соотношении (2.36) имеется не более 21 коэффициента.

Для практически наиболее распространенного случая изотропного тела, в котором упругие свойства одинаковы по всем направлениям, уравнения состояния (2.36) содержат лишь две независимые постоянные (модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ) и принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right], \\ \varepsilon_{xy} &= \tau_{xy}/G, \\ \varepsilon_{xz} &= \tau_{xz}/G, \\ \varepsilon_{yz} &= \tau_{yz}/G, \end{aligned}\right\} \qquad (2.37)$$

где модуль сдвига $G = E/2\,(1 + \mu)$.

Разрешив уравнения (2.37) относительно компонент напряжений, получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_0'\right);\\
\sigma_{yy} &= 2G\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_0'\right);\\
\sigma_{zz} &= 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_0'\right);\\
\tau_{xy} &= G\varepsilon_{xy};\\
\tau_{xz} &= G\varepsilon_{xz};\\
\tau_{yz} &= G\varepsilon_{yz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

Эти уравнения выражают основной закон упругости — обобщенный (на случай неодноосного напряженного состояния) закон Гука. Для одноосного растяжения вдоль оси x справедливы равенства

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E, \quad \varepsilon_{yy} = -\mu\varepsilon_{xx}, \qquad (2.39)$$

которые служат основой для определения констант E и μ.

Для описания термоупругого тела, в котором деформации могут возникать вследствие нагрева, в первые три из соотношений (2.37) включается слагаемое

$$\varepsilon_{\text{т}} = \alpha T, \qquad (2.40)$$

которое описывает температурное расширение материала.

При нагружении упругого тела внешние силы совершают работу, аккумулирующуюся в теле в виде потенциальной энергии деформации, которую тело при нагрузке возвращает без потерь. Потенциальная энергия деформации, накапливаемая в элементарном объеме тела $dV = dxdydz$, определяется выражением

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz})\, dV. \qquad (2.41)$$

Величина

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz}) \qquad (2.42)$$

называется удельной потенциальной энергией упругой деформации или плотностью энергии деформации. С помощью закона Гука она может быть представлена через компоненты только напряжений или только деформаций. Удельная потенциальная энергия деформации иногда делится на две составляющие: удельную потенциальную энергию изменения объема

$$U_0 = \frac{1-2\mu}{2E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 \qquad (2.43)$$

и удельную потенциальную энергию изменения формы

$$U_{\text{ф}} = \frac{1-2\mu}{6E}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)], \qquad (2.44)$$

т. е. $U = U_0 + U_ф$. Формула (2.44) с точностью до множителя совпадает со вторым инвариантом девиатора напряжений записываемых выражениями (2.18), и с квадратом интенсивности касательных напряжений, определяемых формулой (2.19).

Полная потенциальная энергия W упругого тела, занимающего область Ω пространства, определяется объемным интегралом по этой области

$$W = \int_\Omega U d\Omega \qquad (2.45)$$

и равна половине работы всех внешних сил, действующих на тело.

Линейно-упругое тело. Задание закона состояния линейно-упругого тела приводит к замкнутой системе уравнений для определения возникающего в теле напряженно-деформированного состояния — к уравнениям линейной теории упругости.

Основные уравнения теории упругости задаются тремя группами соотношений:

1) уравнения статики — уравнения равновесия элемента тела (2.20);

2) уравнения, определяющие тензор деформации T_ε через вектор перемещения $\mathbf{u}$,— уравнения (2.23);

3) уравнения состояния тела — уравнения обобщенного закона Гука (2.37).

Пятнадцать уравнений трех групп содержат такое же число неизвестных: двенадцать компонентов тензоров T_σ и T_ε и три компонента вектора $\mathbf{u}$. Эта система дифференциальных уравнений описывает состояние тела в его объеме V. Оно определяется воздействиями на тело извне, воспринимаемыми его поверхностью S. Задача теории упругости заключается в нахождении напряженно-деформированного состояния тела по заданным условиям на его поверхности, которые называются граничными (краевыми условиями). Они состоят в задании внешних поверхностных сил или в перемещении точек поверхности.

Граничные условия называются статическими, если на ограничивающей тело объемом V поверхности S заданы компоненты поверхностных усилий $\mathbf{P}_n$ (P_x, P_y, P_z). В этом случае условия на поверхности принимают вид (2.6).

Второй тип граничных условий — кинематические граничные условия, которые соответствуют заданию на поверхности S тела компонентов вектора перемещений u_x, u_y и u_z.

Третий тип условий, называемых смешанными, соответствует заданию на одной части поверхности S поверхностных усилий, а на другой—перемещений. На поверхности тела могут быть также заданы некоторые компоненты напряжений и перемещений.

В зависимости от особенностей (т. е. заданных граничных условий) каждая конкретная задача теории упругости может рассматриваться только в перемещениях или только в напряжениях. Для первого случая основные уравнения в перемещениях получаются из полной системы уравнений (2.20), (2.23) и (2.37) при исключении из нее напряжений и деформаций посредством подстановки кинематических соотношений (2.23) в предварительно разрешенные относительно напряжений физические соотношения (2.37), а полученный при этом результат — в уравнения равновесия (2.20).

Уравнения теории упругости в напряжениях получаются, если к уравнениям равновесия (2.20) добавить соотношения, вытекающие из рассмотрения условий совместности деформаций (2.34) и закона Гука (2.37),— так называемые уравнения Бельтрами — Мичела:

$$\Delta\sigma_{xx} + \frac{3}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x^2} = -2\,\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right),$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{3}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x}\right). \qquad (2.46)$$

Не приведенные здесь четыре соотношения образуются из выписанных круговой перестановкой символов x, y, z.

Важный и достаточно самостоятельный класс теории упругости представляет плоская задача теории упругости [1], включающая задачи о плоских деформации и напряженном состоянии.

Плоская деформация происходит в данном прямом цилиндре с осью z при условии, что составляющая смещения $u_z = 0$, а внешние нагрузки параллельны плоскости xy и не зависят от z.

В этом случае

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy});$$
$$\varepsilon_{xx} = [(1-\mu^2)\sigma_{xx} - \mu(1+\mu)\sigma_{yy}]/E; \qquad (2.47)$$
$$\varepsilon_{yy} = [(1-\mu^2)\sigma_{yy} - \mu(1+\mu)\sigma_{xx}]/E; \quad \varepsilon_{xy} = 2(1+\mu)\tau_{xy}/E.$$

Плоское напряженное (точнее, обобщенное плоское напряженное) состояние реализуется в тонких пластинах со свободными от внешних воздействий основаниями, которые деформируются нагрузками, симметричными относительно срединной плоскости и параллельными ей.

Следовательно, при расположении осей x и y системы координат в срединной плоскости на основаниях $z = \pm h/2$ получается, что $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. В таком случае вместо основных неизвестных задачи теории упругости $u_x(x, y, z)$ и $u_y(x, y, z)$ рассматриваются их усредненные по толщине характеристики $u_x^c(x, y)$, $u_y^c(x, y)$, определяемые равенствами вида $u_x^c = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u(x, y, z)\,dz$ и т. д., которые и становятся основными переменными плоской задачи теории упругости при плоском напряженном состоянии. Таким образом, в тонкой пластине малой толщины h напряженное состояние (приближенно) описывается тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^c & \tau_{xy}^c \\ \tau_{xy}^c & \sigma_{yy}^c \end{pmatrix} \qquad (2.48)$$

$$(\sigma_{zz} \approx 0),$$

а деформированное — тензором

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^c & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^c & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^c & \varepsilon_{yy}^c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^c \end{pmatrix} \qquad (2.49)$$

$$\left(\varepsilon_{zz}^c = \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{xx}^c + \varepsilon_{yy}^c)\right)$$

и вектором перемещений (u_x, u_y).

Для плоской задачи теории упругости уравнения равновесия сводятся к двум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Соотношения закона Гука принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E'}(\sigma_{xx} - \mu'\sigma_{yy}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E'}(\sigma_{yy} - \mu'\sigma_{xx}); \\ \varepsilon_{xy} &= 2(1 + \mu')\tau_{xy}/E'. \end{aligned} \quad (2.51)$$

При этом в случае обобщенного напряженного состояния в уравнения (2.50) и (2.51) включаются не сами напряжения, а их усредненные характеристики. Кроме того, константы E и μ входят в эти уравнения как E' и μ', где $E' = E/(1 - \mu^2)$, $\mu' = \mu/(1 - \mu)$ для плоской деформации и $E = E'$, $\mu' = \mu$ для обобщенного плоского напряженного состояния.

Упругопластическое тело. Обобщенный закон Гука справедлив для линейно-упругих тел, в которых деформации полностью исчезают при разгрузке. Реальные тела подчиняются закону линейной упругости лишь при не слишком высоких напряжениях и деформациях. Начиная с некоторого уровня деформаций, твердые тела полностью не восстанавливают своей первоначальной формы после разгрузки. Способность материала частично или полностью сохранять деформацию после снятия нагрузок, ее вызвавших, называется пластичностью. Сохраняемая деформация называется остаточной, или пластической. Условия, которым должны удовлетворять напряжения в рассматриваемой точке тела, чтобы в ней появились пластические деформации, называются условиями пластичности или текучести.

При простом растяжении тела вдоль оси x, когда $\sigma_{xx} = \sigma = \text{const}$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ условие пластичности имеет вид

$$\sigma = \sigma_т. \quad (2.52)$$

Практически для технических целей за предел текучести принимается такое значение напряжения, которое дает 0,2 % остаточной деформации. Его обозначают через $\sigma_{0,2}$.

Пределу текучести $\sigma_т$ на типичной диаграмме растяжения в координатах $\sigma - \varepsilon$ (рис. 2.3) соответствует точка A, разделяющая упругую и пластическую области деформирования. В первой из них наблюдается взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформациями: как при нагружении, так и при разгрузке точка, изображающая напряженно-деформированное состояние элемента тела, движется вдоль одной и той же прямой OA.

Если в процессе нагружения тела (по линии OAB) достигается напряженно-деформированное состояние, характеризующееся точкой B (пластическая область), а затем начинается разгрузка тела, то точки B_i, соответствующие состоянию тела в процессе разгрузки, уже будут двигаться по пути BC, параллельному линейной (упругой) части диаграммы. В точке

C, где $\sigma = 0$, обнаруживается остаточная (пластическая) деформация $\varepsilon_п$ Точке B соответствует полная деформация

$$\varepsilon = \varepsilon_у + \varepsilon_п. \tag{2.53}$$

Если напряженное состояние в теле соответствует чистому сдвигу т. е. когда $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, то картина зависимости τ и ε_{xy} аналогична. При этом условие пластичности имеет вид

$$\tau = \tau_т. \tag{2.54}$$

В теории деформирования упругопластического тела истинные диаграммы растяжения, типа показанных на рис. 2.3, обычно схематизирують-

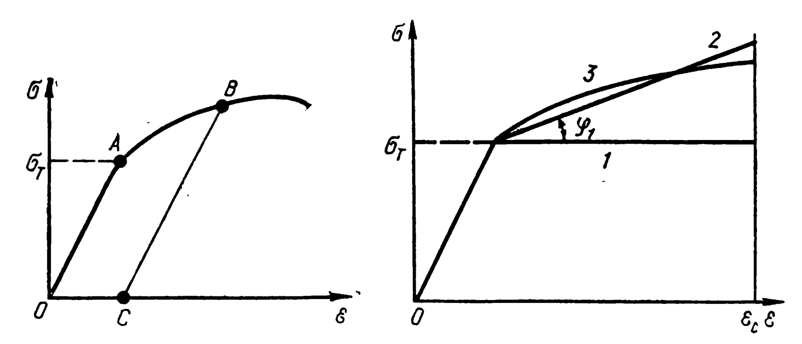


Рис. 2.3. Диаграмма упругопластического деформирования при простом растяжении.

Рис. 2.4. Идеализированные диаграммы упругопластического деформирования:

1 — идеальное упругопластическое тело (тело без упрочнения); *2* — упругопластическое тело с линейным упрочнением; *3* — тело со степенным упрочнением, $\sigma \sim \varepsilon^n$.

ся так, чтобы их можно было достаточно просто описать математически. Такие схематизированные диаграммы представлены на рис. 2.4, где ε_C соответствует значению деформации разрушения. Здесь диаграмма *1*, содержащая горизонтальный прямолинейный участок, описывает идеальное упруго пластическое тело (или просто идеально-пластическое тело, т. е. тело, материал которого не имеет упрочнения). Диаграмма *2* соответствует упругопластическому телу с линейным упрочнением, характеризуемым модулем упрочнения $E_1 = \operatorname{tg}\varphi$, *3* — телу со степенным упрочнением, которое определяется показателем степени упрочнения $n : \sigma \sim \varepsilon^n$.

В упругой области уравнения состояния упругопластических и линейно-упругих тел совпадают (они справедливы вплоть до выполнения условий пластичности). Поскольку условие пластичности при сложном напряженном состоянии определяет некоторое физическое состояние элемента тела, не зависящее от выбора системы координат, в которой тело рассматривается, оно должно быть связано не с самим тензором напряжений, а с его инвариантами. Если учесть эмпирическую закономерность, согласно которой изменение объема тела всегда упруго, то можно заключить, что условие текучести зависит лишь от инвариантов девиатора напряжений и в самом общем виде представляется соотношением

$$f(I_{2\sigma D}, I_{3\sigma D}) = C_*, \tag{2.55}$$

где f — некоторая функция; C_* — константа, которую определяют лишь разности главных напряжений.

Из многих известных условий пластичности твердых деформируемых тел выделяются два приемлемо простых математически и, в то же время, достаточно точных — условия текучести Треска и Мизеса.

Условие текучести Треска (теория максимального касательного напряжения) заключается в том, что пластическое поведение наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает заданного значения $\tau_т$. С учетом выражений (2.14) и (2.15) условие текучести Треска записывается в виде

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_т \qquad (2.56)$$

При простом растяжении $\sigma_1 = \sigma_т$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ с учетом соответствующего условия текучести (2.56)

$$\sigma_т = 2\tau_т. \qquad (2.57)$$

Для чистого сдвига выражения подобны:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau. \qquad (2.58)$$

С учетом этого условие текучести Треска записывается в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т, \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_т. \qquad (2.59)$$

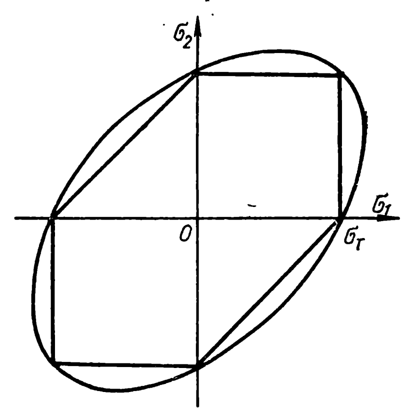


Рис. 2.5. Условия текучести Мизеса (эллипс) и Треска (шестиугольник) в пространстве главных напряжений σ_1 и σ_2.

Тела, удовлетворяющие условию текучести Треска, называются иногда телами Треска.

Условие текучести Мизеса (теория энергии формоизменения, теория интенсивности касательных напряжений) имеет вид

$$I_{2\sigma D} = \sigma_т^2/3 \text{ или } (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_т^2, \qquad (2.60)$$

откуда соответственно

$$\tau_i = \sigma_т/\sqrt{3} \text{ или } \tau_i = \tau_т. \qquad (2.61)$$

Тела, удовлетворяющие условию текучести Мизеса, называются телами Мизеса и для них $\sigma_т = \sqrt{3}\,\tau_т$.

Условия текучести Треска и Мизеса близки. Это хорошо видно при $\sigma_z = 0$. В плоскости напряжений σ_x, σ_y условие Треска представляет собой шестиугольник (рис. 2.5), а условие Мизеса — описанный вокруг него эллипс.

Уравнения упругопластического деформирования. По достижении условия текучести уравнения состояния упругого тела уже не дают достаточно точного описания поведения материала и их следует заменить уравнениями упругопластического деформирования. Эта модель должна учитывать не только неоднозначность связи между напряжениями и деформациями, но и зависимость упругопластического напряженно-деформированного состояния от «истории» деформирования. Поэтому для модели упругопластического тела уравнения состояния

должны быть заданы в приращениях, т. е. в виде зависимостей (2.35) при $C_{(\cdot)} = 0$. Эти зависимости должны быть неинтегрируемыми, т. е. на каждом шаге деформирования изменения реакции системы должны определяться не только приращениями внешних факторов $d\sigma_{xx}, \ldots, d\tau_{yz}, dT$, но и состоянием элемента, достигнутым на предыдущем шаге.

Таким образом, в общем случае реологическая модель упругопластического тела задается определяющими уравнениями следующего вида:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{xx} = A_{xx}^{(xx)}(\sigma_{xx}, \ldots, \tau_{zy})\, d\sigma_{xx} + \ldots + A_{xx}^{(yz)}(\sigma_{xx}, \ldots, \tau_{yz}) + B_{xx} dT, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\varepsilon_{yz} = A_{yz}^{(xx)}(\sigma_{xx}, \ldots, \tau_{zy})\, d\sigma_{xx} + \ldots + A_{yz}^{(yz)}(\sigma_{xx}, \ldots, \tau_{yz}) + B_{yz} dT, \end{cases} \tag{2.62}$$

причем соотношения, входящие в выражения (2.62), не являются полными дифференциалами.

Теории упругопластического деформирования, в которых уравнения состояния задаются в приращениях, называются теориями пластического течения или теориями в приращениях. Простейший вариант теории пластического течения для изотропного упругопластического тела без упрочнения представляет собой уравнения пластичности Прандтля — Рейса. Определяющие уравнения этой теории при отсутствии упрочнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= d\varepsilon_{xx}^{\text{у}} + d\Lambda(\sigma_{xx} - \sigma_0), & d\varepsilon_{xy} &= d\varepsilon_{xy}^{\text{у}} + d\Lambda\tau_{xy}, \\ d\varepsilon_{yy} &= d\varepsilon_{yy}^{\text{у}} + d\Lambda(\sigma_{yy} - \sigma_0), & d\varepsilon_{xz} &= d\varepsilon_{xz}^{\text{у}} + d\Lambda\tau_{xz}, \\ d\varepsilon_{zz} &= d\varepsilon_{zz}^{\text{у}} + d\Lambda(\sigma_{zz} - \sigma_0), & d\varepsilon_{yz} &= d\varepsilon_{yz}^{\text{у}} + d\Lambda\tau_{yz}, \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

где $d\varepsilon_{xx}^{\text{у}}, \ldots, d\varepsilon_{yz}^{\text{у}}$ — приращения упругих деформаций, определяемые по приращениям напряжений $d\sigma_{xx}, \ldots, d\tau_{yz}$ соотношениями закона Гука (2.37); $d\Lambda = H(d\varepsilon_{x}^{\text{п}}, \ldots, d\varepsilon_{yz}^{\text{п}})/2\tau_{\text{т}}$; σ_0 — см. формулу (2.16); H — интенсивность приращения пластических деформаций сдвига, определяемая соотношением вида (2.33) после замены в нем компонент деформации на компоненты приращения пластических деформаций.

Основные уравнения теории пластического течения при наличии упрочнения имеют тот же вид, только

$$d\Lambda = \begin{cases} 0 & (d\tau_i \leqslant 0), \\ \Phi(\tau_i)\, d\tau_i & (d\tau_i > 0), \end{cases} \tag{2.64}$$

где $d\tau_i$ — интенсивность приращений напряжений, определяемая по формуле

$$d\tau_i = \sqrt{[(d\sigma_{xx} - d\sigma_{yy})^2 + (d\sigma_{xx} - d\sigma_{zz})^2 + (d\sigma_{yy} - d\sigma_{zz})^2 + 6(d\tau_{xy}^2 + d\tau_{xz}^2 + d\tau_{yz}^2)]/6}; \tag{2.65}$$

$\Phi(\tau_i)$ — некоторая характерная для данного материала функция упрочнения.

Теории пластического течения весьма сложны в математическом отношении. Как более простой вариант теории упругопластического деформирования (однако менее точный и не учитывающий ряда важных эффектов пластичности) часто используется при решении конкретных задач так называемая деформационная теория пластичности. В этом случае соотношения между напряжениями и деформациями записываются как некоторая нелинейная и неоднозначная функциональная зависимость между напряжениями и деформациями. Определяющие соотношения деформационной теории пластичности имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = K\sigma_0 + g(\sigma_{xx} - \sigma_0), & \varepsilon_{xy} = g(\tau_i)\,\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} = K\sigma_0 + g(\sigma_{yy} - \sigma_0), & \varepsilon_{xz} = g(\tau_i)\,\tau_{xz}, \\ \varepsilon_{zz} = K\sigma_0 + g(\sigma_{zz} - \sigma_0), & \varepsilon_{yz} = g(\tau_i)\,\tau_{yz}, \end{cases} \tag{2.66}$$

где при разгрузке $g = (1+\mu)/E$, а при нагрузке

$$g = g(I_{2\sigma}, I_{3\sigma}, I_{2\varepsilon}, I_{3\varepsilon}). \tag{2.67}$$

При отсутствии упрочнения $\tau_i = \tau_т$ и $g = \Gamma/2\tau_т$. Для упрочняющегося тела применяется нелинейное условие упрочнения вида $g = \frac{1}{2}\bar{g}(\tau_i)$, причем для установления последней зависимости используется так называемая гипотеза «единой кривой», согласно которой на вид зависимости τ_i от Γ в координатах (Γ, τ_i) не влияет характер напряженного состояния, так что ее можно построить, например, на основании данных опытов по простому растяжению; при этом $\bar{g}(\tau_i) = \Gamma(\tau_i)/\tau_i$.

В области разгрузки уравнения состояния деформационной теории совпадают с соотношениями закона Гука.

Постановка краевых задач теории пластичности отличается от таковой теории упругости лишь определяющими соотношениями, а для теории в приращениях еще и тем, что основными неизвестными задачи становятся не сами напряжения, деформации и т. д., а их приращения. В последнем случае решение задачи сводится к решению последовательности задач для приращений и их суммированию.

Вязкоупругие тела. Описанные выше модели тел охватывают те реальные случаи, когда влияние времени в процессе пренебрежимо мало и его можно не учитывать, считая в общих уравнениях состояния (2.35), что все $C_{xx} = \ldots = C_{yz} = 0$. Это вполне приемлемо, например, для металлов при невысокой температуре. Однако нередко влияние временнóго фактора существенно. Так, при высоких температурах металлы помимо упругопластических свойств («мгновенной» реакции на приложенные воздействия) проявляют ползучесть — способность накапливать с течением времени при неизменных внешних воздействиях дополнительную необратимую деформацию, т. е. сохраняющуюся после снятия нагрузки. Другим материалам, например полимерам, присуще так называемое последействие, проявляющееся подобно ползучести при нагружении, однако отличающееся от нее тем, что после снятия нагрузки деформация сразу не исчезает, но сокращается постепенно с течением времени, стремясь к нулю. Материалы, обладающие таким свойством, называются наследственно-упругими или вязкоупругими. Для описания их физико-механического состояния существуют сложные расчетные модели, в различных сочетаниях объединяющие свойства упругости, пластичности и вязкости материалов. Неко-

торые «элементарные» свойства указанных материалов имеют простые механические эквиваленты, которые показаны на рис. 2.6. В частности, на рис. 2.6, *а* приведена схема упругого элемента, подчиняющегося закону Гука $\sigma = E\varepsilon$. На рис. 2.6, *б* элемент с сухим трением моделирует поведение жесткопластического тела, недеформирующегося при напряжениях ниже предела текучести $\sigma_т$, после превышения которого начинается течение. На рис. 2.6, *в* смоделирован вязкий элемент, следующий закону вязкости Ньютона $\sigma = \eta d\varepsilon/dt$, где η — коэффициент вязкости. Различные соединения групп таких элементов (последовательное, параллельное) представ-

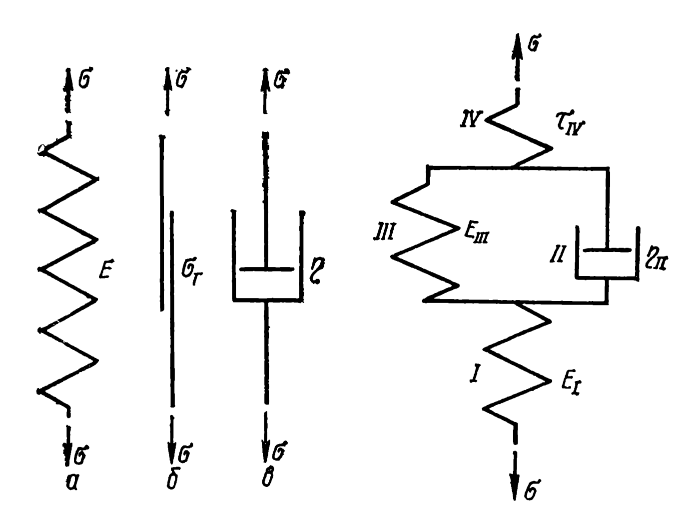


Рис. 2.6. Простые механические модели упругого (*а*), идеального жесткопластического (*б*) и вязкого (*в*) поведения материалов.

Рис. 2.7. Пример модели вязкоупругопластического тела.

ляют разные модели сложных сред, в том числе многоэлементные, или многопараметрические (пример такой модели показан на рис. 2.7).

Модели, объединяющие в каких-либо сочетаниях только упругие (см. 2.6, *а*) и вязкие (см. рис. 2.6, *в*) элементы, называются моделями вязкоупругих твердых тел, только вязкие и пластические (см. рис. 2.6, *б*),— вязкопластических тел и объединяющие все три типа элементов — вязкоупругопластических тел.

Определяющие уравнения (2.35), описывающие поведение таких тел, не просты, а «материальные» параметры $A_{xx}^{xx}, \ldots, A_{yz}^{yz}, B_{xx}, \ldots, B_{xz}$ этих уравнений представляются интегральными или дифференциальными операторами, которые могут иметь очень сложную структуру.

Так, для теории линейного вязкоупругого поведения принято отдельно рассматривать эффекты искажения формы и изменения объема, что математически обеспечивается разложением тензоров напряжений и деформаций на их девиаторную и шаровую части, для каждой из которых строятся соответствующие определяющие соотношения вязкоупругого поведения. Трехмерные определяющие уравнения вязкоупругого поведения в операторной форме в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \{P\}_{xx}S_{xx} = \{\sigma\}_{xx}^{xx}e_{xx} + \ldots + \{Q\}_{xx}^{yz}e_{yz}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{P\}_{yz}S_{yz} = \{Q\}_{yz}^{xx}e_{xx} + \ldots + \{Q\}_{yz}^{yz}e_{yz}, \\ \sigma_0 = k\varepsilon_0, \end{cases} \tag{2.68}$$

где $\{P\}_{(\ldots)}$, $\{Q\}_{(\ldots)}^{(\ldots)}$ — линейные дифференциальные операторы вида $\sum\limits_i a_i \partial^i/\partial t^i$, зависящие от параметров упругости и вязкости модели; $S_{xx}, \ldots, S_{yz}, e_{xx}, \ldots, e_{yz}$ — компоненты тензоров D_σ и D_ε соответственно; σ_0 — см. формулу (2.16); $k = E\mu/[1 + \mu)(1 - 2\mu)$ — объемный модуль упругости (здесь учитывается обычно упругая реакция материалов на всестороннее сжатие); ε_0 — см. в выражении (2.31). Определяющие уравнения вязкоупругого поведения (2.68) могут быть представлены в виде интегралов ползучести

$$\begin{cases} e_{xx} = K_{xx}^{xx}S_{xx} + \ldots + K_{xx}^{yz}S_{yz}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{yz} = K_{yz}^{xx}S_{xx} + \ldots + K_{yz}^{yz}S_{yz} \end{cases} \tag{2.69}$$

или релаксации

$$\begin{cases} S_{xx} = L_{xx}^{xx}e_{xx} + \ldots + L_{xx}^{yz}e_{yz}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{yz} = L_{yz}^{xx}e_{xx} + \ldots + L_{yz}^{yz}e_{yz}, \end{cases} \tag{2.70}$$

где $K_{(\ldots)}^{(\ldots)}$ и $L_{(\ldots)}^{(\ldots)}$ — соответствующие интегральные операторы, имеющие структуру $\int\limits_0^t \varphi(t - t') \dfrac{\partial(\ldots)}{\partial t'} dt'$ (здесь φ будет функцией соответственно ползучести или релаксации).

В конкретных исследованиях проблем прочности и разрушения важнейшую роль играет искусство подбора наиболее простой модели тела, дающей объяснение и описание наблюдаемого на опыте реологического явления. Правильный выбор реологической модели — основа решения задач прочности конструкций.]

2.3. Классические критерии прочности материалов

Исследование прочности материалов предполагает определение тех условий, при которых материал утрачивает способность противостоять внешнему нагружению и разрушается (разделяется на отдельные части). В рамках классического подхода к проблеме прочности принято, что разрушение происходит тогда, когда определенная комбинация, включающая в себя напряжения, деформации, температуру и некоторые другие параметры (характеризующие состояние материала и его конкретные свой-

ства), достигает критического значения. Таким образом, в пространстве всех возможных значений указанных параметров существует замкнутая предельная поверхность, описывающаяся соотношением

$$\Phi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, T, C_n, \ldots) = 0 \quad (i, j = x, y, z; \;\; n = 1, 2, \ldots), \qquad (2.71)$$

где C_n — параметры, характеризующие свойства макрообъемов реального тела (определяются экспериментально), которая ограничивает область допустимых (с точки зрения прочности) состояний материала.

Обычно окончательному разрушению материала, т. е. разделению его на части, предшествуют глубокие изменения в его структуре на макро-, микро- и субмикроуровнях. Накопление этих необратимых изменений на различных стадиях деформирования можно интегрально отразить, если в уравнение предельной поверхности дополнительно ввести параметры, зависящие от числа циклов нагружений или времени и характеризующие степень поврежденности материала. В этом случае при помощи критерия (2.71) можно описать любое промежуточное состояние материала от начала появления пластических деформаций до полного разрушения и таким образом определить работоспособность конструкции на разных стадиях наработки.

Конкретный вид соотношения (2.71) для каждого материала устанавливается на основании принимаемых постулатов (гипотез) о разрушении и необходимых экспериментальных исследований по определению параметров C_n. Это легко сделать для простых видов напряженного состояния (например, одноосного растяжения), поскольку в этом случае определению подлежит критическое значение лишь одного параметра. При сложном нагружении тела экспериментальным путем перебрать все многообразие возможных напряженно-деформированных состояний нельзя. Кроме того, постановка таких опытов практически неосуществима из-за значительных технических трудностей. Поэтому более приемлем путь, при котором вводятся дополнительные постулаты (гипотезы) о том, какие из факторов играют решающую роль в возникновении предельного напряженного состояния. Такие гипотезы — критерии прочности — формулируются на основании опыта и наблюдений и являются отличительной особенностью соответствующей теории прочности. Использование теорий прочности позволяет на основе ограниченного числа экспериментов, проведенных на образцах из данного материала в наиболее простых условиях, определять возможность достижения предельного состояния при сложном нагружении.

Применяемые в инженерной практике конструкционные материалы имеют различные прочностные свойства, по-разному ведут себя под напряжением. Различны и механизмы их разрушения: наступление предельного состояния в пластичных материалах связано, как правило, с возникновением значительных остаточных деформаций, в хрупких — с нарушением сплошности материала (появлением трещин). Поэтому в рамках рассматриваемого феноменологического подхода невозможно сформулировать единую теорию прочности, одинаково пригодную для всех случаев. В настоящее время разработан ряд частных теорий, применимых только для конкретного класса материалов при определенных условиях. Наиболее широко в инженерной практике известны следующие четыре классические теории прочности: наибольших нормальных напряжений, линейных деформаций и касательных напряжений, а также энергетическая теория.

Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности). В основе теории лежит предположение (постулат) о том, что независимо от вида напряженного состояния разрушение материала происходит тогда, когда нормальные напряжения в каком-либо направлении достигают критического для данного материала значения. Последнее устанав-

ливается путем испытания образцов из данного материала при простом растяжении и сжатии.

Таким образом, если известно напряженно-деформированное состояние в каждой точке тела (и, следовательно, определены главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), то предел прочности можно определить на основании соотношений

$$\sigma_1 = [\sigma_+] \qquad (2.72)$$

и

$$\sigma_3 = [\sigma_-], \qquad (2.73)$$

где $[\sigma_+]$ и $[\sigma_-]$ — допустимые напряжения при растяжении и сжатии соответственно, определенные на стандартных образцах.

Опытная проверка показала, что теория наибольших нормальных напряжений удовлетворительно описывает разрушение лишь очень хрупких материалов (камень, керамика, стекло и т. п.) при их растяжении и при условии, что в структуре материала нет явно выраженных дефектов типа трещин. Применительно к материалам, переходящим перед разрушением в макро- и микропластическое состояние, эта теория оказывается несостоятельной.

Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности). В этой теории за основной фактор, определяющий прочность материала, принято значение относительного удлинения. Предполагается, что прочность в исследуемой точке будет нарушена, если максимальные линейные деформации достигнут своего опасного предельного значения. В этом случае критерий разрушения представляется в виде

$$\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = [\sigma], \qquad (2.74)$$

где $[\sigma]$ — предел прочности материала, установленный на стандартных образцах.

Критерий разрушения, соответствующий теории наибольших линейных деформаций, плохо согласуется с данными экспериментов и практики, а иногда находится в явном противоречии с ними. Удовлетворительные результаты получаются лишь для материалов хрупких или находящихся в хрупком состоянии в тех случаях, когда все главные напряжения отрицательны. В связи в этим в настоящее время вторая теория прочности в практических расчетах почти не применяется.

Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности). Согласно этой теории предельное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает критического значения.

Критерий прочности по третьей теории выражается соотношением

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma], \qquad (2.75)$$

где $[\sigma]$ — предел прочности материала, установленный на стандартных образцах.

Теория наибольших касательных напряжений дает вполне удовлетворительные результаты для пластических материалов, одинаково хорошо сопротивляющихся растяжению и сжатию. К недостаткам этой теории относится то, что она не учитывает среднего значения главного напряжения σ_2, которое тоже оказывает определенное влияние на прочность материала.

Ввиду сдвиговой природы необратимых деформаций в металлах критерий наибольших касательных напряжений особенно эффективен при определении начала их пластического течения. В этом случае значение $[\sigma]$ совпадает с пределом текучести материала и критерий представляет собой условие текучести Треска.

Энергетическая теория (четвертая теория прочности). За основной фактор, определяющий наступление предельного состояния, здесь принята удельная потенциальная энергия формоизменения, накопленная деформированным элементом. Предполагается (постулируется), что количество работы, затраченной на искажение первоначальной формы материала и отнесенной к единице объема тела в момент разрушения, одинаково при любых видах напряженного состояния (как простых, так и сложных). Соответствующий критерий имеет вид

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2)} = [\sigma], \tag{2.76}$$

где $[\sigma]$ — предел прочности материала, установленный на стандартных образцах. Поскольку потенциальная энергия — величина положительная независимо от знака деформации, то рассматриваемая теория применима лишь к материалам, одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Удельная энергия формоизменения с точностью до постоянного множителя совпадает с касательным напряжением на площадке, равнонаклоненной к трем главным осям. Поэтому критерий (2.76) можно рассматривать также как критерий октаэдрических касательных напряжений.

Энергетическая теория получила широкое распространение для описания условий перехода различных материалов в пластическое состояние, причем она дает более точные результаты, чем теория наибольших касательных напряжений. В такой трактовке критерий (2.76) известен в литературе также как условие текучести Мизеса.

* * *

Основанные на рассмотренных выше классических теориях прочности критерии имеют в настоящее время практическое значение при расчетах конкретных инженерных конструкций.

При построении этих критериев прочности в структуре функционала (2.71), как правило, учитывают только один параметр C_i, характеризующий прочность на разрыв ($C_1 = \sigma_в$), пластичность ($C_1 = \sigma_т$) или деформативность ($\varepsilon_1 = \varepsilon_C$) реального материала. Эффективность расчетов по этим критериям во многом зависит от выбора того из них, который наиболее соответствует реальным свойствам используемого материала и условиям его работы.

Появление в последнее время новых материалов, в частности пластмасс, а также недостатки рассмотренных классических теорий прочности послужили импульсом для разработки новых и обобщения указанных выше критериев прочности. Большинство из них основано на выборе более сложных зависимостей для описания предельной поверхности (2.76), включающих два и более независимых параметров (C_1, C_2, C_3, ...). Это позволяет лучше учитывать особенности разрушения при сложном напряженном состоянии (см. [7]). Однако в этих случаях усложняется расчет эквивалентных напряжений, а также увеличивается объем экспериментальных исследований, необходимых для определения всех характеристик материала, содержащихся в обобщенных критериях.

ГЛАВА 3

КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНОКРАТНОМ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ [1—9]

Наличие в реальном теле остроконечных концентраторов напряжений, в частности дефектов типа трещин, принципиально усложняет его расчет на прочность. В таких случаях классические подходы механики сплошной среды приводят к некорректным результатам. При определении предельно равновесного состояния деформируемого твердого тела с дефектами типа трещин в классические критерии прочности необходимо подставить значения компонентов напряжений и деформаций в вершине концентратора, вычисленных с учетом деформации материала за пределом упругости. Задача о нахождении напряженно-деформированного состояния в твердом теле с учетом его деформирования в какой-то части за предел упругости сопряжена со значительными трудностями постановочного и вычислительного характера. Чтобы обойти эти трудности, некоторые исследователи пытались сформулировать новые критерии прочности, вводя при этом характеристики материала, являющиеся определенными инвариантами одновременно как в моделях механики сплошной среды, так и в моделях, учитывающих структурные особенности материала. Эти критерии и составили основу нового направления в теории прочности — механику разрушения материалов.

3.1. Некоторые понятия и определения

Механика разрушения материалов, в частности механика образования и развития трещин как главного инструмента разрушения материалов, представляет собой раздел механики и физики твердого деформируемого тела, объект изучения которого — процессы разрушения материалов (кристаллических или континуальных тел) под действием механических усилий или иных внешних воздействий. Далее будем считать, что рассматриваемое континуальное тело наделено определенными физико-механическими свойствами, устанавливаемыми экспериментально на стандартных образцах реального материала.

Разрушение относится к одному из видов нарушения прочности, которое для конструкции или ее отдельного элемента может происходить в результате следующих процессов: 1) чрезмерной (упругой или пластической) деформации; 2) потери устойчивости; 3) разделения на отдельные части. Разрушение может быть частичным или полным. При частичном разрушении в теле возникают повреждения материала в виде отдельных трещин или распределенных по объему дефектов материала, выражающихся в изменении (в неблагоприятную для прочности сторону) механических свойств материала. При полном разрушении происходит разделение тела на части.

Разрушение подразделяется на пластическое, хрупкое и усталостное,

Пластическое разрушение происходит после существенной пластической деформации, протекающей по всему (или почти по всему) объему тела. Разновидность пластического разрушения —разрыв образца после 100 %-го сужения шейки при растяжении, возникающий в результате потери материалом способности сопротивления пластической деформации.

Хрупкое разрушение происходит в результате распространения магистральной трещины после (макроскопически незначительной) пластической деформации, сосредоточенной в приповерхностной зоне трещины. При идеально хрупком разрушении отсутствует пластическая деформация, поэтому после разрушения можно заново составить тело прежних размеров из его частей, полученных в процессе разрушения, без зазоров между ними. Для таких случаев употребляется иногда также термин «упругое разрушение».

При квазиупругом (иначе квазихрупком) разрушении существует пластическая зона перед фронтом трещины и пластически деформированный (наклепанный) материал у поверхности трещины. Остальной, значительно больший по величине объем тела находится в упругом состоянии. Квазихрупким разрушением называют еще и разрушение, при котором напряжение в нетто-сечении выше предела текучести, но ниже предела прочности.

Усталостное разрушение происходит при циклическом (повторном) нагружении тела в результате накопления в нем необратимых повреждений, приводящих к образованию и развитию трещины. Усталостный излом макроскопически хрупок, однако у поверхности излома материал всегда наклепан.

Различают много- и малоцикловую усталости. Многоцикловая усталость (или просто усталость) характеризуется номинальными напряжениями, меньшими предела текучести (повторное возникновение которых в деформируемом теле вызывает в нем макроскопическое деформирование в упругой области) и числом циклов до разрушения (последнее достаточно велико).

Малоцикловая усталость (или повторностатическое нагружение) характеризуется номинальными напряжениями, бо́льшими предела текучести (при каждом цикле нагружения с таким уровнем напряжения в теле возникает макроскопическая пластическая деформация), и числом циклов до разрушения (последнее сравнительно невелико).

Общая цель исследований в механике разрушения твердых тел (материалов) — создание теории процессов их деформации и разрушения с учетом дефективности структуры и воздействия рабочей среды. При этом существенно важно установить физически обоснованные критерии оценки прочности (неразрушения) материала в конструкции с учетом наличия в ней дефектов типа трещин, а также выявить пути формирования материалов и конструкций высокой прочности и долговечности.

Важнейший постулат в механике разрушения твердых тел — трактовка разрушения как процесса зарождения и распространения трещины. Она (по сравнению с классическими подходами) предусматривает уже механизм самого разрушения, а трещина становится тем инструментом, с помощью которого осуществляется разрушение. Отсюда ясна важность проблем предельно равновесного состояния деформируемых твердых тел с трещинами, развития трещины при кратковременном или длительном воздействии на тело заданной нагрузки и рабочей среды, а также определения характеристик сопротивления материала распространению в нем трещин (трещиностойкости материала) и т. п.

Сформировавшиеся в начале нашего века критерии и подходы для оценки прочности материалов и конструкций исходят из того, что расчетной моделью реального твердого тела служит сплошная среда с заданными реологическими свойствами (например, упругий континуум), а элемент

деформируемого тела находится в одном из таких состояний (см. рис. 3.1): сплошном (С — состояние) или разрушенном (Р — состояние). Переход элемента материала из состояния С в состояние Р — процесс разрушения — осуществляется мгновенно, если только напряженно-деформированное состояние, вычисленное в рамках принятой реологической модели, достигает некоторого критического значения (например, если растягивающие напряжения в данной точке деформируемого твердого тела достигают предела прочности $\sigma_в$).

Такой классический подход к материалам, находящимся в хрупком состоянии и в структуре которых имеются остроконечные дефекты типа

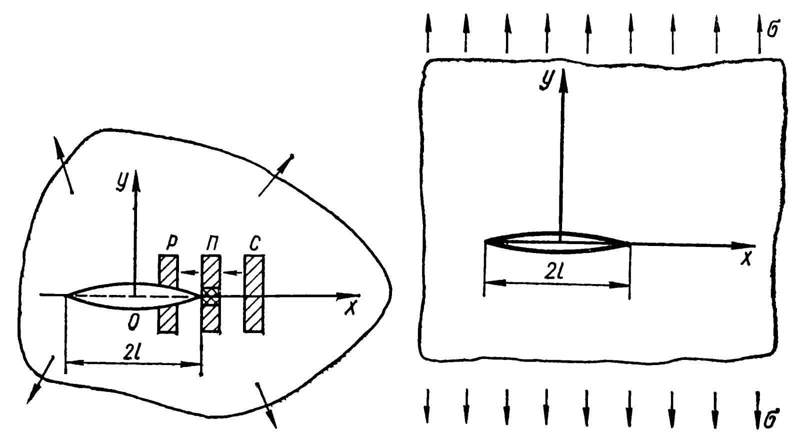


Рис. 3.1. Неклассическая схема разрушения.

Рис. 3.2. Схема растяжений неограниченной плоскости с прямолинейной трещиной.

трещин, не позволяет решить задачу об их прочности, поскольку в нем не учитывается особое напряженно-деформированное состояние материала около вершины остроконечного дефекта-трещины в процессе деформации тела. Это обусловлено тем, что радиус закругления вершины такого концентратора соизмерим с параметрами структуры самого материала.

Основная идея неклассического подхода (механики разрушения материалов) сводится к следующему (см. рис. 3.1). Считается, что переход элемента деформируемого тела из состояния С в состояние Р сопровождается промежуточным состоянием П, которое следует (обязательно) учитывать при решении задачи о прочности тела с дефектами типа трещин. Важнейшей особенностью областей деформируемого твердого тела, в которых возникают состояния П (области предразрушения), заключается в том, что материал в них всегда деформирован за предел упругости и что именно в них происходят наиболее интенсивное пластическое течение, взаимодействие с окружающей средой, диффузионные процессы, повреждаемость материала и другие явления, предопределяющие в конечном счете локальное разрушение материала, т. е. С → П → Р переход.

Таким образом, неклассическая схема разрушения предусматривает учет состояний П около остроконечных дефектов в деформируемом теле (в первую очередь типа трещин) — концентраторов напряжений, радиус закругления которых соизмерим с характерным линейным размером структурного элемента материала. Следовательно, при оценке прочности твердого тела необходимо учитывать его локальные физико-механические

свойства, например, способность оказывать сопротивление распространению в нем трещины — его трещиностойкость. Учет состояний П материала в рамках механики сплошных сред требует введения новых (по сравнению с классическими) расчетных моделей и концепций. Поскольку основными характеристиками, контролирующими поведение материала в вершине трещины, являются напряжения, деформации и энергия, то все критерии механики разрушения, аналогично классическим теориям прочности, делятся на энергетические, силовые и деформационные.

3.2. Энергетические критерии разрушения

Критерий Гриффитса — Орована. Пусть бесконечная пластина, ослабленная сквозной трещиной длины $2l$, растягивается в направлении, перпендикулярном линии расположения трещины, монотонно возрастающими внешними напряжениями σ (рис. 3.2). (Практически размеры пластины считаются намного бóльшими по сравнению с длиной трещины.) Задача состоит в определении такого значения внешних напряжений (предельных значений $\sigma = \sigma_*$), по достижении которого трещина начнет распространяться и пластина потеряет свою несущую способность — разрушится. На основании опытов по разрушению тел А. А. Гриффитс сделал вывод, что распространение трещины приводит к уменьшению энергии упругих деформаций W (упругой энергии) тела за счет его разгрузки вблизи распространяющейся трещины и увеличению его поверхностной энергии U в результате образования новых поверхностей тела. Он сформулировал принцип, согласно которому трещина начнет распространяться, если только скорость освобождения энергии упругой деформации достигнет прироста поверхностной энергии, т. е. наступит равенство

$$\frac{\partial W}{\partial l} + \frac{\partial U}{\partial l} = 0. \tag{3.1}$$

Величины W и U для тела с трещиной записываются в виде

$$W = W_0 - W_1, \quad U = U_0 - U_1, \tag{3.2}$$

где W_0, U_0 — соответственно энергия упругих деформаций и поверхностная энергия бездефектного тела; W_1, U_1 — соответственно энергия упругих деформаций, обусловленная раскрытием трещины, и ее поверхностная энергия.

Для рассмотренной выше задачи изменение упругой энергии вычисляется на основании соотношений теории упругости (см. гл. 2, формула типа (2.42)) и выражается следующими формулами:

для плоской деформации

$$W_1 = \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E} (1 - \mu^2), \tag{3.3}$$

для плоского обобщенного напряженного состояния

$$W_1 = \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E}.$$

Поверхностная энергия трещины определяется равенством

$$U_1 = 4l\gamma \tag{3.4}$$

Поскольку величины W_0 и U_0 не зависят от длины l, предельные напряже-

ния $\sigma = \sigma_*$ на основании равенств (3.1)—(3.4) определяются по формулам:

для плоской деформации

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l(1-\mu^2)}}, \tag{3.5}$$

для плоского обобщенного напряженного состояния

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \tag{3.6}$$

Значение внешних напряжений $\sigma = \sigma_*$, определяемое соотношениями (3.5) и (3.6), будет не только предельным, но и разрушающим, так как при сколь угодно малом дальнейшем увеличении напряжения начнется неустойчивое распространение трещины.

Первоначально считалось, что теория Гриффитса применима только к хрупким материалам типа стекол. Ее использование для других материалов, таких, например, как металлы, затруднялось тем, что их разрушение является квазихрупким, т. е. всегда сопровождается пластическими деформациями в зоне предразрушения. Е. О. Орован и другие исследователи в 1950-е гг. распространили концепцию Гриффитса на квазихрупкое разрушение материалов, т. е. когда пластические деформации сосредоточены в малой области материала возле контура движущейся трещины . Е. О. Орован предложил изменить подход А. А. Гриффитса при изучении распространения трещины в квазихрупком материале таким образом: наряду с поверхностной энергией материала учитывать также удельную работу (энергию) пластической деформации, сосредоточенной в тонком слое у контура трещины, т. е. работу, затрачиваемую на образование единицы новой поверхности. В этом случае формула Гриффитса для определения предельных напряжений принимает следующий вид:

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{2E(\gamma + \gamma_п)}{\pi l}}, \tag{3.7}$$

где $\gamma_п$ — удельная работа пластической деформации на единицу поверхности трещины при квазихрупком разрушении.

Для малоуглеродистых сталей эта величина на три порядка больше плотности поверхностной энергии, что дает основание записать (согласно Оровану)

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{2E\gamma_п}{\pi l}}. \tag{3.8}$$

Таким образом, концепция Гриффитса была распространена на металлические материалы. Однако формула (3.8) справедлива для малых пластических зон (зон предразрушения) у контура трещины. Размеров этих зон, и, следовательно, условий ограничения на материалы и геометрические параметры тел, где справедлива формула (3.8), теория Гриффитса—Орована не содержит.

Применительно к идеально упругопластическим телам энергетический критерий предельного равновесия тел с трещинами сформулирован в работах Е. М. Морозова как интегральный вариационный принцип теории трещин, в котором, кроме того, указаны также условия для определения характеристик зоны предразрушения.

Общий энергетический подход к описанию развития трещины в произвольных сплошных средах, основанный на представлении о «тонкой струк-

туре» конца трещины (малости зоны предразрушения), изложен Г. П. Черепановым. Условие предельного равновесия тела с трещиной в этом случае имеет вид

$$R\int_{0}^{2\pi}[(Э+K_э-B)\cos\theta-A]\,d\theta=2\gamma_р, \qquad (3.9)$$

где $Э$, $K_э$, B, A — физически представляют собой соответственно работу поверхностных сил и вычисляются непосредственно из решения соответствующей краевой задачи математической физики; R — радиус окружности с центром в вершине трещины, величина которого мала по сравнению с характерным линейным размером тела и трещины; θ — угол полярной системы координат с центром в вершине трещины.

Критерий *R*-кривых. Если в зоне предразрушения (в области состояний П, см. рис. 3.1) у контура трещины возникают большие пластические деформации и размеры этой зоны соизмеримы с размерами тела и трещины, то критерий Гриффитса—Орована некорректен. Для описания разрушения в таком случае применяют более общие энергетические подходы, которые основаны, как и теория Гриффитса, на балансе скоростей изменения составляющих энергии деформируемого тела в процессе развития трещины. Согласно первому закону термодинамики в каждый момент продвижения трещины должно выполняться условие

$$\dot{A}+\dot{Q}=\dot{W}+\dot{K}_э+\dot{Г}, \qquad (3.10)$$

где $\dot{A}$ и $\dot{Q}$ — скорость совершения работы приложенными силами и подвода тепла к телу; $\dot{W}$, $\dot{K}^э$ и $\dot{Г}$ — скорости изменения энергии деформации тела, кинетической энергии и энергии разрушения. При медленном (квазистатическом) увеличении трещины в пластинах на длину Δl, если опустить объемные силы, считать, что теплообмен не происходит, и учитывать, что дифференцирование по времени может быть заменено дифференцированием по длине трещины l, уравнение баланса скоростей (3.10) запишется в виде

$$\int_S X_{nt}\frac{\partial u_i}{\partial l}\,dS=\int_V\frac{\partial W}{\partial l}\,dV+D_f, \qquad (3.11)$$

где X_{nt} — поверхностные силы, действующие на части поверхности тела S; V — объем тела; u_i — смещения его точек; $D_f=\partial Г/\partial l$ — удельная энергия разрушения, расходуемая на формирование тонкого приповерхностного слоя трещины (в зоне разрушения). Эту величину можно считать константой материала. Для упругопластического тела энергия W определяется выражением

$$W=W^у+W^п, \qquad (3.12)$$

где упругая энергия

$$W^у=\int_V W^у dV; \qquad (3.13)$$

энергия диссипации в области пластических деформаций (работа пластических деформаций)

$$W^п=\int_{V^п} W^п dV; \qquad (3.14)$$

$V^п$ — объем пластической области; $W^у$, $W^п$ — плотности соответственно упругой и пластической энергии деформации, вычисляемые по формулам

$$W^у = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^у, \quad W^п = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^п \tag{3.15}$$

$$(ij = x, y, z).$$

Тогда уравнение (3.11) может быть записано в виде

$$\int\limits_S X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial l} dS - \frac{\partial W^у}{\partial l} = D_f + \frac{\partial W^п}{\partial l}. \tag{3.16}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой сумму скорости совершения работы внешними силами и освобождения энергии полем упругих деформаций, правая — скорости диссипации энергии в зонах разрушения и пластической. Член $\partial W^п/\partial l$ не является константой, а зависит от геометрии тела и условий нагружения. Однако в критерии R-кривых различий между двумя диссипативными членами нет и они считаются константами материала. При этом правая часть уравнения (3.16) обозначается через R и рассматривается как удельное сопротивление увеличению длины трещины в материале. Экспериментально R определяется как функция прироста длины трещины $R = R(l)$ при одной геометрии тела, а затем используется при других геометриях. Левая часть уравнения (3.16) приравнивается ее значению при линейной упругости, т. е. скорости высвобождения потенциальной энергии тела при расширении трещины, G_1. Если выполняется равенство

$$G_1 = R, \tag{3.17}$$

то рост трещины устойчивый и поэтому данное равенство используется для описания такого роста. Неустойчивый рост трещины начинается тогда, когда, кроме равенства (3.17), выполняется также равенство

$$\frac{\partial G_1}{\partial l} = \frac{\partial R}{\partial l}. \tag{3.18}$$

Точка соприкасания линий $G_1(l)$ и $R(l)$ определяет критическое значение трещиностойкости R_C. Критерий спонтанного развития трещины записывается в виде

$$G_1 = R_C. \tag{3.19}$$

Метод R-кривых уязвим, поскольку в общем случае правая часть соотношения (3.16) является не только функцией прироста трещины, а зависит от всей геометрии тела и условий нагружения.

Критерий J-интеграла (критерий Черепанова—Райса). Для общей формулировки энергетического нелинейного критерия разрушения необходимо уметь определить не только левую часть уравнения (3.16), но и величину $\partial W^п/\partial l$, которая зависит от геометрии тела и условий его нагружения. Поэтому такой критерий записывается в виде

$$\int\limits_S X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial l} dS - \left(\frac{\partial W^п}{\partial l} + \frac{\partial W^у}{\partial l}\right) = D_f, \tag{3.20}$$

где X_{ni} и u_i — см. формулу (3.11). Такая запись критерия разрушения

не предполагает никаких ограничений ни на размер пластической области, ни на степень докритического роста трещины. Трудности применения критерия состоят в определении левой части; они уменьшаются, когда нет устойчивого подрастания трещины, т. е. для критерия начального роста трещины. Если в упругопластическом теле с трещиной напряжения монотонно возрастают и разгрузки нигде нет (она обязательно возникала бы при подрастании трещины), поведение такого материала может быть описано соотношением нелинейной теории упругости (соотношениями деформационной теории пластичности в стадии активного нагружения). Тогда сумма $\partial W^{у}/\partial l + \partial W^{п}/\partial l = \partial W/\partial l$ означает скорость энергии деформации нелинейного упругого тела, а разность $W - \int X_{ni}u_i dS = U$ является упругим потенциалом. В таком случае

$$-\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\int\limits_S X_{ni}u_i dS - \int\limits_V W dV\right) = \int\limits_C \left(W dx_i - X_{ni}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) dl, \quad (3.21)$$

где C — любой контур, охватывающий конец трещины и соединяющий ее нижний берег с верхним (против часовой стрелки); x_i — длина дуги контура C.

Интеграл $J = \int\limits_C (W dx_i - X_{ni}\partial u_i/\partial x_i)\, dl$, стоящий в правой части равенства (3.21), не зависит от пути интегрирования. Этот путь может лежать внутри пластической области или охватывать ее. Данное свойство используется для облегчения аналитического определения J-интеграла.

При указанных выше предположениях трещина начинает расти, когда J-интеграл достигает критического значения, постоянного для данного материала, т. е. когда

$$J\Big|_{\sigma=\sigma_*} = -\frac{\partial U}{\partial l}\Big|_{\sigma=\sigma_*} = D_f = J_{IC}. \quad (3.22)$$

Величина J_{IC} считается характеристикой материала и называется предельным (критическим) значением J-интеграла.

Для экспериментального определения величины J_{IC} используют метод испытания образцов, которые отличаются лишь длиной трещины. При этом

$$J_{IC} = -\lim_{\Delta l\to 0}\frac{Q(l+\Delta l) - Q(l)}{\Delta l}, \quad (3.23)$$

где Q — площадь под кривой «нагрузка — перемещение» для образцов с различными длинами трещин*.

Для определения величины J_{IC} (значения J-интеграла в момент начала роста трещины, $J_{IC} = D_f$) очень важно точно установить, когда же начинается рост трещины. Однако по диаграмме нагрузка — перемещение момент роста трещины уловить трудно, ибо различить на ней нелинейности, связанные с ростом трещины, сложно.

Общий энергетический критерий. Для описания разрушения упругопластического материала при подрастании трещины и релаксации напряжений необходимо пользоваться критерием разрушения (3.20), который

* Экспериментальный метод определения трещиностойкости материала в виде его эффективной поверхностной энергии (плотности энергии разрушения) эквивалентный выражению (3.23), впервые был предложен В. В. Панасюком и С. Е. Ковчиком [4].

можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\int\limits_S X_{ni}u_i dS - W^{у} - W^{п}\right) = D_f. \qquad (3.24)$$

Левая часть здесь представляет собой скорость освобождения энергии, идущей на рост трещины, и может быть определена аналогично скорости освобождения энергии в линейно-упругом теле, т. е. путем моделирования развития трещины при помощи релаксации напряжений в плоскости трещины впереди нее. Численные расчеты очень сложные.

Для модельного представления пластической зоны областями разрыва смещений впереди трещины левая часть уравнения может быть определена аналитически. В этом случае удается аналитически описать процессы устойчивого докритического роста трещины и установить моменты перехода к неустойчивому спонтанному их развитию.

Используемые в выше приведенных критериях предельного равновесия тел с трещинами величины $\gamma_п$, R_C, J_{IC} характеризуют степень сопротивления материала распространению в нем трещин и поэтому названы характеристиками трещиностойкости материалов.

3.3. Силовой подход в механике разрушения

Несмотря на то что исторически первым критерием механики разрушения был предложенный А. А. Гриффитсом энергетический, наиболее широкое распространение в инженерных приложениях получили силовые подходы, связанные с использованием введенного Дж. Р. Ирвином понятия коэффициента интенсивности напряжений. Описание разрушения с этих позиций отличается относительной простотой и ясностью, поскольку исключается применение таких трудноопределимых характеристик, как истинная поверхностная энергия, работа локальной пластической деформации, которые фигурируют в других подходах и критериях. Последовательная реализация силового подхода привела к созданию достаточно строгой и завершенной теории линейной механики разрушения, являющейся хорошей основой для анализа хрупких разрушений материалов и инженерных конструкций.

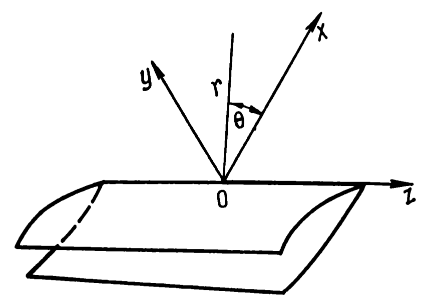


Рис. 3.3. Локальные схемы координат у вершины трещины.

Напряженное состояние в окрестности контура трещины. В расчетах на прочность элементов конструкций и сооружений с трещинами отправной точкой является исследование распределения напряжений и деформаций, возникающих в них под действием приложенных нагрузок. При этом особый интерес представляет область в непосредственной близости к вершине (кончику) трещины, поскольку именно в ней начинается дальнейшее разрушение и наступает состояние П (см. рис. 3.1). В рамках линейной механики разрушения, исходящей из модели идеально упругого тела и представляющей трещину в виде разреза нулевой толщины, поверхности которого свободны от напряжений, рассматриваемая задача сводится к краевой задаче теории упругости.

В самом общем случае распределение деформаций в окрестности произвольной точки O (рис. 3.3) контура трещины можно представить в виде

суперпозиции трех частных видов деформации (рис. 3.4), соответствующих трем основным видам смещения поверхностей трещины: нормального отрыва (I), поперечного (II) и продольного (III) сдвигов. Первый тип связан с нормальным смещением поверхностей трещины во взаимно противоположных направлениях (симметрично относительно плоскостей xy и xz); второй соответствует перемещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, перпендикулярном ее фронту

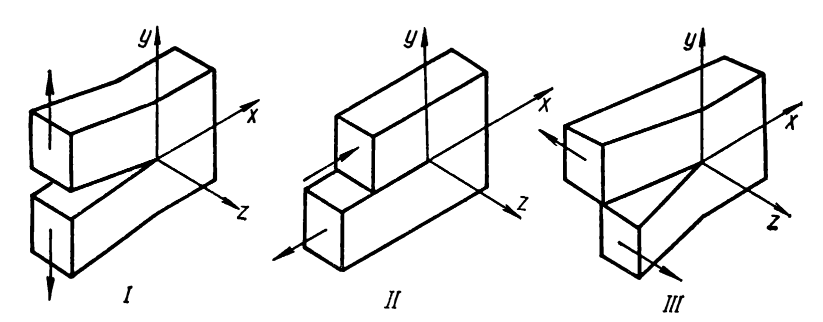


Рис. 3.4. Схема основных макромеханизмов распространения трещин: I — нормальный отрыв; II — поперечный сдвиг; III — продольный сдвиг.

(ось z); третий связан со скольжением одной поверхности трещины по другой параллельно фронту трещины (оси z).

При реализации каждого из упомянутых типов деформирования тела с трещиной в окрестности ее контура распределение смещений и напряжений записывается следующим образом:

для нормального отрыва (I)

$$u_x = \frac{K_{\rm I}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\mu+\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_y = \frac{K_{\rm I}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(1-2\mu+\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_z = 0,$$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \qquad (3.25)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{2\mu K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2};$$

для поперечного сдвига (II)

$$u_x=\frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\mu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_y=\frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(2\mu-1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_z=0,$$

$$\sigma_{xx}=-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_{yy}=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\sigma_{zz}=-\frac{2\mu K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad (3.26)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0,$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right);$$

для продольного сдвига (III)

$$u_x=0,\ v_y=0,$$

$$u_z=\frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad (3.27)$$

$$\tau_{xz}=-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\tau_{yz}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{xy}=0.$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_{II} и K_{III} служат мерой сингулярности напряжений около вершины трещины, т. е. области предразрушения (состояния П), и играют для этой области такую же роль, как коэффициенты концентрации напряжений в сопротивлении материалов для макрообъемов тела. В отличие от коэффициентов концентрации коэффициенты интенсивности напряжений имеют единицы измерения (кГ/мм$^{3/2}$ или МПа$\cdot\sqrt{\text{м}}$).

Универсальность формул (3.25)—(3.27) состоит в том, что радиальное (вдоль радиуса r, рис. 3.3) и угловое (в направлении изменения угла θ, рис. 3.3) распределение для асимптотики напряженного состояния согласно формулам (3.25)—(3.27) не зависит от длины трещины, формы тела и схемы действующих нагрузок. Интенсивность же этого распределения определяется только коэффициентами K_I, K_{II}, K_{III}, являющимися функциями приложенных нагрузок, геометрии тела и трещины, независящими от координат точки вблизи конца разреза.

Если σ — параметр, характеризующий внешнюю нагрузку на тело, а l — характерный линейный размер трещины, то, очевидно, $K_I = K_I(\sigma, l)$, $K_{II} = K_{II}(\sigma, l)$, $K_{III} = K_{III}(\sigma, l)$.

Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений — основные (базовые) характеристики напряженно-деформированного состояния материала в окрестности трещины и поэтому имеют исключительно важное значение в механике разрушения*[1]. Определение этих величин для тел с трещинами различной конфигурации на основе решения соответствующих краевых задач является в настоящее время обширной самостоятельной областью математической теории трещин (см. гл. 5).

Зоны пластичности в окрестности контура трещины. Из приведенных выше решений упругих задач о распределении напряжений в окрестности вершины трещины следует, что напряжения бесконечно велики в непосредственной близости от вершины трещины. Такой результат получается как следствие линеаризованной постановки задачи о напряженно-деформированном состоянии в этой зоне и применения физически линейной теории упругости (закона Гука) в ходе ее решения. В действительности для всех материалов (в частности, металлов) при напряжениях выше предела текучести*[2] $\sigma_т$ реализуется его пластическое течение (нарушается линейная связь между напряжениями и деформациями). В результате перед концом трещины всегда есть более или менее протяженная пластическая зона.

При плоском напряженном состоянии в качестве первого приближения протяженности пластической зоны (зоны состояний П) в направлении оси Ox для трещины нормального отрыва можно принять такое расстояние $r_п$ от вершины трещины, на котором напряжения, определяемые соотношением (3.25), достигают предела текучести:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_п}} = \sigma_т. \tag{3.28}$$

Отсюда

$$r_п = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_т^2}. \tag{3.29}$$

Используя аналогичные простые предположения, можно приближенно определить и форму зоны пластичности, рассматривая условие текучести для различных значений полярного угла θ.

Согласно формулам (3.25) в окрестности контура трещины нормального отрыва главные напряжения записываются выражениями

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.30}$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_3 = \mu(\sigma_1+\sigma_2) = 2\mu\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\ \text{(для плоской деформации)},$$

$\sigma_3 = 0$ (для плоского напряженного состояния).

---

*[1] Значения коэффициента интенсивности напряжений для многих конкретных задач представлены в т. 2 настоящего справочного пособия.

*[2] Определение предела текучести дано в гл. 2.

Используя условие текучести Мизеса (2.60), получим:

для плоской деформации

$$\frac{K_I^2}{2\pi r}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta+(1-2\mu)^2(1+\cos\theta)\right]=2\sigma_т^2, \tag{3.31}$$

для плоского напряженного состояния

$$\frac{K_I^2}{2\pi r}\left[1+\frac{3}{2}\sin^2\theta+\cos\theta\right]=2\sigma_т^2. \tag{3.31а}$$

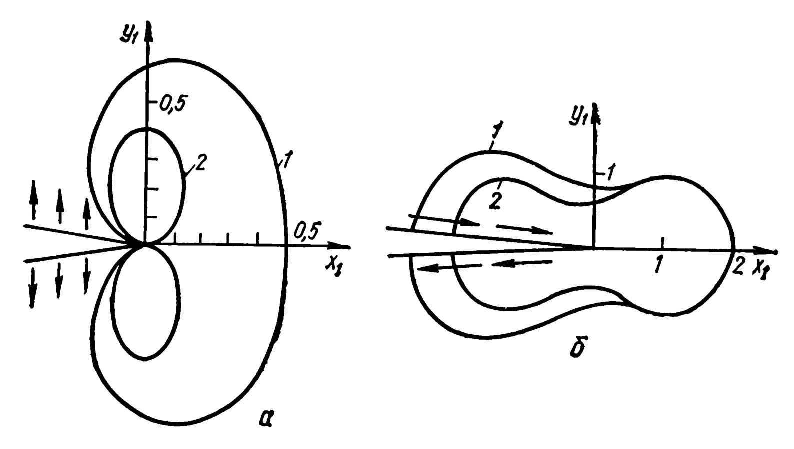


Рис. 3.5. Форма зон пластичности (оценка из упругого решения) у вершины трещины нормального отрыва (*а*) и поперечного сдвига (*б*):
1 — плоское напряженное состояние; *2* — плоская деформация.

Таким образом, линия, на которой напряжения достигают предела текучести для данного материала, описывается в полярных координатах (r, θ) (см. рис. 3.3) следующими уравнениями:

для плоской деформации

$$r_п(\theta)=\frac{K_I^2}{4\pi\sigma_т^2}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta+(1-2\mu)^2(1+\cos\theta)\right], \tag{3.32}$$

для плоского напряженного состояния

$$r_п(\theta)=\frac{K_I^2}{4\pi\sigma_т^2}\left(1+\frac{3}{2}\sin^2\theta+\cos\theta\right). \tag{3.33}$$

Из уравнения (3.32) при $\theta=0$ следует, в частности, выражение (3.29).

Границы зон пластичности, подсчитанные по соотношениям (3.32) и (3.33), изображены в безразмерных координатах $x_1=x/(K_I/\sigma_т\sqrt{\pi})^2$; $y_1=y/(K_I/\sqrt{\pi}\sigma_т)^2$ на рис. 3.5, *а*. Аналогичным образом анализируется форма зоны пластичности для трещины поперечного сдвига (рис. 3.5, *б*).

Поскольку текучесть материала влияет на распределение напряжений за пределами зоны пластичности и, следовательно, изменяет форму этой зоны, приведенные результаты (основанные на упругом решении задачи) представляют собой лишь весьма грубое приближение. Для более точного расчета необходимо исследовать распределение напряжений и деформаций около вершины трещины в упругопластической постановке, что связано со значительными математическими трудностями. Полное решение этой задачи с учетом реальных свойств материала до сих пор не получено, а

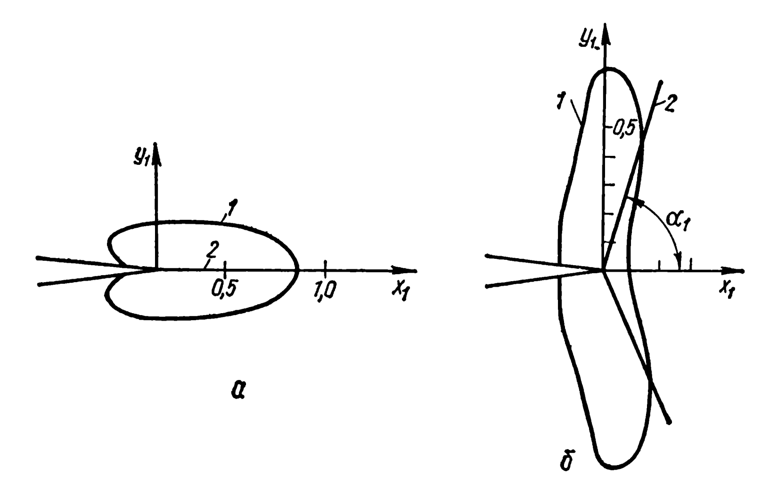


Рис. 3.6. Пластическая зона у вершины трещины нормального отрыва:

а — плоское напряженное состояние; *б* — плоская деформация; *1* — численный расчет; *2* — модельные представления.

применяемые расчетные схемы основаны на различных упрощениях. На рис. 3.6 представлены результаты расчета (при помощи метода конечных элементов) пластических зон в вершине трещины нормального отрыва. При этом предполагалось, что материал идеально упругопластический, следующий условию текучести Мизеса, а напряженное состояние в окрестности контура трещины полностью описывается асимптотическими соотношениями (3.25) (что, вообще говоря, верно лишь для неограниченного тела с трещиной в виде полуплоскости при эквивалентном нагружении).

Эти и другие аналитические результаты, полученные в последнее время, а также многочисленные эксперименты свидетельствуют, что общей закономерностью пластического течения материала при разрушении по механизму нормального отрыва является локализация пластических деформаций в достаточно вытянутых областях, которые при плоском напряженном состоянии расположены в плоскости трещины, а при плоской деформации образуют с ней угол $\alpha_1 = 45 \div 72°$. В связи с этим весьма эффективным и достаточно хорошо обоснованным представляется моделирование зон предразрушения в виде узких полос пластического течения, исходящих из вершины трещины (рис. 3.6). При решении задачи эти полосы рассматриваются как трещины-разрезы, к берегам которых приложена нагрузка, соответствующая пределу текучести данного материала. Длина пластических зон может быть выражена через коэффициент интенсивности напряжений при помощи соотношений:

для плоской деформации

$$d_1 = 0{,}578 \frac{K_I^2}{\pi\sigma_т^2}, \qquad (3.34)$$

для плоского напряженного состояния

$$d_1 = \frac{\pi}{8} \frac{K_I^2}{\sigma_т^2}.$$

Для трещин продольного сдвига если зона предразрушения не выходит за область, в которой справедливо асимптотическое представление (3.27), можно получить точное решение задачи. Контур, разделяющий упругую и пластическую области, описывается уравнением

$$y^2 + \left(x - \frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{d_1^2}{4}, \qquad (3.35)$$

где $d_1 = 4K_{III}^2/\pi\sigma_т^2$.

Таким образом, зона пластичности представляет собой круг диаметром d_1, центр которого расположен на продолжении линии трещины на расстоянии $d_1/2$ от ее вершины (рис. 3.7).

Силовые критерии хрупкого и квазихрупкого разрушения. Поскольку для идеально упругого тела напряженно-деформированное состояние у фронта трещины размера l, вызванное внешней нагрузкой σ, полностью определяется коэффициентами интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III}, именно эти величины и лежат в основе силовых критериев линейной механики разрушения. В этом случае критериальное уравнение будет содержать параметры K_I, K_{II} и K_{III}, а также некоторые константы материала C_i, т. е. его можно записать так:

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, C_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (3.36)$$

Соотношение (3.36) описывает в координатах (K_I, K_{II}, K_{III}) некую предельную для данного материала поверхность, при достижении которой трещина переходит из устойчивого в неустойчивое состояние (начинает распространяться).

Наличие в вершине трещины в металлах зоны пластической деформации приводит к несоответствию действительной картины напряженно-деформированного состояния тому, что предполагается соотношениями, полученными из решения задачи для упругих тел. Однако если зона проявления нелинейных свойств материала достаточно мала, то будет существовать область, по протяженности промежуточная между размерами пластической зоны и длиной трещины или размерами тела, в которой асимптотика решения задач для упругих тел будет хорошим приближением к действительному распределению напряжений. Это позволяет считать, что и размер зоны предразрушения и состояние материала в ней целиком контролируется коэффициентами интенсивности напряжений. Поэтому, хотя реальные материалы и не проявляют идеально упругого поведения при разрушении, тем не менее критерии линейной* механики разрушения оста-

* Этот термин указывает на применение моделей линейной теории упругости при вычислении значений коэффициента интенсивности напряжений для тел с трещинами, через которые определяется напряженно-деформированное состояние в зоне предразрушения.

ются для них справедливыми при условии ограниченности пластического течения (т. е. при реализации схемы квазихрупкого разрушения).

Впервые критерий типа (3.36) был предложен Дж. Р. Ирвином для разрушения квазихрупких тел по механизму нормального отрыва. Формулируется он следующим образом: трещина начинает распространяться в том случае, если коэффициент интенсивности напряжений достигнет критического для данного материала значения:

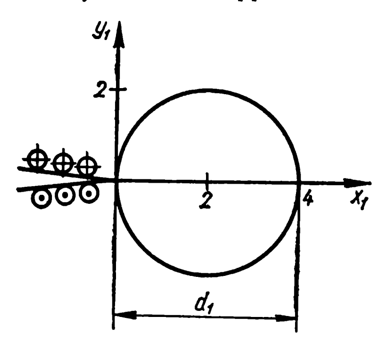


Рис. 3.7. Пластическая зона у вершины трещины продольного сдвига.

для плоской деформации

$$K_{I_*} = K_{IC}, \qquad (3.37)$$

для плоского напряженного состояния

$$K_{I_*} = K_C.$$

Здесь $K_{I_*} = K_I(\sigma_*, l)$, где σ_* — предельное значение приложенной нагрузки σ.

Аналогично критерию Ирвина условие страгивания трещины при поперечном сдвиге ($K_I = K_{III} = 0$) представляется в виде

$$K_{II_*} = K_{IIC} \quad (K_{II_*} = K_{II}(\sigma_*, l)), \qquad (3.38)$$

а при продольном сдвиге ($K_I = K_{II} = 0$) — в виде

$$K_{III_*} = K_{IIIC} \quad (K_{III_*} = K_{III}(\sigma_*, l)). \qquad (3.39)$$

Принципиальное различие величин, расположенных в левой и правой частях критериальных соотношений (3.37) — (3.39), заключается в том, что K_{I_*}, K_{II_*}, K_{III_*} отражают геометрическую форму тела с трещиной и условия его нагружения, а K_{IC}, K_{IIC}, K_{IIIC} — характеристики материала, которые по аналогии с пределами текучести и прочности, остаточным удлинением и др. отражают вполне определенное свойство материала — способность сопротивляться распространению в нем трещин (его трещиностойкость). Для определения трещиностойкости конструкционных материалов в настоящее время есть специальные методики и рекомендации (см. т. 3), регламентирующие условия установления и применения этих параметров.

Для микронеоднородного тела, в котором для отдельных его составляющих совместно реализуются различные механизмы разрушения, функциональная зависимость (3.36) имеет более сложный вид. Например, критериальное соотношение

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^{m_1} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^{m_2} + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIC}}\right)^{m_3} = 1, \qquad (3.40)$$

где m_1, m_2, m_3 — константы материала, в ряде случаев хорошо описывает разрушение широкого класса конструкционных материалов.

Выполнение критериев (3.37)—(3.40) свидетельствует о наступлении предельного равновесного состояния тела с трещиной. Однако в таком состоянии рост трещины может быть как устойчивый, так и неустойчивый. В первом случае трещина неподвижна при постоянной внешней нагрузке

и для увеличения ее площади (или длины) на малое значение требуется также малое приращение параметра внешней нагрузки. Следовательно, если из критерия разрушения найдена связь между внешней нагрузкой σ и длиной трещины l, то для устойчивой трещины справедливы неравенства

$$\frac{d\sigma}{dl} > 0 \text{ или } \frac{dK_i}{dl} < 0 \qquad (i = \text{I, II, III}). \tag{3.41}$$

Если коэффициент K_i увеличивается с ростом и нагрузки, и длины трещины, то из условия постоянства K_i в предельном состоянии следует второе неравенство (3.41).

В неустойчивом состоянии равновесия трещина начинает двигаться по достижении нагрузкой критического значения, определяемого из критерия разрушения. В закритической области она может расти и при постоянной нагрузке. Область неустойчивых состояний равновесия характеризуется неравенствами

$$\frac{d\sigma}{dl} < 0 \text{ или } \frac{dK_i}{dl} > 0. \tag{3.42}$$

С точки зрения предотвращения полного разрушения важно знать, к какому виду равновесия относится предельное состояние: если оно устойчиво, то опасности немедленного полного разрушения детали нет, если неустойчиво, то такую трещину допускать нельзя, во всяком случае без дальнейшего более подробного анализа.

Так как предельно равновесное состояние хрупких и квазихрупких тел* с трещинами одинаково корректно определяется как силовыми (3.37)—(3.39), так и энергетическими (3.1), (3.22) критериями разрушения, то между их базовыми параметрами (характеристиками трещиностойкости) должна существовать однозначная связь. Для ее установления определяется значение упругой энергии в теле с трещиной (например, нормального отрыва) через коэффициент K_I и подставляется в равенства (3.1), (3.22) при $K_\text{I} \to K_{\text{I}Q}$. В результате

для плоской деформации

$$K_{\text{I}C}^2 = \frac{Eg_{\text{I}C}}{1-\mu^2}, \tag{3.43}$$

для плоского напряженного состояния

$$K_Q^2 = Eg_{\text{I}C},$$

где $g_{\text{I}C} = \begin{cases} 2\gamma \text{ — для хрупкого тела,} \\ J_{\text{I}C} \text{ — для упругопластического тела.} \end{cases}$

Зависимости (3.43) часто используются при комбинированном применении энергетических и силовых критериев для определения прочности упругопластических тел с трещинами по одному критерию, а характеристики трещиностойкости его материала — по другому, в техническом отношении легко реализуемому.

Как пример рассмотрим задачу Гриффитса (см. п. 3.2) и определим для этого случая с помощью критерия (3.37) предельное значение внешней

---

* Хрупкими и квазихрупкими телами называют такие, которые находятся в хрупком и квазихрупком состояниях соответственно.

нагрузки $\sigma = \sigma_*$. В результате получим

$$\sigma_* = K_{IC} (\pi l)^{-1/2}. \quad (3.44)$$

Из выражения (3.44) следует, что для задачи Гриффитса выполняется условие (3.42), т. е. в этом случае рост трещины будет неустойчивый.

Условия автомодельности. Корректность силовых критериев линейной механики разрушения ограничена условиями существования квазихрупкого состояния материала. Требование малости пластических зон по сравнению с размерами тела и трещины лишь качественно определяет область, где эти критерии удовлетворяются. Для полноты излагаемой здесь расчетной модели необходимо установить математические соотношения (условия автомодельности), определяющие размеры тела и трещины, которые бы обеспечивали правомерность применения указанных критериев. Принципиальная важность таких соотношений состоит прежде всего в том, что наличие значительных объемов пластического деформирования может существенно повлиять на значение характеристик трещиностойкости. Поэтому совершенно недопустимо определять параметры трещиностойкости на лабораторных образцах малых размеров и по их значениям прогнозировать работу материала в крупногабаритных элементах конструкций. Такой перенос результатов некорректен и может привести к серьезным ошибкам. Условия автомодельности служат основным критерием выбора оптимальных размеров образцов, при испытании которых реализуется механизм квазихрупкого разрушения, и определяемые параметры трещиностойкости действительно являются инвариантными характеристиками материала.

Для установления условий автомодельности поступают следующим образом. Согласно выражениям (3.25)—(3.27) значение ненулевых компонент напряжений на продолжении трещины ($\theta = 0$) определяется при помощи асимптотических соотношений

$$\sigma_{1i}(x, 0, 0) = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (3.45)$$

где K_i ($i = \text{I, II, III}$) — коэффициенты интенсивности напряжений для трех основных типов смещения берегов трещины (см. рис. 3.4); $\sigma_{11} = \sigma_x$; $\sigma_{12} \equiv \tau_{xy}$; $\sigma_{13} = \tau_{xz}$.

Предположим, что геометрические размеры тела и трещины характеризуются линейными параметрами a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), при стремлении которых к бесконечности ($a_i \to \infty$) получаем неограниченное тело с разрезом в виде полуплоскости. Напряжение на границе зоны предразрушения (в точке $x = x_0$) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{1i} = (x_0, 0, 0) = \frac{K_i(\sigma, a_1, \ldots, a_m)}{\sqrt{2\pi x_0}} f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m). \quad (3.46)$$

Здесь σ — параметр, характеризующий внешнюю нагрузку; $f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — безразмерная функция, которая находится из решения задачи упругого равновесия тела; $\lambda_i = x_0/a_i$.

Для достижения условий квазихрупкого разрушения необходимо, чтобы напряженное состояние в зоне предразрушения полностью определялось коэффициентом интенсивности напряжений K_i. Это возможно в том случае, если на границе этой области (при $x = x_0$) справедливо асимптотическое представление (3.45), т. е.

$$f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \approx 1. \quad (3.47)$$

Равенство (3.47) выполняется только при неограниченно больших по сравнению с x_0 значениях a_i. Для установления практически применимых размеров a_i соотношение (3.47) заменяется неравенством

$$|f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) - 1| \leqslant 0{,}09, \qquad (3.48)$$

которое обеспечивает выполнение условий автомодельности с погрешностью не более 9 %.

Поверхность

$$|f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) - 1| = 0{,}09$$

в системе координат $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ограничивает область (объем) V значений параметров λ_i, удовлетворяющих условиям автомодельности зоны предразрушения с упомянутой выше точностью. При разработке экспериментальных методик по определению характеристик трещиностойкости конструкционных материалов K_{IC}, K_{IIC}, K_{IIIC} необходимо, чтобы размеры образцов и трещин лежали в области V, т. е. выполнялись условия

$$a_j \geqslant \frac{x_0}{\lambda_j},$$

или

$$a_j \geqslant \frac{A}{\lambda_j} \frac{K_{iC}^2}{\sigma_т^2} \qquad (j = 1, \ldots, m;\ i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), \qquad (3.49)$$

где A — величина, которая вычисляется из отношений (3.34) и (3.35) при определении x_0 через длину пластической зоны.

Пример. Определим оптимальные размеры цилиндрического образца с внешней кольцевой трещиной, который используется для нахождения значений трещиностойкости K_{IC} материала при нормальном отрыве берегов трещины (для этого применяется нагружение растяжением по схеме рис. 3.8, *а*) и K_{IIIC} при продольном сдвиге. Последний реализуется путем кручения цилиндрического образца с кольцевой трещиной (рис. 3.8, *б*).

При растяжении образца напряжения на границе зоны предразрушения (на расстоянии x_0 от контура трещины) записываются соотношением

$$\sigma_z(x_0, 0) = \frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi x_0}} f_\mathrm{I}(\lambda_1, \lambda_2), \qquad (3.50)$$

где

$$f_\mathrm{I}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5\lambda_2}} [1 + \lambda_2 (2{,}029\lambda_0^3 + 1{,}0028\lambda_0^5 +$$
$$+ 0{,}6865\lambda_0^6 + 0{,}8544\lambda_0^7) - \lambda_2^2 (1{,}0146\lambda_0^3 + 1{,}1784\lambda_0^5 +$$
$$+ 0{,}3432\lambda_0^6 + 1{,}5792\lambda_0^7) + \lambda_2^3 (0{,}6720\lambda_0^5 + 1{,}5104\lambda_0^7) -$$
$$- \lambda_2^4 (0{,}1680\lambda_0^5 + 0{,}8256\lambda_0^7) + 0{,}2688\lambda_0^7\lambda_2^5 - 0{,}0418\lambda_0^7\lambda_2^6];$$

$$\lambda_1 = \frac{2x_0}{D - d};\ \lambda_2 = \frac{2x_0}{d};\ \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Численный анализ неравенства $|f_\mathrm{I}(\lambda_1, \lambda_2) - 1| \leqslant 0{,}09$ дает

$$\lambda_1 \leqslant 0{,}03; \quad \lambda_2 \leqslant 0{,}07. \qquad (3.51)$$

Учитывая, что в данном случае $x_0 = d_1 \cos\alpha_1$ (см. рис. 3.6), получим на основании выражений (3.34), (3.49) и (3.51) следующие ограничения на размеры d и D образца (см. рис. 3.8)

$$d \geqslant 1{,}6\,\frac{K_{IG}^2}{\sigma_т^2}\,;\ D \geqslant 2{,}3\,\frac{K_{IG}^2}{\sigma_т^2}. \qquad (3.52)$$

Выполнение условий (3.52) обеспечивает достоверное определение характеристики K_{IG} материала при испытаниях на растяжение цилиндрического образца с внешней кольцевой трещиной.

Рис. 3.8. Схемы нагружения цилиндрического образца с кольцевой трещиной растяжением (*а*) и кручением (*б*).

При кручении образца (см. рис. 3.8) касательные напряжения при $x = x_0$ имеют вид

$$\tau_{yz}(x_0, 0, 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi x_0}}\, f_{III}(\lambda_1, \lambda_2), \qquad (3.53)$$

где

$$f_{III}(\lambda_1, \lambda_2) = \Big\{-2{,}6667(1-\lambda_2)\lambda_0 + \frac{1-\lambda_2}{\lambda_0^2\sqrt{\lambda_2(2-\lambda_2)}}\big[1 + 0{,}7817\lambda_0^2 + 0{,}6111\lambda_0^4 + 1{,}5809\lambda_0^5 + 0{,}4778\lambda_0^6 + 1{,}1069\lambda_0^7 - (2{,}6112\lambda_0^3 + 2{,}0368\lambda_0^5 + 0{,}9268\lambda_0^6 + 1{,}5922\lambda_0^7)(1-\lambda_2^2)\lambda_0^2\big]\Big\} \times$$

$$\times (1 + 0{,}7817\lambda_0^3 + 0{,}6111\lambda_0^4 - 1{,}0247\lambda_0^5 + 0{,}4777\lambda_0^6 - 0{,}9300\lambda_0^7)\sqrt{2\lambda_2\lambda_0^3}.$$

Принимая для удобства эксперимента $\lambda_0 = 0{,}4$, на основании численного анализа найдем, что при $\lambda_1 \leqslant 0{,}09$, $\lambda_2 \leqslant 0{,}059$ функция $f_{III}(\lambda_1, \lambda_2)$ отличается от единицы не более чем на 9 %. Поскольку в этом случае (см. рис. 3.7) $x_0 = d_1$, с учетом выражений (3.35) и (3.49) получим, что размеры образца и трещины должны удовлетворять условиям

$$d \geqslant 56{,}64\,\frac{K_{IIIG}^2}{\sigma_т^2} \text{ и } D \geqslant 141{,}6\,\frac{K_{IIIG}^2}{\sigma_т^2}, \qquad (3.54)$$

обеспечивающим корректное определение характеристики K_{IIIG} при испытаниях по рассмотренной силовой схеме.

3.4. Деформационные критерии в механике разрушения

В зависимости от пластических свойств материала, сложности геометрии элемента конструкции и содержащихся трещин, а также характера напряженно-деформационного состояния в нем выбирается тот или иной подход к определению предельно равновесного состояния. Для металлов, обладающих повышенной пластичностью, более эффективен деформационный подход. В его основу положены деформационные критерии локального разрушения тел с трещинами, которые наиболее полно соответствуют разрушению пластичных материалов и вместе с тем практически могут быть реализованы для многих тел с трещинами.

КРТ-критерий. Рассмотрим упругопластическое тело, ослабленное трещиной длины l и подвергнутое симметрично ее плоскости внешнему нагружению, характеризуемому силовым параметром σ. Задача состоит в определении такого значения $\sigma = \sigma_*$, по достижении которого трещина начнет распространяться. Для решения такой задачи используем классический деформационный критерий прочности

$$\varepsilon_{\max}(l, \sigma_*) = \varepsilon_C, \tag{3.55}$$

где $\varepsilon_{\max}$ — максимальная растягивающая деформация в окрестности трещины (зоне предразрушения); ε_C — предельная растягивающая деформация для материала тела. Экспериментально установлено, что этот критерий наиболее приемлем для материалов с повышенной пластичностью, однако трудно реализуем в прямом применении для тел с трещинами, так как предполагает определение величины $\varepsilon_{\max}$ в зоне предразрушения.

Для преодоления этих трудностей выберем в зоне предразрушения у контура трещины элементарный объем такой высоты h, удлинение которого в результате деформирования материала равно раскрытию трещины в ее тупиковой части (рис. 3.9), т. е.

$$\varepsilon_{\max}(l, \sigma) = \delta_I(l, \sigma)/h. \tag{3.56}$$

Подставляя выражение (3.56) в соотношение (3.55), находим

$$\delta_I(l, \sigma_*) = h\varepsilon_C, \tag{3.57}$$

обозначив $\delta_C = h\varepsilon_C$, получаем

$$\delta_I(l, \sigma_*) = \delta_{IC}. \tag{3.58}$$

Установленный таким образом критерий (3.58) определяет предельно равновесное состояние упругопластического тела с трещиной как момент достижения раскрытием трещины $\delta_I(l, \sigma)$ критического значения δ_{IC}. Этот критерий, названный КРТ-критерием (критическое раскрытие трещины), был впервые сформулирован для отрыва (см. рис. 3.4, *а*). При реализации одного из двух других механизмов смещения берегов трещины (поперечный II и продольный III сдвиги) критериальные уравнения аналогичны предыдущему:

$$\delta_{II}(l, \sigma_*) = \delta_{IIC}, \quad \delta_{III}(l, \sigma_*) = \delta_{IIIC}. \tag{3.59}$$

Они справедливы в чистом виде только для идеально изотропных материалов, которые даже при сложном напряженном состоянии, когда происходят одновременно все виды смещений поверхностей трещины (см. рис. 3.4), разрушаются только по одному из макромеханизмов. Поэтому область безопасных значений раскрытий трещин в ее тупиковой части в координа-

тах $O\xi\eta\zeta$ ($\xi = \delta_I/\delta_{IG}$, $\eta = \delta_{II}/\delta_{IIG}$, $\zeta = \delta_{III}/\delta_{GIII}$) ограничена кубом со стороной, равной единице (рис. 3.10). Если материал не изотропен и возможна реализация все трех макромеханизмов разрушения сразу, то данная область ограничена поверхностью, которая вписана в вышеупомянутый куб. Каноническое уравнение такой поверхности записывается в виде

$$\xi^{n_1} + \eta^{n_2} + \zeta^{n_3} = 1, \qquad (3.60)$$

или

$$\left(\frac{\delta_I}{\delta_{IC}}\right)^{n_1} + \left(\frac{\delta_{II}}{\delta_{IIC}}\right)^{n_2} + \left(\frac{\delta_{III}}{\delta_{IIIC}}\right)^{n_3} = 1. \qquad (3.61)$$

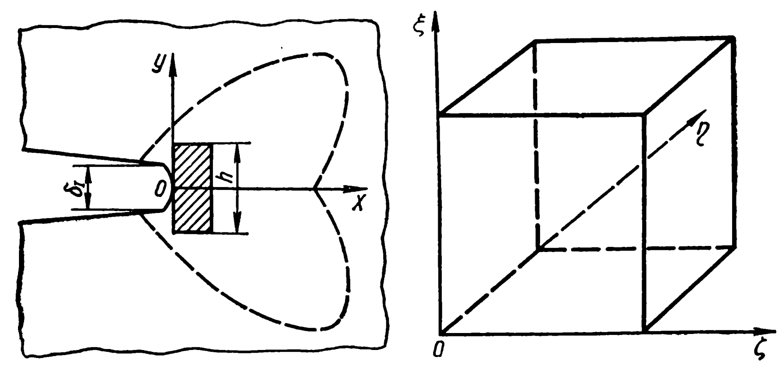


Рис. 3.9. Расчетная схема тупиковой части трещины.

Рис. 3.10. Поверхность предельных раскрытий трещины.

Здесь n_1, n_2, n_3 — неизвестные параметры материала, определяемые экспериментально, которые характеризуют возможность реализации того или иного макромеханизма разрушения.

Кроме характеристик трещиностойкости материалов δ_{IC}, δ_{IIC}, δ_{IIIC}, n_1, n_2 и n_3 для практической реализации критериев (3.55) — (3.61) необходимо также знать величины δ_I, δ_{II} и δ_{III}. Это связано с большими трудностями в решении соответствующих упругопластических задач. Для их преодоления предложены расчетные модели, с помощью которых решение упругопластических задач для тел с трещинами сводится к соответствующим граничным задачам теории упругости. Так, в работах советских исследователей (см. [4]) предложена $\delta_к$-модель, в которой пластическая зона длиной d_1 на продолжении трещины, содержащейся в тонкой пластине (рис. 3.11, *а*), моделируется дополнительным разрезом — трещиной отрыва, на берегах которой действуют нормальные напряжения σ_0 (рис. 3.11, *б*). Напряжения σ_0 отражают усредненное состояние указанной пластической области материала. Если материал пластины идеально упругопластический без упрочнения, то $\sigma_0 \approx \sigma_{0,2}$. В случае упрочняющегося материала величина σ_0 находится следующим образом. Истинная диаграмма растяжения такого материала (рис. 3.12, кривая *1*) заменяется модельной (кривая *2*), ограничивающей ту же площадь, что и истинная. Другими словами, энергия разрушения реального тела и модели одна и та же. На основании этого, а также из геометрических соображений для упрочняю-

щегося материала имеем (см. рис. 3.12)

$$\sigma_0 = \sigma_{0,2} + E(\varepsilon_C - \varepsilon_{0,2}) - \sqrt{E^2(\varepsilon_C - \varepsilon_{0,2})^2 - 2AE}, \qquad (3.62)$$

где $A = \int_{\varepsilon_{0,2}}^{\varepsilon_п} [f(\varepsilon) - \sigma_{0,2}]\, d\varepsilon$; $\sigma = f(\varepsilon)$ — аналитическое описание диаграммы в области пластической деформации при растяжении образца. Длина пластической зоны d_1 в этом случае определяется из условия, что на гра-

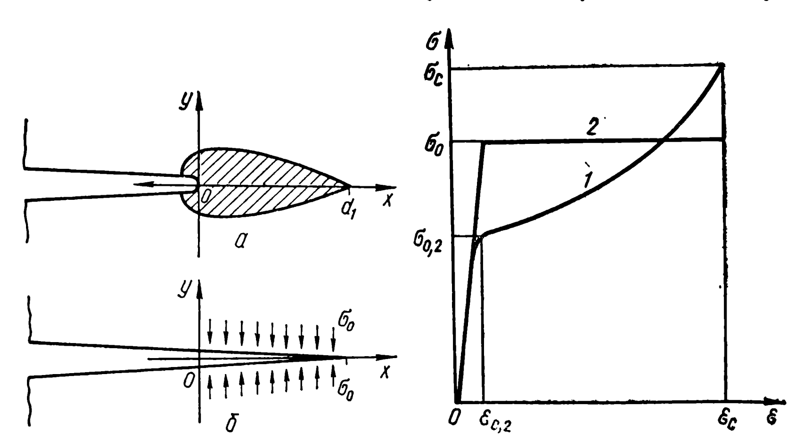


Рис. 3.11. Пластическая зона на продолжении трещины, в тонкой пластине (*а*) и ее расчетная схема (*б*).

Рис. 3.12. Диаграмма растяжения упрочняющегося материала (*1*) и ее модельное представление (*2*).

нице пластической и упругой области справедливо равенство

$$\sigma_y(d_1, 0) = \sigma_0. \qquad (3.63)$$

Если упругие и пластические свойства материала, а также размеры тела и трещина таковы, что выполняются условия автомодельности (3.49), то предельно равновесное состояние такого тела одновременно может быть определено критериями (3.38), (3.39) и (3.58), (3.59). Следовательно, между базовыми характеристиками этих критериев K_{IC}, K_{IIC} и K_{IIIC}, а также δ_{IC}, δ_{IIG} и δ_{IIIC} должна существовать взаимосвязь. Из решения соответствующих упругопластических задач следует, что эти связи имеют следующий вид:

для неупрочняющегося тела

$$\delta_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{\sigma_{0,2}E}, \quad \delta_{IIIC} = \frac{4K_{IIIC}^2}{\pi G \sigma_{0,2}}, \qquad (3.64)$$

для упрочняющегося тела

$$\delta_{IC} = \frac{0{,}6K_{IC}^2}{\sigma_{0,2}E}\left[\frac{(2/\sqrt{3})(1+\mu)(1+\varkappa)\,\sigma_{0,2}}{\varkappa E}\right]^{\varkappa}, \qquad (3.65)$$

где $\varkappa$ — показатель степени упрочнения.

Применения критерия (3.58) для решения конкретных задач продемонстрируем на примере задачи Гриффитса.

Пример 1. Пусть неограниченная пластина, ослабленная прямолинейной трещиной длины $2l$, подвергается растяжению усилиями интенсивности σ (см. рис. 3.2). Задача состоит в определении такого значения внешних усилий $\sigma = \sigma_*$, по достижении которого наступит разрушение пластины. При этом считается, что пластические свойства материала пластины и длина трещины l не удовлетворяют условиям автомодельности (3.49).

Задачу следует решать в рамках $\delta_\text{к}$-модели с использованием критерия (3.58) и соотношения (3.63). В результате определения напряженно-деформированного состояния такой пластины

$$u(x, 0) = \frac{2\sigma}{E}\sqrt{(l + d_1)^2 - x^2} + \frac{\sigma_0}{\pi E}\Big\{(x - l - d_1) \times$$

$$\times \Gamma(l + d_1, x, l) - (x + l + d_1)\,\Gamma(l + d_1, x, -l) -$$

$$- 4\sqrt{(l + d_1)^2 - x^2}\arccos\frac{l}{l + d_1}\Big\} \qquad (|x| \leqslant l + d_1), \qquad (3.66)$$

где

$$\Gamma(l, x, \xi) = \ln\frac{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}};$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2 - (l + d_1)^2}}\Big\{\pi(\sigma - \sigma_0)\left(x - \sqrt{x^2 - (l + d_1)^2}\right) +$$

$$+ 2\sigma_0 x \arcsin\frac{l}{l + d_1} + \sigma_0\sqrt{x^2 - (l + d_1)^2}\Big[\arcsin\frac{(l + d_1) - xl}{(l + d_1)(x - l)} -$$

$$- \arcsin\frac{(l + d_1) + xl}{(l + d_1)(x + l)}\Big]\Big\}$$

$$(x \geqslant l + d_1). \qquad (3.67)$$

Рис. 3.13. Схема нагружения тела с трещиной.

После подстановки соотношения (3.66) и (3.67) соответственно в уравнения (3.58) и (3.63) получим

$$\sigma_* = \frac{2}{\pi}\sigma_0 \arccos\{e^{-\frac{\pi\delta_{IC}E}{8l\sigma_0}}\}. \qquad (3.68)$$

Из анализа формул (3.6), (3.44) и (3.68) следует, что критерии (3.1), (3.37) и (3.58) дают одинаковые результаты при выполнении условий автомодельности (3.49) и учете зависимостей (3.43) и (3.64).

Двухпараметрический деформационный критерий. Локальное разрушение трехмерных тел с трещинами и большой текучестью материала за ее пределом $\delta_\text{к}$-модель уже не может достаточно корректно описать. Для таких случаев предлагается двухпараметрический деформационный критерий [6].

Если трехмерное упругопластическое тело, ослабленное трещиной отрыва, растягивается внешними усилиями, характеризуемыми силовым

параметром σ (рис. 3.13), а длина трещины l и минимальное расстояние от ее вершины до свободной границы $(h—l)$ намного больше протяженности пластической зоны d_1, то напряжения и деформации в окрестности трещины описываются коэффициентом интенсивности напряжений K_{I}. В этом случае раскрытие в вершине трещины

$$\delta_{\text{I}}^{(0)} = \frac{\alpha' (1 - \mu^2) K_{\text{I}}^2}{\sigma_{0,2} E}, \tag{3.69}$$

где α' — числовой коэффициент, зависящий от характеристи упрочнения материала. На основании выражений (3.56) и (3.69) деформация в окрестности вершины трещины

$$\varepsilon_{\text{I}}^{(0)} = \frac{\alpha' (1 - \mu^2)}{\sigma_{0,2} E h} K_{\text{I}}^2, \tag{3.70}$$

или

$$\varepsilon_{\text{I}C}^{(0)} = \frac{\alpha' (1 - \mu^2)}{\sigma_{0,2} E h} K_{\text{I}C}^2. \tag{3.71}$$

Если длина трещины l или размер перешейка в ее сечении $(h—l)$ соизмеримы с протяженностью пластической зоны, т. е. если пластическая зона занимает практически все рабочее сечение, то наличие трещины не вызывает больших возмущений в пластической деформации. В этом случае, как и для бездефектного тела пластическая деформация записывается выражением

$$\varepsilon_{\text{I}}^{(\text{п})} = \varepsilon_{\text{н}} = f(\sigma_{\text{н}}). \tag{3.72}$$

Функция $f(\sigma_{\text{н}})$ служит характеристикой материала и находится по диаграммам растяжения на основании стандартных испытаний данного материала.

Для оценки прочности деформируемого тела с трещиной, материал которого обладает большой пластичностью, применяется классический деформационный критерий разрушения (3.55). Длина трещины считается произвольной, а деформация ε_1 у ее вершины представляется интерполяционной формулой

$$\varepsilon_{\text{I}}^s = (\varepsilon_{\text{I}}^{(0)})^s + (\varepsilon_{\text{н}})^s, \tag{3.73}$$

где $\varepsilon_{\text{I}}^{(0)}$, $\varepsilon_{\text{н}}$ — определяются формулами (3.70) и (3.72); s — параметр интерполяции, который находят экспериментально или при сравнении с частными значениями ε_1. Формула (3.73) удовлетворяет рассмотренным выше граничным случаям ($d \ll l$ и $d_1 \simeq l$).

На основании соотношений (3.70) и (3.71) критерий (3.73) можно записать и в таком виде:

$$K_{\text{I}}^{2s} K_{\text{I}C}^{-2s} + \varepsilon_{\text{н}}^s \varepsilon_C^{-s} = 1. \tag{3.74}$$

Этот критерий называется двухпараметрическим, так как содержит одновременно две группы базовых параметров, характеризующих свойства материала,— трещиностойкость и макропластичность (пластичности больших объемов).

Рассмотрим в качестве примера идеально пластический материал с некоторым значением предела текучести $\sigma_{0,2}$ и предельной растягивающей

деформации

$$\varepsilon_C = \varepsilon_{0,2} = \sigma_{0,2} E^{-1}, \tag{3.75}$$

где $\varepsilon_{0,2}$ — см. рис. 3.12.

Пусть бесконечная пластина из такого материала, ослабленная трещиной, подвергнута однородному растяжению на бесконечности так, как это показано на рис. 3.2. В этом случае $K = \sigma\sqrt{\pi l}$, $\varepsilon_н = \sigma/E$. Пользуясь этими равенствами, формулой (3.75) и критерием (3.74), найдем выражение для предельной нагрузки σ_*. Сравнение полученного результата по критерию (3.74) и по $\delta_к$-модели для рассматриваемой задачи (см. пример 1) показывает, что наилучшее соответствие при $s = 2$. С учетом этого, а также равенства (3.75) для высокопластичных материалов критерий (3.74) окончательно записывается в следующем виде:

$$K_I^4 K_{IC}^{-4} + \sigma_*^2 \sigma_{0,2}^{-2} = 1. \tag{3.76}$$

Предельная нагрузка σ_* для этой же задачи на основании $\delta_к$-модели определяется по формуле

$$K_I^2 / K_{IC}^2 = \pi^2 \sigma_*^2 / [8\sigma_{0,2}^2 \ln \sec (\pi\sigma_*/2\sigma_{0,2})]. \tag{3.77}$$

Различия в значениях предельной нагрузки, полученных по формулам (3.76) и (3.77), не превышает 4 %, однако их расчет по формуле (3.77) значительно проще.

Критериальное соотношение (3.74) выгодно представить кривой на координатной плоскости безразмерных параметров K_I/K_{IC} и $\varepsilon_н/\varepsilon_C$ (или в данном случае K_I/K_{IC} и $\sigma_*/\sigma_{0,2}$), проходящей через точки (0.1) и (1.0), которые отвечают идеально хрупкому и полностью пластическому разрушению соответственно (рис. 3.14: кривая *1* построена по критерию (3.76), *2* — по $\delta_к$-модели). Ограниченная этой кривой и координатными осями область безопасна, т. е. для значений $\varepsilon_н/\varepsilon_C$ и K_I/K_{IC}, находящихся внутри области, разрушение не происходит. Когда координаты $\varepsilon_н/\varepsilon_C$, K_I/K_{IC} попадают во внешнюю область, тело разрушается.

Представление критерия разрушения в безразмерных координатах особенно удобно при обработке экспериментальных данных.

Аналогичный двухпараметрический критерий, предложенный Е. М. Морозовым,

$$K_I^2 K_{IC}^{-2} + \sigma_*^2 \sigma_{0,2}^{-2} = 1, \tag{3.78}$$

при решении задачи Гриффитса приводит к зависимости, графически представленной на рис. 3.14 кривой *3*.

Наиболее близки между собой результаты, полученные по критерию (3.76) (см. рис. 3.14, кривая *1*) и $\delta_к$-модели (кривая *2*). Поэтому в дальнейшем более детально проанализированы эти два подхода на ряде тестовых задач (примеры 2, 3) для идеально упругопластических тел с трещинами. Кроме того, на основании примеров 4—6 показано применение критерия (3.74) для встречающихся силовых схем разрушения тел с трещинами и приведено экспериментальное подтверждение этих результатов для различных материалов.

Пример 2. Пусть бесконечная пластина с прямолинейной трещиной длиной $2l$ из идеально пластического материала растягивается на бесконечности усилиями интенсивности σ (см. схему на рис. 3.13). Задача состоит в нахождении предельной внешней нагрузки $\sigma = \sigma_*$.

Коэффициент интенсивности напряжений определяется по формуле

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}, \qquad (3.79)$$

а номинальная деформация $\varepsilon_н$ — на основании равенства

$$\varepsilon_н = \sigma E^{-1} \; (\sigma \leqslant \sigma_{0,2}). \qquad (3.80)$$

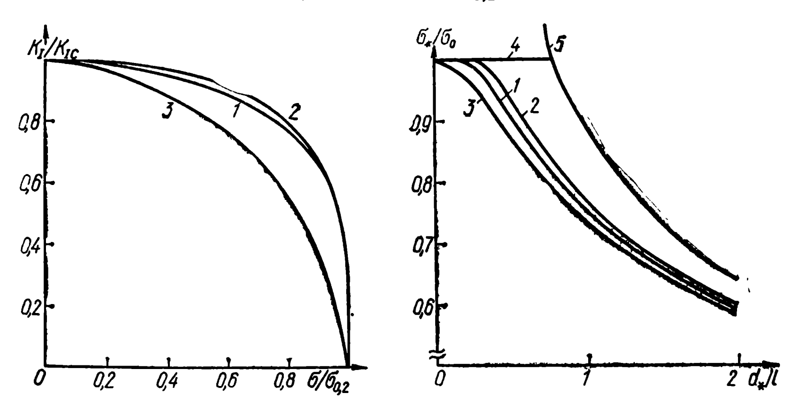


Рис. 3.14. Кривые предельных состояний, ограничивающие безопасную область значений $\sigma/\sigma_{0,2}$, K_I/K_{IC}:

1 — по критерию (3.76); *2* — по $\delta_к$-модели; *3* — по критерию (3.78).

Рис. 3.15. Зависимость предельной нагрузки для пластины из идеально пластического материала от относительной длины трещины:

1 — по формуле (3.68); *2, 3, 4* — по формуле (3.81) соответственно при $\beta = 1$, $\beta = 1{,}1$ и $\beta = \infty$; *5* — по формуле (3.44).

Тогда критериальное соотношение (3.76) с использованием выражений (3.79), (3.80) сводится к виду

$$\sigma_*/\sigma_{0,2} = \sqrt{2}\beta \left[1 + \left(\frac{\pi^4\beta^4 l^2}{16 d_*^2} + 1\right)^{1/2}\right]^{-1/2}, \qquad (3.81)$$

где $\beta = \varepsilon_C/\varepsilon_{0,2}$; $d_* = \pi E \delta_{IC}/8\sigma_{0,2}$. Предельная внешняя нагрузка $\sigma = \sigma_*$ в рамках $\delta_к$-модели рассчитывается по формуле

$$\sigma_*/\sigma_{0,2} = 2\pi^{-1} \arccos \exp(-d_* l^{-1}). \qquad (3.82)$$

В отличие от формулы (3.82) соотношение (3.81) включает также параметр пластичности материала β, что является важным преимуществом критерия (3.74). Результаты, полученные по формуле (3.82) (рис. 3.15, кривая *1*) и по формуле (3.81) (кривые *2, 3*), не отличаются более чем на 4 %. На этом рисунке приведена также кривая *5*, построенная на основании соотношения (3.44).

Пример 3. Пусть полоса шириной $2L$ с центральной плоской трещиной длиной $2l$ растянута на бесконечности усилиями интенсивности σ (рис. 3.16); $\beta = 1{,}1$. Задача состоит в определении предельной внешней нагрузки $\sigma = \sigma_*$.

Как и в предыдущем случае, коэффициент интенсивности напряжения для данной силовой схемы определяется по формуле

$$K_I = \sigma_н \sqrt{\pi l_{эф}}, \qquad (3.83)$$

где $\sigma_н = \sigma(1-\varphi_1)$; $l_{эф}=\varphi_1 \sec(\pi\varphi_1/2)(1-\varphi_1)^2 L$; $\varphi_1=l/L$, а деформация — по формуле

$$\varepsilon_н = \sigma_н/E \qquad (\sigma_н \leqslant \sigma_{0,2}). \qquad (3.84)$$

Подставляем соотношения (3.83) и (3.84) в критерий (3.76):

$$\sigma_н/\sigma_{0,2} = \sqrt{2}\,\beta \left[1 + \left(\frac{\pi^4\beta^4 l_{эф}^2}{16 d_*} + 1\right)^{1/2}\right]^{-1/2}. \qquad (3.85)$$

Сравнение зависимостей предельных номинальных напряжений $\sigma_н^*/\sigma_{0,2}$ от относительной длины трещины, рассчитанных по формуле (3.85), с результатами численного решения этой задачи в рамках $\delta_к$-модели показало их хорошее соответствие как для коротких трещин ($\varphi_1 \to 0$), так и для случая, когда ширина перешейка стремится к нулю, т. е. $\varphi_1 \to 1$ (рис. 3.17).

Пример 4. Пусть длинный цилиндр диаметром D с внешней кольцевой трещиной и внутренним контуром диаметром d растягивается усилиями P, направленными вдоль его оси (см. рис. 3.8, *а*). Задача состоит в определении предельной растягивающей силы $P = P_*$. Коэффициент интенсивности напряжений определяется так:

$$K_I = \sigma_н \sqrt{\pi a_1}, \qquad (3.86)$$

где $\sigma_н = \dfrac{4P}{\pi d^2}$; $a_1 = \dfrac{\beta_1(1-\beta_1)D}{2(4-3{,}2\beta_1)}$; $\beta_1 = \dfrac{d}{D}$.

Предполагается, что материал цилиндра подчиняется закону линейного упрочнения, т. е.

$$\varepsilon_н = f(\sigma) = \begin{cases} \sigma_н/E & (\sigma_н \leqslant \sigma_{0,2}), \\ \sigma_{0,2}/E + (\sigma_н - \sigma_{0,2})/E_1 & (\sigma_н > \sigma_{0,2}), \end{cases} \qquad (3.87)$$

где E_1 — модуль линейного упрочнения.

Характеристика ε_C определяется через относительное сужение гладкого цилиндрического образца ψ по формуле

$$\varepsilon_C = -\ln(1-\psi). \qquad (3.88)$$

С использованием соотношений (3.86)—(3.88) критерий (3.74) сводится к следующему рекуррентному соотношению:

$$\sigma_{н*} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_1}} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_н}{\varepsilon_C}\right)^2\right]^{1/4}, \qquad (3.89)$$

где $\varepsilon_н = f(\sigma_н)$.

Для его проверки испытывали цилиндрические образцы из стали 30ХГСА (отпуск при температуре 623 К, D = 5 ... 25 мм, d/D = 0,24 ... ... 0,74). На основании диаграмм растяжения определены основные прочностные характеристики стали: $\sigma_{0,2}$ = 1541 МПа, $\sigma_в$ = 1761 МПа, ψ = = 0,48, E_1/E = 0,014, ε_C = 0,616, K_{IC} = 71 МПа$\cdot\sqrt{м}$.

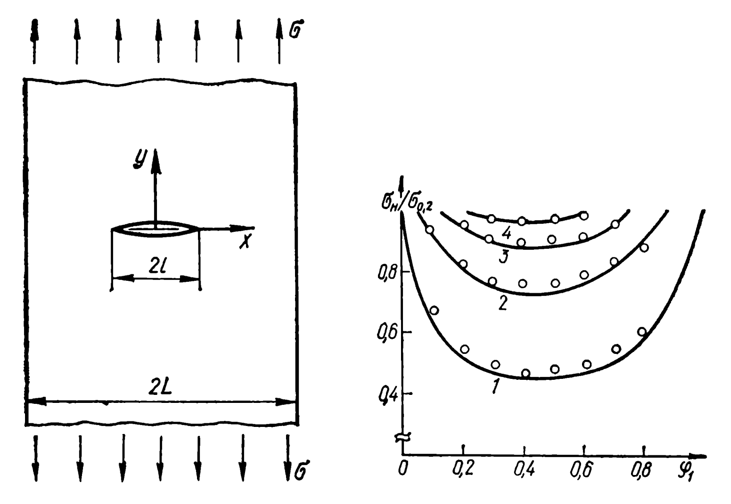


Рис. 3.16. Схема растяжения с прямолинейной трещиной.

Рис. 3.17. Зависимость предельных нормальных напряжений от относительной длины трещины φ_1 при $2d_* = 0{,}1$ (*1*); 0,2 (*2*); 0,3 (*3*); 0,4 (*4*), рассчитанных по формуле (3.85) (сплошные линии) и по результатам решения этой задачи в рамках КРТ-критерия (точки).

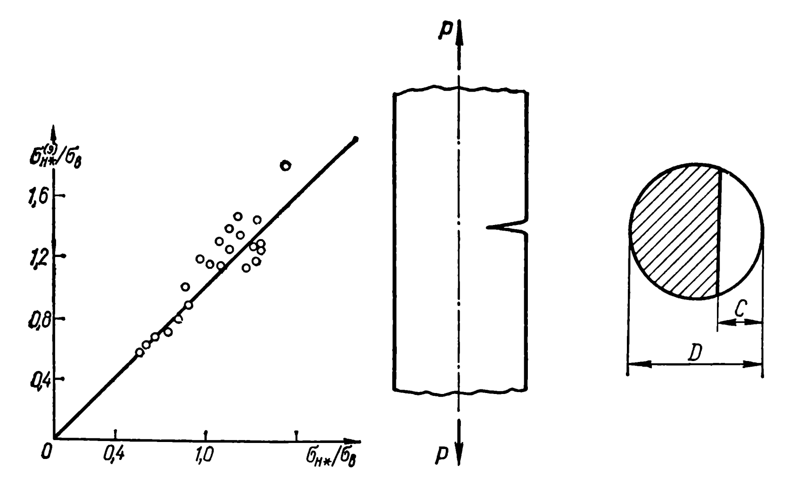


Рис. 3.18. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений предельной нагрузки при растяжении цилиндрического образца с кольцевой трещиной (сталь 30ХГСА).

Рис. 3.19. Схема растяжения цилиндрического образца с сегментной трещиной.

Располагая исходными данными о геометрических параметрах, а также о механических характеристиках материала и пользуясь рекуррентными соотношениями (3.89), вычисляли предельные нетто-напряжения $\sigma_{н*}$. Их сравнение с найденными экспериментально $\sigma^{э}_{н*}$ свидетельствует (рис. 3.18), что критерий (3.74) достаточно точно определяет разрушение тела с трещиной, материал которого находится в состоянии общей текучести за пределом $\sigma_в$.

Пример 5. Пусть длинный цилиндр диаметром D с краевой сегментовидной трещиной глубиной c нагружен центральной растягивающей силой P (рис. 3.19). Задача состоит в определении предельной растягивающей силы $P = P_*$.

В окрестности середины контура трещины коэффициент интенсивности напряжений определяется с помощью метода граничной интерполяции (см. п. 5.6):

$$K_I = q_1 \sqrt{\pi a_2}\,. \tag{3.90}$$

Здесь

$$q_1 = \frac{4P}{\pi D^2} f_1(\xi_1); \tag{3.91}$$

$$f_1(\xi_1) = \frac{\pi}{4S}\left\{1 - \frac{yE}{2I}\left[\xi_1 - 2y - 1{,}5512\,(1-\xi_1)\right]\right\};$$

$$a_2 = \pi b\,(1-\xi_1)\left[17{,}9546\xi_1 + 0{,}7943\,(1-\xi_1) + (0{,}5621\xi_1 - \right.$$

$$\left. - 0{,}6183)\,\xi_1(1-\xi_1)\right]^{-1}; \quad \xi_1 = C/D;$$

I, S, y — центральный момент инерции, площадь и расстояние до центра тяжести сегмента. Принимается, что материал цилиндра подчиняется закону линейного упрочнения (3.87), в котором необходимо заменить величину $\sigma_н$ на q_1.

С использованием выражений (3.87), (3.90) и (3.91) критерий разрушения (3.74) запишется в виде рекуррентного соотношения

$$q_1 = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_2}}\left(1 - \frac{\varepsilon_н^2}{\varepsilon_C^2}\right)^{1/4}, \tag{3.92}$$

где $\varepsilon_н = f(q_{1*})$; $f(q_{1*})$ определяется соотношением (3.87), а предельная растягивающая сила — в виде

$$P_* = \pi D^2 q_{1*}/4f_1(\xi_1). \tag{3.93}$$

Для проверки формул (3.92), (3.93) использованы экспериментальные данные испытаний разрушения растяжением высокопрочной проволоки из стали У9А диаметром $D = 2{,}3$ мм ($\sigma_{0,2} = 1200$ МПа; $\sigma_в = 1670$ МПа, $\psi = 0{,}20$, $E_1/E = 0{,}019$, $\varepsilon_C = 0{,}2231$, $K_{IC} = 100$ МПа$\cdot\sqrt{м}$) (рис. 3.20, линия). Там же представлены экспериментальные значения (точки). Сравнение экспериментальных и расчетных данных свидетельствует об эффективности этого подхода при оценке прочности таких материалов, как прутки, проволока, стержни.

Пример 6. Пусть пластина толщиной h и шириной $2W$ с поверхностной полуэллиптической трещиной (рис. 3.21) растягивается усилиями интенсивности σ. Задача состоит в определении предельной внешней нагрузки $\sigma = \sigma_*$.

Коэффициент интенсивности напряжений находится с помощью метода граничной интерполяции (см. п. 5.6):

$$K_I = \sigma \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} (\cos^2 \theta + \Lambda^2 \sin^2 \theta)^{1/4} M_{1,2} (\beta_1, \Lambda) F_1 (\beta_1, \theta) F_L, \quad (3.94)$$

где $E(k)$ — эллиптический интеграл второго рода; $\Lambda = \frac{a}{b}$; $M_{1,2} = \frac{E(k)}{\sqrt{\Lambda}} \left\{1 - \left(1 - \frac{M_1(\Lambda)\sqrt{\Lambda}}{E(\Lambda)}\right) \exp[-1{,}48\beta_1^2/(1 + 6\Lambda^3)]\right\}$ (здесь

$$M_1 = 1 + 0{,}12(1 + \Lambda^2)^{-1};$$

$$k^2 = 1 - \Lambda^2); \qquad \beta_1 = \frac{a}{h};$$

$$F_1(\beta_1, \theta) = 1 + (0{,}1 + 0{,}53\beta_1^3) \frac{8\theta^3}{\pi^3};$$

$$F_L = 1 + \beta_1^2 \frac{b^2}{L^2}.$$

Номинальная деформация определяется выражением

$$\varepsilon_н = \frac{\sigma \varepsilon_C}{\sigma_в (1 - 0{,}25\pi\beta_1 b L^{-1})}. \quad (3.95)$$

На основании критериального уравнения (3.74), а также соотношений (3.93) и (3.94) предельное номинальное напряжение $\sigma_н^*$ находится по формуле

$$\sigma_н^* = \left\{2/\left\langle 1 + \left[1 + \left(\frac{4\sigma_в a_{эф}}{K_{IC}}\right)^4\right]^{1/2}\right\rangle\right\}^{1/2}, \quad (3.96)$$

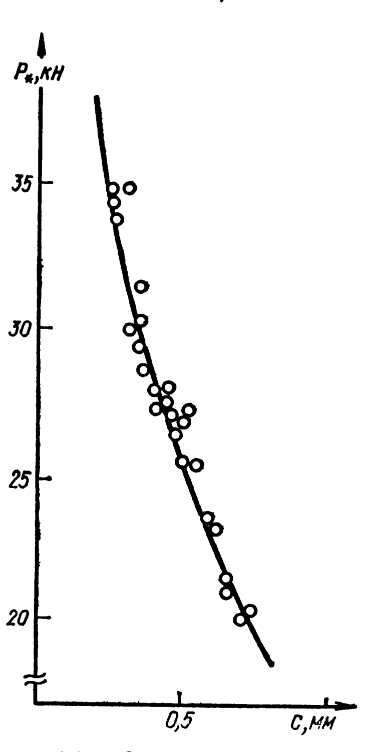


Рис. 3.20. Зависимость предельной нагрузки от глубины сегментовидной трещины при растяжении высокопрочной проволоки из стали У9А.

где

$$a_{эф} = b \left\{\left\langle 1 - \left[1 - \frac{\sqrt{\Lambda}(1{,}12 + \Lambda^2)(1 - 0{,}36\Lambda)}{1 + \Lambda^2}\right] \exp[-1{,}48\beta_1^2 \times (1 + 6\Lambda^3)^{-1}]\right\rangle \left[1 + \beta_1^2 \frac{b^2}{L^2}\right] \left[1 - \frac{\pi}{4} \beta_1 \frac{b}{L}\right]\right\}^2.$$

Рис. 3.21. Схема растяжения пластины с поверхностной полуэллиптической трещиной.

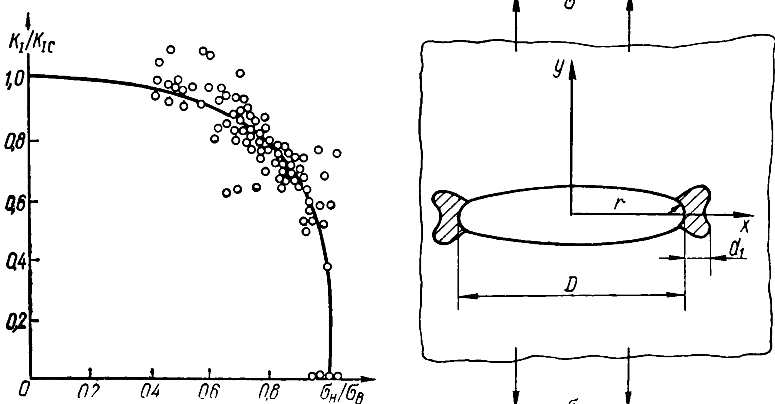


Рис. 3.22. Критериальная кривая предельных состояний полосы с поверхностной трещиной для алюминиевого сплава 1201.

Рис. **3.23. Щелевой дефект в нагруженном упругопластическом теле.**

При этом предельная внешняя нагрузка

$$\sigma_* = \sigma_н^*\left(1 - \frac{\pi}{4}\beta_1\frac{b}{L}\right). \qquad (3.97)$$

Данные соотношения (3.96), (3.97) проверены экспериментально (рис. 3.22) на пластинах из алюминиевого сплава 1201 ($h = 8$ мм, $2L_2 = 20$ мм, $b = 1 \div 4{,}5$ мм, $a/b_1 \simeq 0{,}6$, $K_{IC} = 20$ МПа$\cdot\sqrt{м}$, $\sigma_в = 200 \div 450$ МПа).

Деформационный критерий для тел с щелевыми дефектами. Этот критерий позволяет определить критическое значение внешней нагрузки для тел как с острыми трещиноподобными дефектами, так и с дефектами, вершины которых закруглены [10]. Суть его состоит в следующем. Пусть упругопластическое тело, ослабленное сплюснутой полостью, минимальный радиус кривизны r поверхности которой намного меньше диаметра D_2 ее срединного сечения ($r \ll D_2$), подвергнуто растяжению, как это показано на рис. 3.23. Для простоты принято, что тело нагружено симметрично относительно срединной плоскости $y = 0$ рассматриваемой полости.

Исходя из деформационной теории прочности полагаем, что разрушение тела ($\sigma = \sigma_*$) начинается при выполнении условия (3.55). Для определения величины ε (σ, D_2, r) используем метод граничной интерполяции (см. п. 5.6). Такой подход предусматривает использование некоторых граничных случаев рассматриваемой задачи, которые могут быть решены сравнительно просто. Например, при сопоставимости размеров пластической зоны d_1 (см. рис. 3.23) с радиусом закругления вершины полости r значение деформации в зоне предразрушения ε_1 будет, очевидно, пропорционально раскрытию δ_I полости в ее тупиковой части и обратно пропорционально радиусу закругления r, т. е.

$$\varepsilon_{(1)} = \alpha_1\frac{\delta_I}{r} \quad (r \sim d_1), \qquad (3.98)$$

где α_1 — коэффициент пропорциональности, значение которого определяется следующим образом. Так как радиус r — величина малая по сравнению с размером дефекта (D_2), то раскрытие полости будет таким же, как и для трещины, и определяется через коэффициент интенсивности напряжений K_I в виде

$$\delta_I = \beta\,\frac{K_I^2(1-\mu^2)}{\sigma_т E}, \qquad (3.99)$$

где β — числовой коэффициент, зависящий от параметра упрочнения материала и отношения $\sigma_т/E = \varepsilon_т$. С использованием выражения (3.99) соотношение (3.98) представляется в виде

$$\varepsilon_{(1)} = \alpha_1\beta(1-\mu^2)\frac{K_I^2}{r\sigma_т^2}\varepsilon_т. \qquad (3.100)$$

Для упругого тела деформация $\varepsilon_у$ в вершине концентратора определяется так:

$$\varepsilon_у = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi r}\,E} \qquad (3.101)$$

Согласуя выражения (3.100) и (3.101) в момент возникновения пластиче-

ской области ($2K_I/(E\sqrt{\pi r}) = \varepsilon_т$), определяем коэффициент пропорциональности

$$\alpha_1 = 4/[\pi\beta(1-\mu^2)]. \tag{3.102}$$

Следовательно, на основании (3.100) и (3.102)

$$\varepsilon_{(1)} = \frac{4K_I^2}{\pi r \sigma_т^2}\varepsilon_т. \tag{3.103}$$

Полученное выражение для деформации (3.103) согласуется с подходом Нейбера, определяющим деформацию в вершине концентратора через коэффициент концентрации упругопластической деформации K_e. При сравнении с полем деформации, определяемым J-интегралом в окрестности математического разреза, выражение (3.103) будет приобретать смысл деформации на некотором пропорциональном радиусу r расстоянии от вершины математического разреза. При этом, если $r \to 0$, значение K_e стремится к бесконечности, что ограничивает применение подхода, основанного на понятии коэффициента концентрации деформации.

Для трещины-разреза ($r = 0$) мерой деформированности материала в окрестности ее вершины служит раскрытие между ее берегами в процессе нагружения тела. Эта величина имеет размерность длины. Безразмерная характеристика деформации в окрестности вершины трещины $\varepsilon_{(0)}$ записывается в виде (см. рис. 3.23)

$$\varepsilon_{(0)} = \frac{\delta_I}{\delta_{IC}}\varepsilon_C. \tag{3.104}$$

Выражение (3.104) имеет физический смысл деформации на некотором характерном для данного материала расстоянии от вершины трещины. Критерий разрушения (3.55) в этом случае согласуется с деформационным критерием Мак-Клинтока.

С использованием метода граничной интерполяции (см. п. 5.6) вводится мера деформированности материала около вершины концентратора для произвольных радиусов заокругленности r по интерполяционной формуле

$$\varepsilon^{-\nu} = \varepsilon_{(1)}^{-\nu} + \varepsilon_{(0)}^{-\nu}. \tag{3.105}$$

Здесь параметр интерполяции $\nu > 0$ определяется из эксперимента и в большинстве случаев равен двум. При подстановке выражений для $\varepsilon_{(1)}$ и $\varepsilon_{(0)}$ соотношение (3.105) принимает следующий вид:

$$\varepsilon = \{1 + (r/r_0)^\nu\}^{-1/\nu}(K_I/K_{IC})^2\varepsilon_C, \tag{3.106}$$

где

$$r_0 = \frac{4K_{IC}^2}{\pi E\sigma_т\varepsilon_C}. \tag{3.107}$$

Из выражения (3.106) вытекают граничные случаи для острой трещины (3.104) и для достаточно закругленного концентратора (3.103).

Подстановкой выражения (3.106) в деформационный критерий разрушения (3.55) получается критериальное уравнение

$$K_{I*} = \{1+(r/r_0)^\nu\}^{1/2\nu}K_{IC} \quad (K_{I*} = K_I(\sigma_*, D, L)),$$

или в безразмерных координатах в виде инвариантной кривой

$$y^{2\nu} = 1 + x^{2\nu}, \quad y = K_{I*}/K_{IC}, \quad x = (r/r_0)^{1/2}, \quad \nu = 2. \qquad (3.108)$$

Здесь K_I — коэффициент интенсивности напряжений для эквивалентного ($D = 2l$) идеального разреза ($r = 0$); K_{IC} — критическое значение K_I (трещиностойкость) для данного материала; r — радиус закругления реального дефекта; r_0 — некоторая характеристика материала, представленная равенством (3.107).

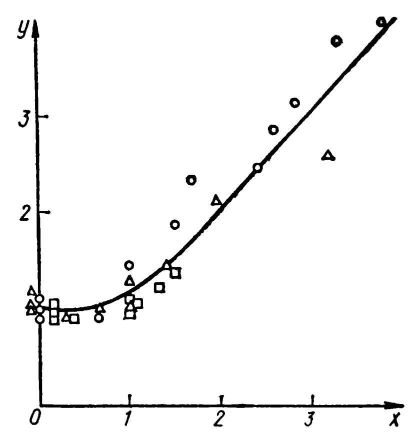


Рис. 3.24. Зависимость критического значения параметров нагрузки от параметра кривизны вершины дефекта x (○, □ — аустенитные стали марки 4340 (США), △ — феррито-перлитная сталь).

Критериальное соотношение (3.108) апробировано на экспериментальных данных разрушения образцов Шарпи для двух типов аустенитных сталей марки 4340 (США) (○ — $K_{IC} = 38$ МПа$\cdot\sqrt{\text{м}}$, $r_0 = 31$ мкм; □ —57 МПа$\cdot\sqrt{\text{м}}$, 260 мкм) и феррито-перлитной стали (△— 24 МПа$\cdot\sqrt{\text{м}}$, 128 мкм) с боковыми надрезами с различными радиусами закругления вершины ($0 \leqslant r \leqslant 1300$ мкм). На рис. 3.24 графически изображена зависимость (3.108) при $\nu = 2$ (сплошная линия), а также нанесены экспериментальные данные (точки). Как видно из рисунка, соотношение (3.108) при $\nu = 2$ описывает как качественно, так и количественно критическое состояние образцов в непрерывном диапазоне изменения радиуса закругления вершины концентратора r. Если он меньше величины r_0, определяемой выражением (3.106), то концентратор ведет себя при разрушении как острая трещина.

Уравнение (3.108) приближенно можно представить так:

$$y = \begin{cases} 1 & (r < r_0), \\ x & (r \geqslant r_0), \end{cases} \quad \text{или} \quad K_{I*} = \begin{cases} K_{IC} & (r < r_0), \\ \sqrt{\dfrac{r}{r_0}}\, K_{IC} & (r \geqslant r_0). \end{cases} \qquad (3.108а)$$

Отсюда видно, что параметр r_0 как бы разграничивает вытянутые полости с закругленными концами на полости-трещины ($r < r_0$) и полости-вырезы с некоторым радиусом закругления r их концов при $r \geqslant r_0$.

3.5. Критерии распространения трещин в телах при сложных напряженных состояниях

Рассмотрим трещину в деформируемом однородном изотропном теле (рис. 3.25). Предположим, что при нагружении не происходит смыкания берегов трещины, а при определении напряженно-деформированного со-

стояния инерционными эффектами можно пренебречь. В этом случае (см. п. 3.3) на достаточно малом (по сравнению с размерами трещины и ее расстоянием от границы тела), но превышающем размеры пластической зоны удалении от контура трещины компоненты напряжений будут определяться соотношениями (3.26), (3.27).

Предельно равновесное состояние тела с трещиной определяется на основе критериального уравнения (3.36), включающего коэффициенты интенсивности напряжений K_i ($i = \mathrm{I, II, III}$), их критические значения K_{iC}, а также и другие параметры тела. В случае сложной нагрузки оно должно дополняться, например, еще критерием для нахождения направления развития трещины. Таким образом, условия локального разрушения у фронта трещины состоят из двух в общем взаимосвязанных, но имеющих самостоятельное значение уравнений.

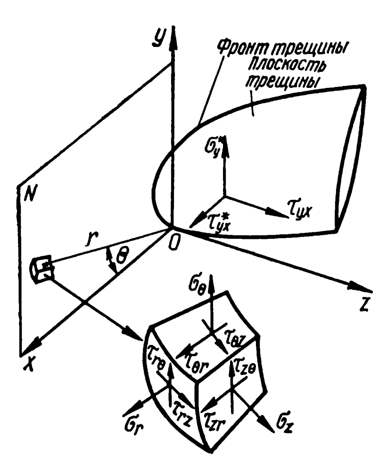


Рис. 3.25. Локальная декартовая $Oxyz$ и цилиндрическая $Or\theta z$ системы координат в точке O фронта трещины и компоненты тензора напряжений (N — нормальная плоскость, ось z выступает здесь в роли касательной).

Каждый критерий подобно классическим гипотезам прочности базируется на заданной характеристике напряженно-деформированного состояния материала у фронта трещины и заключается в следующем утверждении. Разрушение начнется в направлении, в котором эта величина экстремальна и, когда экстремум достигнет некоторого критического значения, определяемого на основании простого опыта. Характеристиками могут быть компоненты напряжений (силовые критерии), деформация (деформационные) или потенциальная энергия деформации (энергетические), которые находятся до или, что существенно сложнее, после виртуального прироста трещины.

Все критерии условно делятся на простые и сложные. К первым относятся те, которые учитывают только сингулярную составляющую напряжений и, следовательно, записываются посредством коэффициентов интенсивности напряжений или выражаемых через них величин. Ко вторым — критерии, полученные в результате так или иначе уточненного анализа напряженного состояния у вершины трещины, в том числе те, которые учитывают регулярную составляющую напряжений и содержат добавочные, обычно экспериментально устанавливаемые параметры, характеризующие согласно определенным модельным представлениям форму трещины, пластическую зону у ее вершины, структуру материала и т. п.

Простые критерии. Для определения прочности элементов конструкций первым хронологически использовался силовой критерий максимальных растягивающих напряжений (см. формулу (2.72)), с которыми связывали разрушение тел с трещинами еще до создания механики хрупкого разрушения. Принято считать, что распространение трещины происходит перпендикулярно наибольшим растягивающим напряжениям, которые определяются без учета возмущений, внесенных ее наличием. (Это не так уже далеко от истины.) А. А. Гриффитс впервые использовал силовой

критерий для расчета предельных напряжений в теле, ослабленном произвольно ориентированными трещиноподобными дефектами. Моделируя эти дефекты сплюснутыми изолированными эллиптическими полостями, он определял локальное разрушение как разрыв по исходящим из их вершин площадкам действия максимальных растягивающих напряжений, достигших критических значений. Качественно новый этап в развитии проблемы произвольно ориентированных (косых) трещин наступил в середине 1960-х гг. на базе только что сформировавшегося силового подхода теории трещин в понятиях коэффициентов интенсивности напряжений, когда независимо и почти одновременно несколькими исследователями был сформулирован критерий максимальных окружных напряжений σ_θ в условиях плоской задачи, названный σ_θ-критерием. Г. П. Черепанов ссылается при этом на аналогию с ранее предложенным критерием развития трещин продольного сдвига, в связи с чем была выдвинута гипотеза локальной симметрии: «распределение напряжений и смещений вблизи точки O (т. е. вершины трещины — авт.) симметрично относительно направления трещины». Ф. Эрдоган и Дж. С. Си с целью проверки идеи А. А. Гриффитса исследовали условия начального развития косой трещины в растягиваемой полосе из органического стекла. В работе В. В. Панасюка и Л. Т. Бережницкого впервые (1963 г.) критериальные уравнения для определения угла начального развития косой трещины записаны через величины K_{I} и K_{II} и предельные нагрузки. Эти уравнения применялись к пластине с трещиной по дуге окружности, а также с косой трещиной, причем расчетные результаты в последнем случае были подтверждены экспериментально на пластинах из силикатного и органического (ПММА) стекол. На основании σ_θ-критерия построены диаграммы предельных напряжений при двухосном растяжении – сжатии пластины с трещиной [4], а затем он был обобщен на трехмерное тело под нагрузкой, содержащей составляющие I, II и III типов [1].

Согласно σ_θ-критерию (называемому также критерием обобщенного нормального отрыва) трещина будет развиваться в направлении радиуса-вектора при $\theta = \theta_C$ (где θ_C — критическое значение координатного угла) (рис. 3.25), для которого окружные напряжения σ_θ (они направлены перпендикулярно радиусу-вектору $\theta = \theta_C$) имеют максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений ($K_{\text{I}\theta} = \lim\limits_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{\theta\max}$, где r — см. рис. 3.25). Предельная нагрузка вычисляется из условия $K_{\text{I}}(\sigma_*, l, \theta_C) = K_{\text{I}C}$.

В табл. 3.1 приведены основные уравнения для определения угла θ_C и предельной нагрузки. Некоторые зависимости между углом θ_C и ориентацией трещины, вытекающие из указанных уравнений, представлены также графически на рис. 3.26 (при $\mu = 0{,}3$). Из графиков видно, что приближенно выполняется условие перпендикулярности прироста трещины растягивающим усилиям, т. е. $\theta_C \approx \frac{\pi}{2} - \alpha_1$.

Указанные в табл. 3.1 критерии являются, по сути, различными вариантами применения первой гипотезы прочности в сопротивлении материалов к трещинам, произвольно ориентированным в поле действующих напряжений. При использовании гипотезы максимальных касательных напряжений получаются критерии (см. табл. 3.1), которые зависят от вида разрушения: разрушение хрупким отрывом должно происходить по площадкам с наименьшими (нулевыми) касательными напряжениями, т. е. автоматически возвращаемся к критериям максимальных нормальных напряжений. Ориентируясь на разрушение по площадкам главных каса-

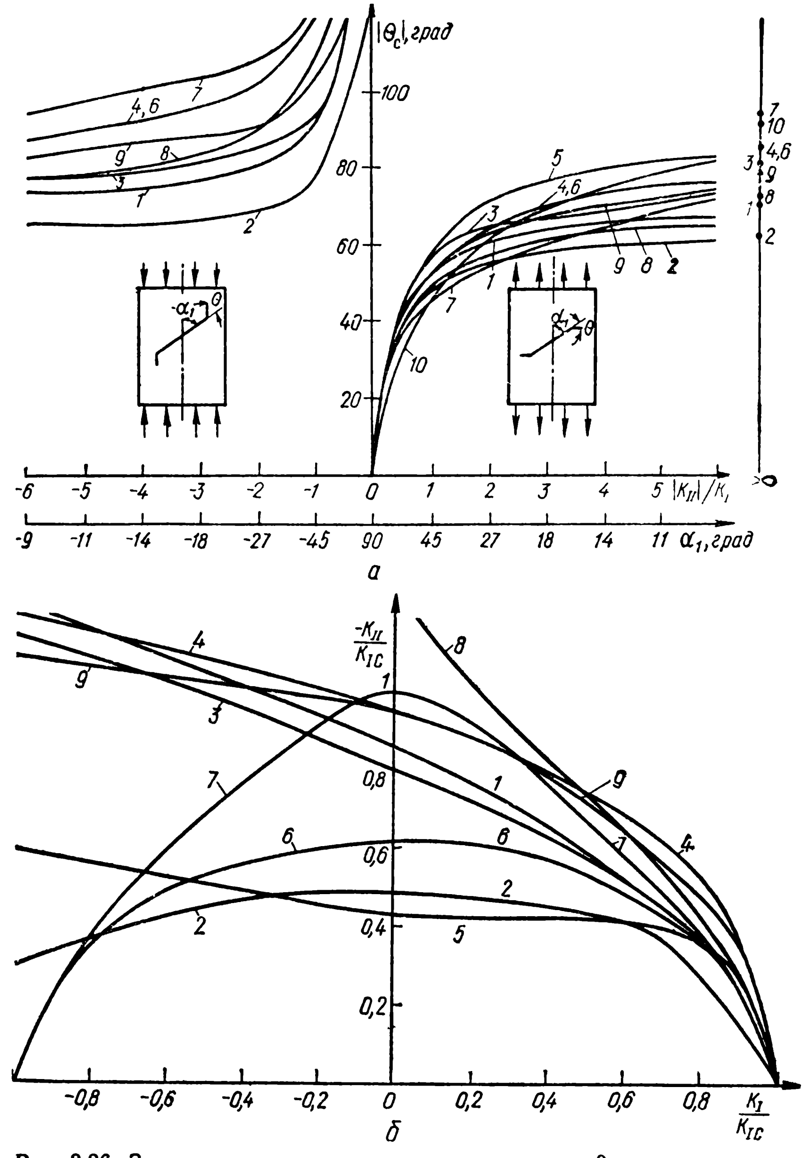


Рис. 3.26. Зависимость угла ответвления трещины θ_c от отношения $|K_{II}|/K_I$ или угла ориентации трещины α_1 (*а*) и диаграммы предельных соотношений (*б*), ограничивающие область безопасных значений K_I, $|K_{II}|$, рассчитанные по различным критериям (*1* — σ_θ; *2* — ε_θ; *3* — G (для одноосного растяжения); *4* — S; *5* — S_d; *6* — S; *7* — Γ'; *8* — T; *9* — $\tilde{\sigma}_w$ — см. табл. 3.1) и условию перпендикулярности прироста трещины и нагрузки ($\theta_c = 90° - \alpha$ (*10*)).

Таблица 3.1. **Критериальные уравнения для определения угла θ_C и предельной нагрузки**

Критерий	Угол θ_C	Предельная нагрузка
σ_θ	$\theta_C = 2\,\mathrm{arctg}\,[(1 - \sqrt{1+8n^2}\,\mathrm{sgn}\,K_I)/(4n)]$	$\cos^2\theta_C/2\,[K_{I_*}\cos\theta_C/2 - 3K_{II_*}\sin\theta_C/2] = K_{IC}$
	Плоская деформация	
ε_θ	$\sin\theta_C/2\,[-3(1-\mu)\cos^2\theta_C - \mu/\cos^2(\theta_C/2) - 2\sin^2\theta_C/2] + n\cos\theta_C/2\,[3(1-\mu)\times(2\sin^2\theta_C/2 - \cos^2\theta_C/2) + \mu(9\sin^2\theta_C/2 - 1)] = 0$	$K_I\cos\theta_C/2\,[2(1-\mu)\cos^2\theta_C/2 - \mu(1+\sin^2\theta_C/2)] - K_{II}\sin\theta_C/2\,[3(1-\mu)\times\cos^2\theta_C/2 - \mu(1-3\sin^2\theta_C/2)] - (1-2\mu)K_{IC} = 0$
	Плоско-напряженное состояние	
ε_θ	$\sin\theta_C/2\,[-3\cos^2\theta_C/2 + \mu(2\sin^2\theta_C/2 - \cos^2\theta_C/2)] + n\cos\theta_C/2\,[3(2\sin^2\theta_C/2 - \cos^2\theta_C/2) + \mu(9\sin^2\theta_C/2 - 1)] = 0$	$K_I\cos\theta_C/2\,[\cos^2\theta_C/2 - \mu(1+\sin^2\theta_C/2)] - K_{II}\sin\theta_C/2\,[3\cos^2\theta_C/2 + \mu(1-3\sin^2\theta_C/2)] - (1-\mu)K_{IC} = 0$
S	$[(1-\varkappa)\sin\theta_C + \sin 2\theta_C] + 2[2\cos 2\theta_C + (1-\varkappa)\cos\theta_C]n + [(\varkappa-1)\sin\theta_C - 3\sin 2\theta_C]n^2 = 0$	$(1+\cos\theta_C)(\varkappa - \cos\theta_C)K_I^2 + 2[\sin 2\theta_C - (\varkappa-1)\sin\theta_C]\times K_IK_{II} + [(\varkappa+1)(1-\cos\theta_C) + (1+\cos\theta_C)(3\cos\theta_C - 1)]K_{II}^2 - 2(\varkappa-1)K_{IC}^2 = 0$
S_d	$3/4\sin 2\theta_C - 1/2\sin\theta_C + (3\cos 2\theta_C - \cos\theta_C)n + (\sin\theta_C - 9/4\sin 2\theta_C)n^2 = 0$	$(3/4\sin^2\theta_C + \cos^2\theta_C/2)K_I^2 + (3\cos\theta_C - 1)\sin\theta_C K_IK_{II} + (3/4 + 9/4\cos^2\theta_C + \sin^2\theta_C/2)K_{II}^2 - K_{IC}^2 = 0$

Критерий	Угол θ_C	Предельная нагрузка
	Плоская деформация	
S_d	$3\sin 2\theta_C - 1/2(\varkappa-1)\sin\theta_C + [12\cos 2\theta_C - (\varkappa-1)^2\cos\theta_C]n + [1/2(\varkappa-1)^2\sin\theta_C - 9\sin 2\theta_C]n^2 = 0$	$[1/2(\varkappa-1)^2(1+\cos\theta_C) + 3\sin^2\theta_C]K_I^2 + [6\sin 2\theta_C - (\varkappa-1)^2\sin\theta_C]K_IK_{II} + [1/2(\varkappa-1)^2(1-\cos\theta_C) + 3 + 9\cos^2\theta_C]K_{II}^2 - (\varkappa-1)^2K_{IC}^2 = 0$
$\bar{S}$	$(1-\varkappa)\sin\theta_C + \sin 2\theta_C + 2[2\cos 2\theta_C + (1-\varkappa)\times\cos\theta_C]n + [(\varkappa-1)\sin\theta_C - 3\sin 2\theta_C]n^2 = 0$	$(\varkappa-1/2)K_I^2 + (\varkappa+3/2)K_{II}^2 = (\varkappa-1/2)K_{IC}^2$
Г	$\operatorname{tg}\theta_C = -2n/(n^2+1)$	$K_I^4 + 6K_I^2K_{II}^2 + K_{II}^4 = K_{IC}^4$
Γ_T	$(1-3n^2) + 4n\operatorname{ctg}2\theta_C + n^2\sec\theta_C = 0$	$(K_I^2+K_{II}^2)\cos\theta_C - 2K_IK_{II}\sin\theta_C - K_{IC}^2 = 0$
σ_W	$3[2\varkappa - 1 - (5+4\varkappa)\cos\theta_C + (1+2\varkappa)\cos^2\theta_C - 3\cos^2\theta_C]n^3 - \sin\theta_C[8+7\varkappa-(7+5\varkappa)\times\cos\theta_C - 3\cos^2\theta_C]n^2 + (1+\cos\theta_C)[4+3\varkappa-(5+7\varkappa)\cos\theta_C+\cos^2\theta_C]n - \sin\theta_C(1+\cos\theta_C)(1+2\varkappa-\cos\theta_C) = 0$	$S = S_C$

Примечание. $\varkappa = 3 - 4\mu$

тельных напряжений (τ-критерий), придем к определенным вариантам (в зависимости от добавочных предположений) критерия максимальных касательных напряжений (в этом случае предельное состояние тела будет контролироваться величинами K_{IIC} и (или) K_{IIIC}).

По аналогии с силовыми критериями можно на основании гипотезы максимальных относительных удлинений сформулировать деформационный критерий ε_θ, базирующийся на максимальных окружных деформациях растяжения:

$$\varepsilon_\theta = \sigma_\theta/E - \mu(\sigma_r + \sigma_z)/E. \qquad (3.109)$$

Результаты расчета по деформационным и энергетическим критериям в отличие от таковых по силовым зависят от коэффициента Пуассона (см. табл. 3.1).

Наиболее широко распространен предложенный Дж. С. Си S-критерий, постулирующий рост трещины в направлении минимальной интенсивности энергии деформации W, которая определяется выражением

$$W = \frac{1}{2E}[\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 + 2\mu(\sigma_\theta\sigma_r + \sigma_r\sigma_z + \sigma_z\sigma_\theta) +$$

$$+ 2(1+\mu)(\tau_{\theta r}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2)]. \qquad (3.110)$$

Предельное состояние наступает тогда, когда в этом направлении интенсивность энергии деформации

$$S = \lim_{r\to 0} 2\pi r W \qquad (3,111)$$

достигает критического значения S_C, определяемого для трещин отрыва формулой

$$S_C = (1-2\mu)(1+\mu)K_{IC}^2/2E. \qquad (3.112)$$

Принимается, что напряжения σ_θ в плоскости развития трещины растягивающие. Поскольку энергия деформации при продольном сдвиге не зависит от угла θ, коэффициент K_{III} не влияет на направления развития трещины и при чистом продольном сдвиге ($K_I = K_{II} = 0$, $K_{III} \neq 0$) его найти нельзя. Известны модификации S-критерия. Одни (Л. Т. Бережницкий и др.) учитывают лишь энергию формоизменения тела (S_d-критерий), другие приравнивают критическому значению среднее значение интенсивности S, т. е. вводят в рассмотрение

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta)\,d\theta, \qquad (3.113)$$

а направление развития трещины вычисляют по направлению минимальной интенсивности энергии деформации W.

Г. П. Черепанов предположил, что рост трещины происходит в направлении вектора потока энергии Г в ее вершину, когда он станет равным удвоенной плотности энергии разрушения (Г-критерий). Известен также критерий, в основу которого положены эквивалентные напряжения по обобщенной гипотезе прочности Писаренко—Лебедева

$$\sigma_\theta = \sqrt{(1-k^2)\sigma_1^2 + k^2\sigma_i^2}, \qquad (3.114)$$

где $k = \sigma_{\text{р}}/\sigma_{\text{с}}$ — отношение пределов прочности (текучести) при растяжении и сжатии;

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 - 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2) -}$$

интенсивность напряжений. Поскольку эта гипотеза в предельных случаях при $k = 0$ и $k = 1$ переходит в первую и четвертую, такой критерий объединяет определенным образом σ_θ- и S_d-критерии.

Сложные критерии. Для лучшего согласования теоретического прогноза о развитии произвольно ориентированной трещины в поле действующих напряжений с экспериментальными данными в указанные выше критерии вводятся параметры, которые считаются постоянными материала. Наиболее распространен и логически обоснован взгляд, согласно которому характеристики напряженно-деформированного состояния необходимо определять не в самой вершине трещины, а на некотором расстоянии. Поскольку сингулярная часть напряжений пропорциональна $r^{-1/2}$, то параметр r_0 можно определить из эксперимента, только учитывая регулярную составляющую напряжений или хотя бы ее постоянную часть. В такой постановке были обобщены перечисленные критерии, что позволило несколько улучшить согласование аналитических результатов с экспериментальными (см. анализ таких исследований в [9]).

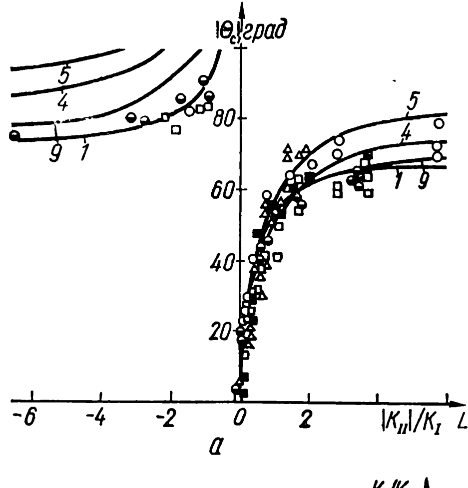
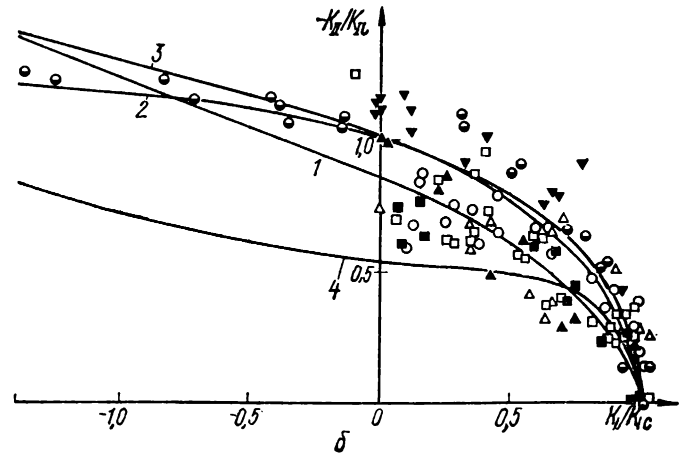


Рис. 3.27. Сопоставление расчетных (сплошная линия) зависимостей угла ответвления трещины θ_c (*а*) и диаграмм предельных состояний (*б*) с экспериментальными (точки):

■ — ПММА; □ — силикатное стекло; ○ — полиуретан; ▲ — сталь марки 4340 (США); △ — алюминиевые сплавы марок DTD 5050, 2024-Т3 и 7075—ТТ7651; ▽ — твердый сплав марки ВК15; ◓ — графит (обозначения кривых те же, что и на рис. 3.26).



Для учета микронеоднородностей структуры материала предложена концепция макронапряжений (М. Я. Леонов, К. Н. Русинко), согласно которой локальное разрушение происходит при достижении макронапряжениями значений сопротивления отрыву. Макронапряжения вычисляются по закону Гука через макродеформации, определяемые как разность относительных перемещений противоположных точек сферы радиуса r (параметр материала), проходящей через вершину трещины. При этом предполагается, что разрушение происходит в плоскости с максимальным макронапряжением.

Сопоставление критериев с опытными данными. Экспериментальные исследования проводили главным образом при комбинированной нагрузке, содержащей компоненты P_{I} и P_{II}, реализуя ее в большинстве случаев путем одноосного растяжения пластин с косой центральной трещиной, хотя встречаются и другие схемы нагружения: кручение тонкостенных труб, двухосное растяжение пластин, сжатие дисков, зажатие пластины цилиндрическими штампами. Испытывали преимущественно модельные материалы, классическими представителями которых являются полиметилметакрилат (ПММА), силикатное стекло и полиуретан.

Сопоставления критических значений угла θ_C ответвления трещины, по различным критериям между собой и с экспериментальными данными показывают следующее. При малых значениях отношения $|K_{\mathrm{II}}| / K_{\mathrm{I}} = n$ все критерии приводят практически к одинаковым результатам. Расхождение между рассчитанными по различным критериям значениями θ_C возрастает с увеличением отношения n, однако при $n \leqslant 1$ не превышает $\pm$ 10 % среднего значения угла θ_C. Полоса рассеяния экспериментальных данных (рис. 3.27, *а*) при малых положительных значениях n ($n \lesssim 1$) перекрывает все теоретические кривые, однако по мере роста сдвиговой составляющей экспериментальные точки для хрупких материалов (сплав ВК15, ПММА и стекло) сосредотачиваются вдоль кривой, полученной по σ_θ-критерию, как при растяжении ($n > 0$), так и при сжатии ($n < 0$). В последнем случае при расчете предполагалось, что берега трещины (щели) не контактируют, поскольку расстояние между ними больше их перемещений под нагрузкой.

Кривые предельных значений коэффициентов K_{I} и K_{II}, рассчитанные по различным критериям, сразу расходятся с точки $K_{\mathrm{I}}/K_{\mathrm{I}C} = 1$, $K_{\mathrm{II}} = 0$ (см. рис. 3.27, *б*). Сильно рассеяны и экспериментальные точки, причем лишь отдельные наборы, относящиеся к конкретным материалам, описываются определенным уравнением, соответствующим обычно σ_θ-, S- или σ_W-критерию (см. табл. 3.1). Поэтому на практике очень часто предпочитают использовать для аналитического описания опытных результатов вместо рассмотренных выше критериальных уравнений эмпирические уравнения, например, типа

$$\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{I}C}}\right)^a + \left(c\,\frac{K_{\mathrm{II}}}{K_{\mathrm{I}C}}\right)^b = 1, \tag{3.115}$$

где a, b, c — постоянные, определяемые из условия наилучшего приближения.

3.6. Критерии разрушения, учитывающие структурные параметры материала

В расчетных моделях механики разрушения особенности структуры реального материала (они проявляются в особенностях зоны предразрушения) обычно учитываются через характеристики его трещиностойкости.

Существуют, однако, расчетные модели, которые в рамках механики сплошной среды учитывают особенности структуры материала путем введения в рассмотрение дополнительных параметров, связанных с элементами структуры материала. Одной из первых расчетных моделей такого плана является расчетная схема Нейбера, в которой уравнения механики сплошной среды не используются лишь в области возле вершины надреза (поскольку механика сплошной упругой среды неприменима для области в непосредственной близости от надреза). У вершины надреза вводится малая, но конечная частица с линейным размером r'. Эта микроструктурная константа r' принимается за дополнительную характеристику материала. Действующие на поверхности такой частицы напряжения определяются посредством усреднения упругих напряжений, возникающих в ней как сплошной среде при заданных внешних нагрузках. В данной постановке для острого надреза коэффициент концентрации напряжений определяется по соответствующим уравнениям, полученным из механики сплошной среды, после замены действительного радиуса в вершине надреза r_0 на условный $r_{усл}$, который вычисляется по формуле

$$r_{усл} = r_0 + [(2\pi - \omega)/(\pi - \omega)]\, r', \qquad (3.116)$$

где ω — угол раскрытия надреза (для прорези $\omega = 0$ и $r_{усл} = r_0 + 2r'$).

Поскольку r' можно считать константой материала, коэффициент концентрации напряжений даже в случае острого надреза ($r_0 = 0$) остается конечным*.

Аналогичный подход для оценки прочности деформируемого материала развит также в работах М. Я. Леонова и К. Н. Русинко. Существо их подхода состоит в следующем. В реальных материалах всегда есть микродефекты и микронеоднородности. Поэтому деформация тела в достаточно малом объеме имеет случайный характер. С учетом этого принимается, что относительные перемещения точек реального деформируемого материала в силу статических законов практически совпадают с перемещениями соответствующих точек деформируемой сплошной среды, если только расстояние между ними превосходит структурную характеристику материала, обозначаемую через $2r_{усл}$. При этом предполагается также, что суммарное влияние микронеоднородностей реального материала, заключенных внутри сферы радиуса $r_{усл}$, на механические свойства одинаково. По этой причине вводятся усредненные деформации этой сферы и к ним применяются зависимости, установленные при обычных механических испытаниях материалов. Таким образом, достигается простейшее обобщение теории хрупкого разрушения Гриффитса и несколько изменяются условия возникновения пластических деформаций.

В результате компонент S_n нормального макронапряжения в направлении нормали **n** вычисляется по формуле

$$S_n = 2G\varepsilon_n + \lambda\Theta, \qquad (3.117)$$

где $G = \dfrac{E}{2(1-\mu)}$; ε_n — макроудлинение; $\lambda = \dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$.

Макроудлинение $\varepsilon_n(x, y, z, \rho)$ представляет относительное удлинение, соответствующее нормали **n**, диаметра сферы радиусом $r_{усл}$ с центром в точке (x, y, z). В направлении координатных осей x, y, z оно определяется

---

* Вопрос об определении взаимосвязи r' с физическими характеристиками структуры материала представляет дополнительную задачу.

Таблица 3.2. **Критерии разрушения, учитывающие структурные параметры материала**

Формула	Авторы критериев	Примечание
Деформационные критерии прочности		
$K_{IC} = En\sqrt{2\pi d}$	Дж. М. Краффт	n — коэффициент деформационного упрочнения; d — параметр, именуемый «размером зоны процесса» и являющийся константой материала
$K_{IC} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_т E \varepsilon_C n^2}$	Г. Т. Хан, А. Р. Розенфильд	n — то же, что в критерии Краффта
$K_{IC} = \left[2\sigma_т E\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \times D\right]^{1/2} v_{тв}^{-1/6}$	Дж. Райс, М. Джонсон	$v_{тв}$, D — объемная доля и средний диаметр твердых частиц
$\frac{K_{IC}}{\sqrt{3}\sigma_т} = \left\{r\left[4{,}62 \times \left(\frac{E}{\sqrt{3}\sigma_т}\right)\frac{e^{\varepsilon'_C}+1}{1-\mu^2} + 8{,}81\,\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{v_{тв}}{0{,}09}\right)\right]\right]\right\}^{1/2}$	П. Ф. Томассон	ε'_C — нормальная критическая деформация в условиях объемного напряженного состояния; r — радиус вершины трещины; $v_{тв}$ — то же, что в критерии Райса и Джонсона
$K_{IC}^2 = \pi r_C \sigma_т^2 \times \left[\left(\frac{\varepsilon'_C}{\varepsilon_C}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{1/n}\right]^{n+1}$	В. Вейсс	r_C — микроструктурная константа Нейбера; n — то же, что в критерии Краффта
$K_{IC} = \left[\beta\tau_т E(1-\mu^2)^{-1} \times \ln\frac{1}{1-\psi}\right]^{1/2}$	В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, С. Е. Ковчик	β—структурный параметр, который приравнивается к величине зерна
$K_{IC} = A\sqrt{\sigma_т}\,(\varepsilon_C)^{\frac{1}{2m}}$	Дж. М. Барсом	A — некоторый регулируемый параметр; ε_C и m — константы материала
$K_C^2 = 2\alpha' G\sigma_т\varepsilon_C H$	П. В. Лью	α' — численная константа; H — толщина образца

Формула	Авторы критериев	Примечание
$K_{IC} = nE\sqrt{d_т/\pi}$	Дж. Р. Ирвин	Обозначения те же, что в критерии Краффта
$K_{IC} = \frac{\sigma_* - \sigma_т}{4\sqrt{N}}$	А. Г. Прист	σ_* — константа, именуемая предельным разрушающим напряжением; N — число включений в единице площади
$K_{IC} = \sqrt{A E \sigma_т \varepsilon_{\alpha\beta}}$	Дж. Малкин, А. С. Тетельман	$A = 2{,}2$ мм; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — интенсивность деформации при разрушении
Критерии прочности по критическому напряжению		
$K_{IC} = K_\mu \left(\frac{\sigma_C}{\sigma_т}\right)^{\frac{1-n}{2n}}$	Г. С. Писаренко, А. Я. Красовский	$K_\mu = \sigma_C\sqrt{\pi\rho_C}$; ρ_C — характеристическое расстояние
$K_{IC} = \frac{A}{\sigma_т^{1,5}}$	Дж. М. Краффт, А. М. Сулнан	Уравнение получается из предыдущего при n=0,25
$K_{IC} = \frac{B}{\sigma_т^{1,25}}$	Р. К. Пандей, Дж. Д. Харидас, С. Банери	То же при $n = 2/7$
$K_{IC} = C\frac{\sigma_C^3}{\sigma_т^2}$	Г. Т. Хан, Г. Д. Хогланд, А. Р. Розенфильд	То же при $n = 0{,}2$
$K_{IC} = 2{,}89\sigma_т \times \left[\exp\left(\frac{\sigma_{ск}}{\sigma_т} - 1\right) - 1\right]^{1/2}\sqrt{r_0}$	А. С. Тетельман	$\sigma_{ск}$ — критическое скольное напряжение; r_0—предельная эффективная острота концентратора
$\frac{\sigma_{ск}}{\sigma_т} = f\left[\frac{\chi}{(K_{IC}/\sigma_{0,2})^2}\right]$	Р. О. Ричи, Дж. Ф. Нотт, Р. Райс	$\sigma_{ск}$ — то же, что в критерии Тетельмана; χ — характеристическое расстояние от фронта трещины —константа материала, зависящая лишь от его микроструктуры
$K_{IC}\,\sigma_т^2 = \left(\frac{\sigma_{ск}}{2{,}35}\right)^3$	Г. Т. Хан, Г. Р. Хозланд, А. Р. Розенфильд	Обозначения те же, что в предыдущем критерии

Формула	Авторы критериев	Примечание
$J = I_n \sigma_т r_C \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_п}{\tilde{\varepsilon}_0} \right)^{n+1} \times \left[\chi + \frac{1+\chi}{m_0} \right]^{-\frac{1+n}{n}}$ или $\tilde{K} = \sqrt{I_n \sigma_т E \rho_C} \times \tilde{\varepsilon}_п^{\frac{n+1}{2}} \times \left[\frac{\chi + \frac{1+\chi}{m_0}}{\tilde{\sigma}_0} \right]^{-\frac{1+n}{2n}}$	А. Я. Красовский, В. А. Вайншток	$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \{[\tilde{\varepsilon}_{11}(0) - \tilde{\varepsilon}_{22}(0)]^2 + [\tilde{\varepsilon}_{11}(0) - \tilde{\varepsilon}_{33}(0)]^2 + [\tilde{\varepsilon}_{33}(0) - \tilde{\varepsilon}_{22}(0)]\}^{1/2}$; $\tilde{\sigma}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{[\tilde{\sigma}_{11}(0) - \tilde{\sigma}_{22}(0)]^2 + [\tilde{\sigma}_{22}(0) - \tilde{\sigma}_{33}(0)]^2 + [\tilde{\sigma}_{33}(0) - \tilde{\sigma}_{11}(0)]^2\}^{1/2}$; I_n — функция показателя степени деформационного упрочнения; r_C — характеристическое расстояние от вершины трещины, определяемое экспериментально; $m_0 = \left[\left(1 + \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11}} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{22}\sigma_{33}}{\sigma_{11}^2} \right) \right]^{1/2}$; χ — постоянная, которую находят из опыта на кручение; $\tilde{K}$ и $\tilde{I}$ соответствуют K_{IC} и I_{IC} или K_C и I_C в зависимости от того, взяты ли значения m_0, σ_0, ε_0, I_n для плоской деформации или для плоского напряженного состояния; m_0, σ_0, ε_0, I_n известны из численного решения упругопластической задачи

по формулам

$$\varepsilon_x(x, y, z, r_{усл}) = \frac{1}{2r_{усл}} [u_x(x + r_{усл}, y, z) - u_x(x - r_{усл}, y, z)],$$

$$\varepsilon_y(x, y, z, r_{усл}) = \frac{1}{2r_{усл}} [u_y(x, y + r_{усл}, z) - u_y(x, y - r_{усл}, z)], \qquad (3.118)$$

$$\varepsilon_z(x, y, z, r_{усл}) = \frac{1}{2r_{усл}} [u_z(x, y, z + r_{усл}) - u_z(x, y, z - r_{усл})].$$

Приведенная выше расчетная модель может быть применена для тел с макро- и микротрещинами, в том числе и для определения условий возникновения начальных трещин.

Начиная с 1950-х годов предложены и другие критерии разрушения, учитывающие структурные параметры материала. В зависимости от состояния материала критерии такого типа делятся на две группы: деформационные критерии прочности и критерии прочности по максимальным растягивающим напряжениям. Сводка основных зависимостей, содержащихся в них, дана в табл. 3.2.

3.7. Микрофрактографические аспекты кратковременной трещиностойкости конструкционных сплавов

Электронно-фрактографический анализ поверхностей изломов образцов с предварительно созданными трещинами — один из важных способов установления роли и влияния микроструктуры на трещиностойкость материала. С помощью этого способа установлено, что в зависимости от уровня напряженности материала, который определяется коэффициентом интенсивности напряжений K_I (распространение трещины реализуется по механизму нормального отрыва), и структуры материала (стали) на поверхностях изломов формируются различные микрообразования (некоторые типичные микрообразования схематически показаны на рис. 3.28). На стадии страгивания трещины чаще всего в ее вершине формируется зона вытягивания [12, 13] (рис. 3.29, *а*). При низких уровнях трещиностойкости материала эта зона может отсутствовать (или не обнаруживаться), а раскрытие трещины осуществляется путем интеркристаллитного или транскристаллитного скола (схемы *1*, *2* рис. 3.28, рис. 3.29, *б*, *в*). Развитие предварительно созданной трещины без образования зоны вытягивания наблюдается не только при низкоэнергетическом скольном разрушении, но и в случаях, когда во время разрушения пластичность ограничена, например когда усталостная трещина продвигается в области микровязкого ямочного разрушения.

Чаще всего после образования зоны вытягивания следует процесс формирования ямочного микрорельефа. Однако при низкоэнергоемком разрушении (низких значениях трещиностойкости) наблюдается также переход зоны вытягивания к скольному разрушению (схемы *3*, *4* рис. 3.28, рис. 3.29, *г*, *д*). Разрушение сталей со средним уровнем трещиностойкости соответствует многоступенчатым схемам разрушения *5*, *6* (рис. 3.28), при высоких уровнях трещиностойкости трещина распространяется по схемам *7* и *8* (рис. 3.28, рис. 3.29, *е*).

Были предприняты попытки найти такие элементы микростроения изломов, которые могли бы служить в качестве фрактографической меры трещиностойкости материалов. В этом плане наибольшее внимание исследо-

вателей привлекла зона вытягивания — особенности ее строения, геометрические размеры и связь последних с параметрами трещиностойкости. Зона вытягивания соответствует начальной стадии раскрытия трещины (ее подрастанию за счет возникновения пластической зоны и вытягиванию вершины) до наступления основного акта разрушения — распространения трещины. Поверхность этой зоны часто содержит так называемые ступеньки скольжения, характеризующие этапы пластического течения (рис.

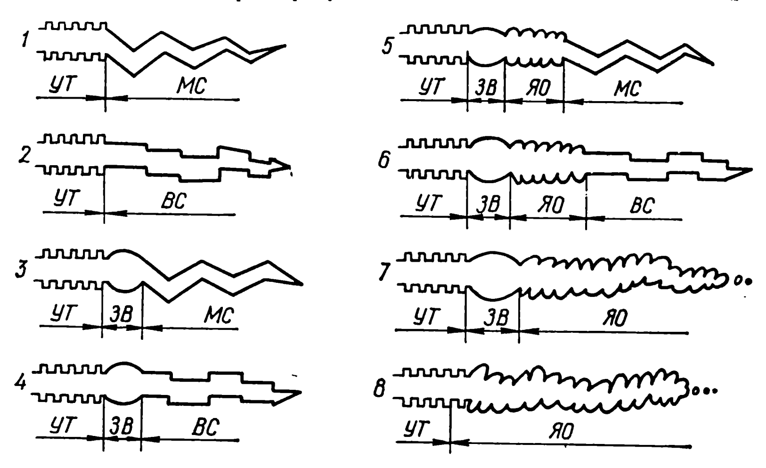


Рис. 3.28. Схема, иллюстрирующая типы микростроения изломов образцов при оценке K_{Ic}:

УТ — предварительная усталостная трещина; *МС* — межзеренный скол; *ВС* — внутризеренный скол; *ЗВ* — зона вытягивание; *ЯО* — ямочный отрыв.

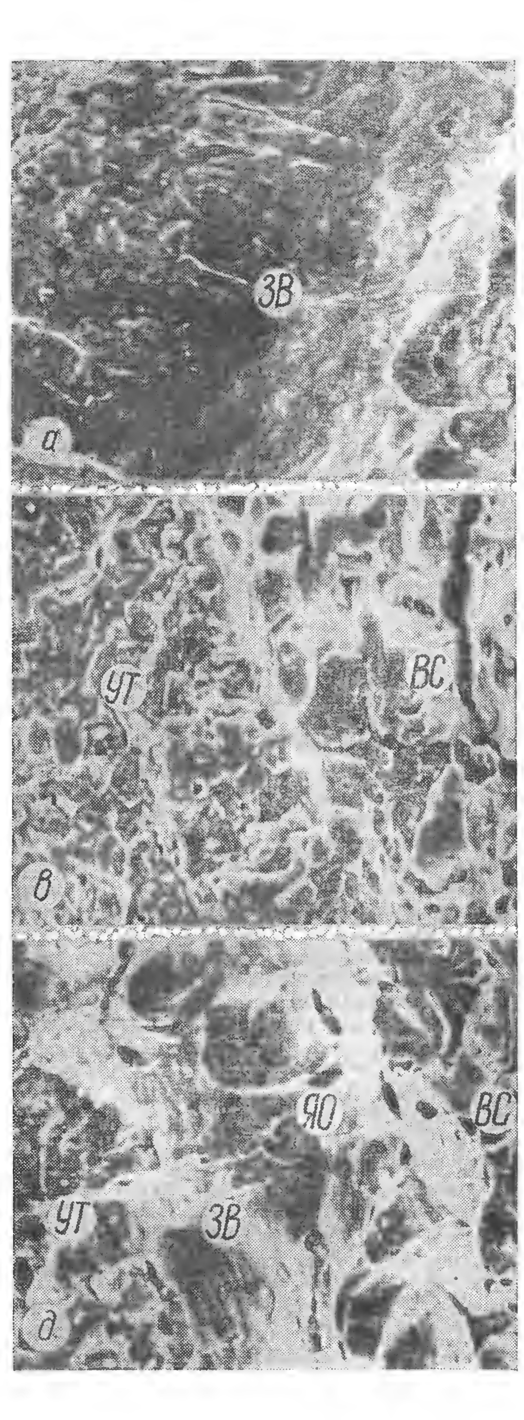
3.29, *а*). Схематическое, но наглядное представление процесса формирования зоны вытягивания дано К. Бичемом (рис. 3.30), согласно которому локализация сдвигов в вершине трещины или концентратора напряжений сопровождается образованием ступенек скольжения на свободной поверхности с последующим сглаживанием их по мере увеличения пластической деформации. Геометрические размеры зоны вытягивания (ее ширина и высота) неоднородны по фронту ее образования (по толщине образца). Так, по данным [15], ее ширина имеет наибольшее значение в центральных участках излома и уменьшается по мере приближения к боковым поверхностям.

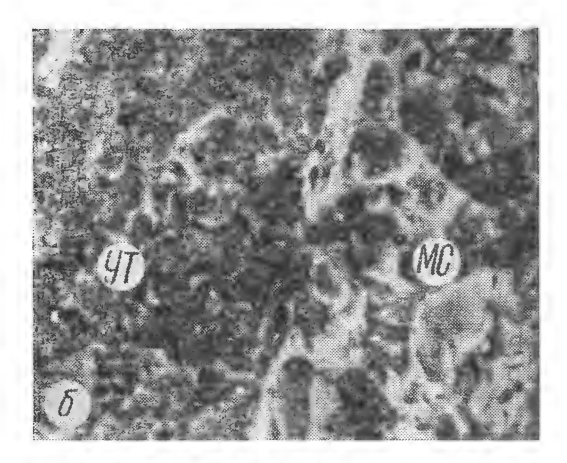
Между геометрическими размерами зоны вытягивания и параметрами трещиностойкости различных конструкционных металлических сплавов существуют зависимости, которые качественно представляются в виде

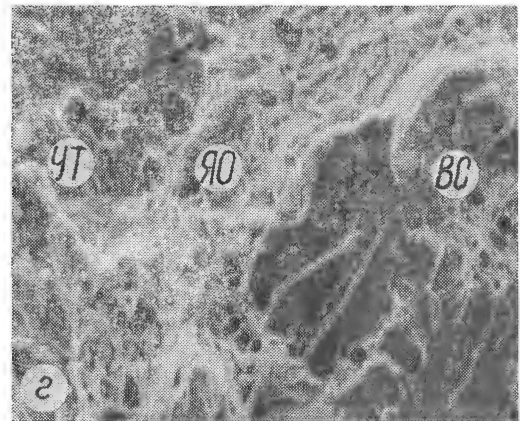
$$L_0 = B\left(\frac{K_{1C}}{\sigma_{0,2}}\right)^n, \qquad (3.119)$$

где L_0 — ширина зоны вытягивания; B — постоянная; n — показатель, близкий к 2. Однако эти зависимости не учитывают тот факт, что у материалов с низким уровнем трещиностойкости зоны вытягивания может не быть. Связь между шириной зоны вытягивания и трещиностойкостью умеренно легированных сталей удовлетворительно описывается выражением

$$L_0 = B\left(\frac{K_{1C}}{\sigma_{0,2}}\right)^2 - A, \qquad (3.120)$$


ЗВ
а
УТ
ВС
в
ЯО
ВС
УТ
ЗВ
д





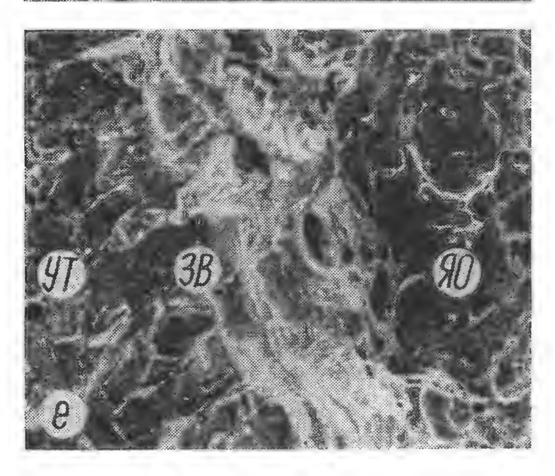


Рис. 3.29. Микрофрактограммы, иллюстрирующие различные микроскопические особенности стартового развития трещины:

УТ — усталостная трещина; ЭВ — зона вытягивания; МС — межзеренный скол; ВС — внутризеренный скол; ЯО — ямочный отрыв.

где A — дополнительная константа, характеризующая минимальный уровень K_{IC}^{min}, при котором зона вытягивания не образуется:

$$K_{IC}^{min} = \sigma_{0,2} \sqrt{\frac{A}{B}}. \tag{3.121}$$

Известны также исследования (см. [11—16]), посвященные установлению взаимосвязи между размерами зоны вытягивания и критическим раскрытием трещины (δ_{IC}). Здесь также многие авторы приходят к выводу о важном значении зоны вытягивания в качестве микрофрактографического параметра трещиностойкости. Стереоскопические измерения глубины зоны вытягивания показали, например, что удвоенное значение последней равно критическому раскрытию трещины:

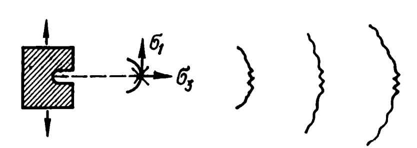


Рис. 3.30. Схема формирования зоны вытягивания [13].

$$2d = C \frac{K_{IC}^2}{E\sigma_т}, \tag{3.122}$$

где d — глубина зоны вытягивания; C — коэффициент, изменяющийся от 0,33 до 0,75. Такое соотношение справедливо при последующем росте трещины по механизму ямочного отрыва.

В работах А. Я. Красовского и других указывается, что для достаточно низких температур между удвоенной глубиной зоны вытягивания и критическим раскрытием трещины δ_{IC} существует линейная корреляция:

$$2d = C'\delta_{IC}, \tag{3.123}$$

где C' — коэффициент, зависящий от деформационного упрочнения материала.

С повышением температуры испытаний возрастает влияние деформационного упрочнения на процесс формирования зоны вытягивания так, что и глубина, и ширина последней после достижения некоторой температуры начинает уменьшаться при увеличении раскрытия трещины.

Приведенные данные являются доказательством особой роли стартовых участков изломов образцов с трещинами в формировании уровня трещиностойкости конструкционных материалов. Это касается не только зоны вытягивания, но также закономерностей протекания микроскопических актов трещинообразования в последующих за нею стартовых областях. Так, в работе [17] показано, что повышение уровня трещиностойкости углеродистых сталей, наблюдаемое по мере увеличения температуры испытаний, сопровождается изменениями стартового микромеханизма распространения трещины от схемы *2* к схеме *6*, указанных на рис. 3.28. При этом после достижения определенного уровня трещиностойкости на стартовых участках изломов образцов с трещиной формируется сплошная барьерная ямочная зона, ширина которой возрастает с повышением температуры, что позволяет характеризовать последнюю в качестве микрофрактографической меры трещиностойкости или зоны предразрушения.

ГЛАВА 4

КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ВРЕМЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ

Процесс разрушения материалов и элементов конструкций всегда происходит в течение некоторого времени. Это связано с тем, что реологические характеристики материала зависят от скорости его деформирования, а само разрушение может протекать при напряжениях меньших предела прочности, если действие нагрузки растянуто во времени, в частности носит переменный характер. В указанных случаях обычные критерии разрушения для однократного статического нагружения (см. гл. 3) уже некорректны и поэтому в формулировке моделей разрушения материалов следует учитывать временные эффекты процесса. В настоящей главе изложены расчетные модели механики разрушения и прочности материалов, учитывающие зависимость нагружения материала во времени, а также зарождение и кинетику распространения трещин в этом случае.

4.1. Распространение трещин в линейных вязкоупругих средах при длительном статическом нагружении

В механике разрушения наметились два подхода к анализу медленного роста трещин. В первом (микроструктурном) главное внимание уделяется кинетике микроразрушений в малой концевой зоне трещины. Кинетика разрушения описывается уравнениями либо химической кинетики, либо кинетической теории прочности. При этом считается, что реологические свойства проявляются только в малой концевой зоне трещины, а вне трещины материал упругий. Во втором (феноменологическом) подходе к изучению кинетики роста трещин в деформируемом теле с учетом времени действия нагрузок используются концепции механики сплошной среды и вводятся дополнительные характеристики сопротивления материала распространению в нем трещины с учетом фактора времени. Причины медленного роста трещины в полимерных композитных материалах и в металлах при высоких температурах — обычно ползучесть материала и накопление рассеянных повреждений. Здесь в качестве модельного материала рассмотрены полимеры, для которых излагается расчетная модель, предложенная А. А. Каминским (в рамках концепции $\delta_к$-модели) для исследования замедленного разрушения материалов [2].

Разрушение полимеров имеет свои специфические особенности. Вблизи вершины трещины, где процесс разрушения локализован в зоне предельно высоких напряжений, в материале могут образоваться пустоты, субмикротрещины и т. п., которые затем растут и сливаются. Это необходимо учитывать при моделировании структуры края трещины, когда нелинейно деформированный частично разрушенный материал сосредоточен в узкой области перед вершиной трещины. Учет данных явлений позволяет при мо-

делировании края трещины заменить концевую область разрезом на продолжении трещины, находящимся под действием равномерно распределенных самоуравновешенных напряжений (см. рис. 3.11), т. е. использовать изложенную в п. 3.4 $\delta_к$-модель. Напомним, что в $\delta_к$-модели напряжения σ_0 в концевой области считаются постоянными и равными либо сопротивлению отрыва, либо пределу текучести материала. Однако это предположение, будучи справедливым для упругих и упругопластических материалов, не выполняется для вязкоупругих из-за реономности их свойств. Например, при разрушении полимеров, таких, как полиметилметакрилат (ПММА), напряжения в концевой области существенно меняются с ростом трещины, однако размер концевой зоны изменяется при этом незначительно (и в довольно широком диапазоне скоростей роста трещины практически остается постоянным). Более того, и форма концевой области трещины, растущей в ПММА, не зависит от ее длины, т. е. наблюдается автомодельность.

С учетом сказанного рост трещины в вязкоупругой среде определяется согласно $\delta_к$-модели при таких предположениях:

1. При развитии трещины размер концевой области d_1 остается постоянным ($d_1 = \text{const}$), а напряжение σ_0 (см. рис. 3.12) изменяется с ростом трещины и рассчитывается из условия

$$\lim_{x \to d_1} \dot{\delta}_I (x) = 0, \tag{4.1}$$

где $\dot{\delta}_I (x)$ — скорость раскрытия берегов трещины, моделирующей зону предразрушения. Это условие ограниченности напряжений на краю концевой зоны приводит к тому, что если один из этих параметров (σ_0 или d_1) принять постоянным, то другой обязательно должен зависеть от длины трещины $l(t)$, а следовательно, неявно от времени. Действительно, это видно, например, при одноосном растяжении распределенной нагрузкой σ плоскости с трещиной (аналог задачи Гриффитса, см. п. 3.4, рис. 3.13). Полагая $d_1 = \text{const}$, получаем из формулы (3.67) при выполнении условия (4.1)

$$\sigma_0 (t) = \frac{\pi \sigma}{2} \left[\arccos \frac{l(t)}{l(t) + d_1} \right]^{-1}. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что с увеличением длины трещины напряжения в концевой области растут (такая тенденция наблюдается, например, при разрушении ПММА).

Если же предположить, что величины d_1 и σ_0 не зависят от времени, то условие плавности смыкания берегов трещины на концах выполняться не будет, а следовательно, напряжения в тупиковой части могут быть бесконечно большими, что противоречит основным положениям $\delta_к$-модели.

2. В качестве критерия разрушения принимается критерий критического раскрытия трещины, который считается справедливым в каждый момент времени для растущей трещины:

$$\delta_I (x, t) |_{x=l(t)} = \delta_{IC}. \tag{4.3}$$

Такое обобщение $\delta_к$-модели на вязкоупругие среды приводит к кинетической модели разрушения, отличающейся от статической.

Развитие трещины в полимерах можно условно разбить на три периода: инкубационный (подготовительный), медленного квазистатического роста и динамического развития трещины.

Инкубационный период развития трещины в полимерах. Во время инкубационного периода происходит раскрытие берегов трещины без ее роста.

Согласно принципу Вольтера уравнение контура трещины в вязкоупругой пластине во многих случаях представляется так:

$$\delta_I(x, t) = Z^* \delta_0(x, t), \tag{4.4}$$

где Z^* — интегральный оператор теории вязкоупругости [2]; $\delta_0(x, t)$ — функция силовых и геометрических параметров. Для прямолинейной трещины в бесконечной пластине, находящейся под действием самоуравновешенных напряжений $\sigma(x, t)$, эта функция имеет вид

$$\delta_0(x, t) = -\int_{-a_1}^{a_1} q(\xi, t)\, \Gamma_0(a_1, x, \xi)\, d\xi, \tag{4.5}$$

где $a_1 = l + d_1$;

$$q(x, t) = \begin{cases} \sigma(x, t) & (|x| \leqslant l(t)), \\ \sigma(x, t) - \sigma_0(t) & (l(t) \leqslant x \leqslant a_1(t)). \end{cases}$$

Рост трещины согласно критерию (4.3) начинается тогда, когда раскрытие берегов трещины при $x = l$ достигает предельного значения.

Далее будем рассматривать операторы теории вязкоупругости разностного вида:

$$Z^* g(t) = Z_0 \left[g(t) + \int_0^t R(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau \right], \tag{4.6}$$

где Z_0, $R(t - \tau)$ — функционалы, структуру которых можно найти по [2]; $g(t)$ — искомая функция. Тогда из условия (4.3) с учетом соотношений (4.4) и (4.6), а также предположения, что внешняя нагрузка приложена мгновенно в момент $t = 0$, находим уравнение для определения длительности инкубационного периода t_*:

$$\delta_0(l) + \int_0^{t_*} R(t_* - \tau)\, \delta_0[\sigma(\tau), l]\, d\tau = \frac{\delta_{IC}}{Z_0}. \tag{4.7}$$

Если внешняя нагрузка не изменяется во времени, т. е. $\sigma(x, t) = \sigma(x)$, уравнение (4.7) упрощается:

$$\int_0^{t_*} R(\theta)\, d\theta = \frac{\delta_{IC}}{\delta_I(l)} - 1, \tag{4.8}$$

где $\delta_I(l) = Z_0 \delta_0(l)$ — упругое раскрытие берегов трещины при $x = l$.

Различают два типа вязкоупругих сред: среды, кривые ползучести которых имеют горизонтальную асимптоту, и среды с квазивязким течением (тела Максвелла). Поэтому если при монотонно возрастающей нагрузке решение уравнения (4.7) всегда существует, то при постоянной внешней нагрузке решение уравнения (4.8) будет существовать только для вязкоупругих тел Максвелла (и, следовательно, разрушение происходит при сколь угодно малых нагрузках).

Пример. Пусть внешняя нагрузка представляется в виде $\sigma f(x, y)$, где $f(x, y)$ — некоторая функция координат. Тогда для вязкоупругих тел первого типа решение уравнения (4.8) существует только для параметров σ, бо́льших некоторого предела σ_σ (безопасная нагрузка). Другими словами,

при $\sigma < \sigma_\sigma$ раскрытие трещины $\delta_I (x = lt)$ не достигает критического значения δ_{IC} даже за сколь угодно большое время и, следовательно, трещина не растет.

В общем случае, как это следует из выражения (4.4), безопасные нагрузки определяются соотношением

$$\frac{\delta_{IC}}{\delta_I (l, \sigma_\sigma)} = \frac{Z^*_\infty \delta_0 (l, \infty)}{Z^*_\infty \delta_0 (l, \infty)} = \frac{Z^*_\infty}{Z^*_0}, \tag{4.9}$$

где Z^*_∞ и Z^*_0 — соответственно длительное ($t = \infty$) и мгновенное ($t = 0$) значения функции $Z^* \cdot 1$.

Выражение (4.9) для вязкоупругой пластины можно представить в виде

$$\frac{\delta_{IC}}{\delta_I (l, \sigma_\sigma)} = \frac{E_0}{E_\infty}, \tag{4.10}$$

где E_0, E_∞ — мгновенный и длительный модули упругости.

Для трещины с такой концевой зоной ($d_1 \ll l$) упругое раскрытие берегов трещины при $x = l (t)$ можно выразить через коэффициент интенсивности напряжений K_I в виде

$$\delta_I (l (t)) = \frac{2K_I}{\pi E_0} \sqrt{\frac{2d_1}{\pi}} \tag{4.11}$$

Тогда коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий безопасной нагрузке K_σ, определяется из выражения (4.10)

$$\frac{K_{I*}}{K_\sigma} = \frac{E_0}{E_\infty}, \tag{4.12}$$

где K_{I*} — критический коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий критическому параметру нагрузки σ_*, которая вызывает рост трещины в теле с мгновенными характеристиками.

Во многих случаях коэффициент K_I можно представить в виде

$$K_I = \sigma f (l, \eta_i), \tag{4.13}$$

где η_i — некоторые геометрические параметры. Тогда из отношения (4.12)

$$\frac{\sigma_*}{\sigma_\sigma} = \frac{E_0}{E_\infty}. \tag{4.14}$$

Для вязкоупругих тел, деформирование которых описывается ограниченными интегральными операторами, существует безопасная длина трещины l_σ, при которой трещина не развивается. В общем случае эта безопасная длина определяется из уравнения (4.9), а для вязкоупругой пластины — выражением (4.10), которое можно переписать в виде

$$\frac{\delta_{IC}}{\delta_I (l_\sigma, \sigma)} = \frac{Z_\infty}{Z_0}; \qquad \frac{\delta_{IC}}{\delta_I (l_з, \sigma)} = \frac{E_0}{E_\infty}. \tag{4.15}$$

В качестве примера исследуем случай, когда ядром интегрального оператора (4.6) является дробно-экспоненциальная функция

$$R(t-\tau)=\lambda'(t-\tau)^{-\alpha'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(t-\tau)^{n(1-\alpha')}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha')]},\qquad(4.16)$$

где α', β, λ' — реологические параметры материала, определяемые из эксперимента (см. табл. 4. 1); Γ — гамма-функция Эйлера. В этом случае $E_0/E_\infty=1+\alpha'/\beta$. В табл. 4.1 приведены также значения σ_σ/σ_* для некоторых полимерных вязкоупругих материалов.

Таблица 4.1. **Реологические свойства полимеров при комнатной температуре**

Материал	α'	$(\lambda')^{\alpha'-1}$	$\beta^{\alpha'-1}$	σ_σ/σ_*
Эпоксидная смола ЭД-6	0,5	0,052	0,12	0,7
Полиуретан	0	13,55	2,7	0,17

Значения безопасных нагрузки и длины (σ_σ и l_σ) имеют практическую ценность, так как позволяют с помощью соответствующего подбора конструкционных материалов (или их реологических свойств) уменьшить докритический рост трещины.

Период медленного квазистатического роста трещины. В полимерах после инкубационного периода при докритических внешних нагрузках начинается основной период, связанный с медленным ростом трещины. Последние могут быть устойчивые и неустойчивые. Рост первых при постоянных нагрузках затухающий, а развитие вторых происходит с возрастающей скоростью вплоть до критической длины трещины $l=l_*$ (когда начинается уже быстрый, динамический рост). В течение основного периода трещина развивается со скоростью, близкой к постоянной. Это позволяет исследовать такие задачи в квазистатической постановке, т. е. полагать движение настолько медленным, что можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения и использовать в дальнейшем соотношения статики упругонаследственных тел.

Вершина трещины, начиная свое движение, проходит расстояние, равное начальной длине концевой зоны (ввиду ее малости этим периодом пренебрегают). В дальнейшем неустойчивые трещины медленно подрастают до критической длины (когда начинается спонтанное развитие). В связи с этим выделяются две последовательные фазы разрушения: вначале элемент сплошной среды переходит в некоторое промежуточное состояние (концевая область), а затем трещина, попадая в концевую область, производит окончательное разрушение этого элемента. На начальном этапе трещина двигается по уже сформированной концевой области(предполагается, что к моменту $t=0$ в теле уже существует трещина длиной l_0 с размером концевой области d_0) и поэтому берега разреза уже имеют дополнительное раскрытие за время инкубационного периода. На последующем основном этапе развития трещина разрывает сплошной материал, формируя перед этим концевую область. Раскрытие берегов разреза в ней начинается с момента попадания вершина в соответствующую точку вязкоупругой среды (этот момент обозначается через t'). Уравнение медленного роста трещины на этом этапе с допущением, что в любой момент выполняется

условие (4.3), записывается в виде

$$\delta_{IG} = Z_0\left\{\delta_0\,[l\,(t)] + \int\limits_{t'}^{t} R\,(t-\tau)\,\delta_0\,[l\,(\tau),\,l\,(t)]\,d\tau\right\}. \qquad (4.17)$$

Уравнение (4.17) — нелинейное интегральное уравнение сложной структуры. Ввиду того что развития устойчивых и неустойчивых трещин на этом этапе качественно различаются между собой, исследуем отдельно эти случаи.

Развитие устойчивых трещин при длительном действии постоянной внешней нагрузки происходит с убывающей скоростью, и через некоторое время рост трещины приостанавливается. В связи с этим для поддержания незатухающего движения трещины необходимо со временем увеличивать внешнюю нагрузку. При распространении неустойчивой трещины, начиная с момента, которому соответствует $l\,(t_1) = l_0 + d_1$, скорость движения трещины близка к постоянной, за исключением небольшого диапазона времени перед окончанием этого периода, когда трещина переходит на динамический режим развития. Поскольку оба слагаемых в правой части (4.17)— величины положительные, причем $\delta_0\,[l\,(t)]$ увеличивается с ростом $l\,(t)$, то при $Z_0\delta_0[l\,(t)] > \delta_{IC}$, уравнение (4.17) не будет иметь решения.

Итак, условие

$$Z_0\delta_0\,[l\,(t) = l_*] = \delta_{IG} \qquad (4.18)$$

совпадает по форме с обычным критерием предельного раскрытия (3.85), отличаясь от него тем, что вместо упругих постоянных материала здесь стоят мгновенные упругие постоянные. Длина трещины $l\,(t = t_{**}) = l_*$ и время t_{**}, в течение которого эта длина достигается, называются критическими, а величина $t_д = t_* + t_{**} \cong t_{**}$ определяет долговечность вязкоупругого тела с трещиной.

Развитие неустойчивых трещин по сравнению с устойчивыми представляет больший интерес, поскольку они более опасны и в ряде случаев могут привести к полному разрушению.

В заключение преобразуем уравнение (4.17), полагая $\tau = \theta + t'$ и $t' = t - \tau'$:

$$\delta_{IG} = Z_0\left\{\delta\,[l\,(t)] + \int\limits_{0}^{\tau'} R\,(\tau' - \theta)\,\delta_0\,[l\,(\theta),\,l\,(t)]\,d\theta\right\}. \qquad (4.19)$$

Здесь τ' — время, за которое конец трещины проходит расстояние, равное d_1.

Дифференциальные уравнения роста трещины в полимерах. Исследуем рост трещин в вязкоупругих телах с небольшими концевыми зонами ($d_1 \ll l$ — см. рис. 3.13) под действием медленно растущих (или постоянных) внешних нагрузок.

Упругое раскрытие вершины полубесконечной трещины в плоскости представляется в следующем виде:

$$\delta_I\,[x,\,l\,(t)] = \frac{2Z_0}{\pi}\,\sigma_0\,(t)\left\{2\sqrt{d_1\,[d_1 - (x - l\,(t))]} + \right.$$

$$\left. + [x - l\,(t)]\ln\frac{\sqrt{d_1} - \sqrt{d_1 - [x - l\,(t)]}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_1 - [x - l\,(t)]}}\right\}, \qquad (4.20)$$

где $\sigma_0(t)=\frac{\sqrt{\pi}K_\mathrm{I}}{\sqrt{8d_1}}$. Представляя $l(\tau)$ вблизи точки t рядом Тейлора и оставляя в нем (вследствие малости d_1) только два члена, получим

$$f(\tau)\cong l(t)\,\dot{l}(t)\,(\tau-t). \tag{4.21}$$

Параметр нагружения $\sigma(\tau)$ также представим вблизи $\tau=t$ в виде отрезка ряда Тейлора

$$\sigma(\tau)=\sigma(t)+\dot{\sigma}(t)\,(\tau-t). \tag{4.22}$$

Исходя из соотношений (4.20) — (4.22), с помощью замены $S=(\dot{l}/d)\times\times(t-\tau)$ преобразуем уравнение роста трещины (4.19) для случая когда внешние нагрузки медленно меняются со временем, оставляя в уравнении (4.19) только члены порядка не выше d_1/l:

$$\frac{K_{\mathrm{I}*}}{K_\mathrm{I}}=1+\frac{d_1}{l}\int\limits_0^1 R\left(\frac{d_1S}{\dot{l}}\right)F(S)\,dS, \tag{4.23}$$

где
$$F(S)=\sqrt{1-S}+\frac{S}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-S}}{1+\sqrt{1+S}}.$$

Уравнение (4.23) является дифференциальным, описывающим квазистатический рост трещин нормального отрыва в вязкоупругой среде. Оно устанавливает связь между коэффициентом интенсивности напряжений движущейся трещины и скоростью ее роста.

Преобразуем уравнение (4.23) для некоторых известных ядер операторов наследственной теории упругости и представим зависимость K_I от $\dot{l}$, определяемую этим уравнением, в более компактной форме.

А. В случае тела Максвелла

$$R(t-\tau)=\lambda',\ \lambda'=1/3\eta, \tag{4.24}$$

где η — коэффициент вязкости.

Уравнение (4.23) с учетом (4.24) преобразуется к виду

$$\frac{K_{\mathrm{I}*}}{K_\mathrm{I}}=1+\frac{\lambda'}{3}\frac{d_1}{\dot{l}}. \tag{4.25}$$

Б. Пусть $R(t-\tau)$ — ядро Абеля в форме

$$R(t-\tau)=\lambda'\frac{(t-\tau)^{-\alpha'}}{\Gamma(1-\alpha')}, \tag{4.26}$$

где α' и λ' — реологические постоянные материала; Γ — гамма-функция Эйлера. Подставляя (4.26) в выражение (4.23), находим

$$\frac{K_{\mathrm{I}*}}{K_\mathrm{I}}=1+\frac{\sqrt{\pi}}{2(2-\alpha')\,\Gamma(2{,}5-\alpha)}\left(\frac{\alpha'}{\dot{l}}\right)^{1-\alpha'}. \tag{4.27}$$

В. Представим в уравнении (4.23) $R(qS)$, где $q=d_1/\dot{l}$, в виде дробно-экспоненциальной функции (4.16). В этом случае допустимо почленное интегрирование ряда $R(qS)\cdot F(S)$, поскольку этот ряд сходится при

$t-\tau>0$ абсолютно и непрерывно. Исходя из этого, уравнение (4.23) запишется в виде

$$\frac{K_{I*}}{K_I}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n q^{(n+1)(1-\alpha')}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha')]}\int_0^1 S^{n-(n+1)\alpha'}F(S)\,dS,$$

где β— то же, что в функции (4.16). Вычисляя входящие сюда интегралы, окончательно получаем

$$\frac{K_{I*}}{K_I}=1+\frac{\lambda'\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n q^{(n+1)(1-\alpha')}}{[(n+1)(1-\alpha')+1]\,\Gamma\,[3/2+(n+1)(1-\alpha')]}\cdot \tag{4.28}$$

Уравнение роста трещины (4.23) в ряде случаев допускает решение в квадратурах.

Пример 1. Рассмотрим задачу Гриффитса (см. п. 3.2), для которой уравнение (4.23) можно записать так:

$$\sqrt{\frac{l_*}{l}}=1+qQ(q), \tag{4.29}$$

где $Q(q)=\int\limits_0^1 R(qS)\,F(S)\,dS.$

Поскольку в данном случае развитие трещины неустойчиво и существует критическая длина $l=l_*$, при которой $K_{I*}=\sigma\sqrt{\pi l_*}$ и начинается закритическое развитие трещины, справедливо следующее соотношение:

$$t_{**}-t=\int_l^{l_*}\frac{dl}{l}, \tag{4.30}$$

где t_{**}— время достижения трещиной критической длины l_*. Вычисляя из выражения (4.29) дифференциал dl и переходя к переменной q, запишем решение уравнения (4.23) в виде

$$t_*-t=2\varkappa\left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^l\int_0^q\frac{qQ(q)+q^2Q'(q)}{[1+qQ(q)]^3}\,dq, \tag{4.31}$$

где $\varkappa=d/l_0$ (здесь l_0 — начальная длина трещины); σ_* — критическое значение внешней нагрузки. Связь параметра q с длиной трещины l устанавливается соотношением (4.29). Долговечность вязкоупругого тела с трещиной определяется из соотношения

$$t_д\cong t_{**}=2\varkappa\left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^2\int_0^{q_0}\frac{qQ(q)+q^2Q'(q)}{[1+qQ(q)]^3}\,dq. \tag{4.32}$$

Из условия страгивания трещины различной длины вытекает

$$\frac{l_*}{l_0}=\left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^2. \tag{4.33}$$

Из уравнения (4.29) установим связь между параметром q_0 и внешней нагрузкой σ:

$$\frac{\sigma_*}{\sigma} = 1 + q_0 Q(q). \tag{4.34}$$

Рассмотрим теперь задачу Гриффитса для тел различных реологий. Для тела Максвелла (4.24)

$$R(qS) = \lambda' = \mathrm{const}, \quad Q(q) = \lambda'/3 \tag{4.35}$$

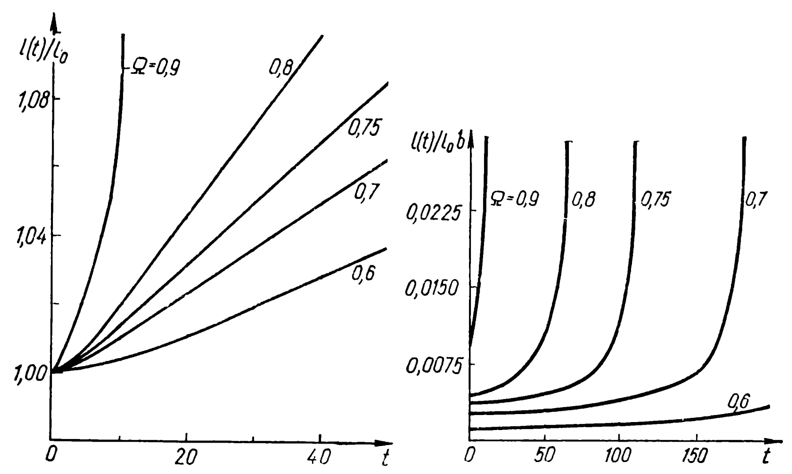


Рис. 4.1. Зависимость приведенной длины трещины от времени в задаче Гриффитса для тела Максвелла.

Рис. 4.2. Зависимость приведенной скорости роста трещины от времени для случая, указанного на рис. 4.1.

и из уравнения (4.31) можно получить зависимость длины трещины от времени

$$l(t) = l_0\left[\frac{\sigma_*}{\sigma} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right)^2 - bt}\right], \tag{4.36}$$

где $b = \lambda' dE/(3l_0)$. Скорость движения трещины в этой среде

$$\dot{l}(t) = l_0 b\left\{\left[\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^2 - b\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^2 t\right]^{-1/2} - 1\right\}. \tag{4.37}$$

Отсюда следует, что при стремлении внешней нагрузки σ к нулю скорость роста трещины также стремится к нулю, а когда $\sigma = \sigma_*$, последняя бесконечно велика. Когда $0 < \sigma < \sigma_*$, то всегда существует время t_{**}, при достижении которого скорость роста трещины стремится к бесконечности, т. е. наступает быстрый динамический рост трещины. Из выражения (4.37), а также из более общего соотношения (4.32), следует выражение для долговечности

$$t_д = b^{-1}\left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right)^2. \tag{4.38}$$

Отсюда видно, что при $\sigma = \sigma_*$ разрушение происходит мгновенно. При уменьшении σ долговечность $t_д$ неограниченно растет.

На рис. 4.1 и 4.2 показаны зависимости приведенных длины трещины $l(t)/l_0$ и скорости ее роста $\dot{l}(t)/(l_0 b)$ от времени t при различных значениях параметра $\Omega = \sigma/\sigma_*$.

Для тела Кельвина (линейно-стандартное тело)

$$R(t-\tau) = R(qS) = \lambda' e^{-\beta q s} = e^{-\beta(t-\tau)}. \qquad (4.39)$$

Из соотношения (4.31) для полиуретана марки солитан-113 (см. табл. 4.1) численным методом получена зависимость безразмерной длины $l(t)/l_0$ от безразмерного времени $\nu = t/t_д$ ($t_д = 0{,}369$ с — время релаксации рассматриваемого полимера). На рис. 4.3 приведена эта зависимость при $d_1/l_0 = 10^{-3{,}813}$ (сплошная линия), пунктиром обозначена экспериментальная кривая по данным [2].

Все уравнения, определяющие рост трещин, приведенные выше, основываются на общей зависимости (4.29), а поэтому формально справедливы не только для трещин в пластинах, но также и для пространственных трещин нормального разрыва.

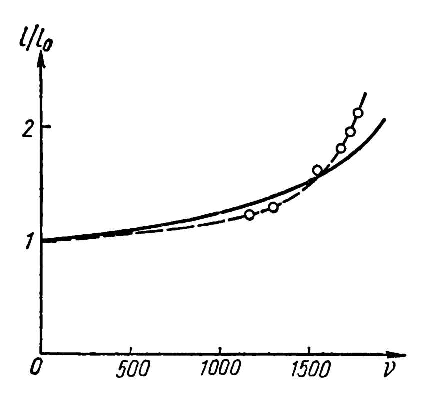


Рис. 4.3. Зависимость безразмерной длины трещины от безразмерного времени при растяжении пластины с трещиной для тела Кельвина (сплошная линия — расчет, пунктирная — эксперимент).

Пример 2. Рассмотрим вязкоупругий материал, ослабленный плоской дискообразной, круговой в плане трещиной радиуса r_0, перед кромкой которой есть тонкая зона предразрушения шириной d_1. Материал подвержен действию растягивающих напряжений σ, нормальных плоскости трещины. Заменяя концевую зону концевым разрезом, находящимся под действием равномерно распределенных самоуравновешенных напряжений σ_0, приходим к $\delta_к$-модели. Раскрытие берегов трещины в этом случае также представляется соотношением (4.29), в котором интегральный оператор вязкоупругости Z^* имеет вид

$$Z^* = \frac{8[1-(\nu^*)^2]}{\pi E^*}, \qquad (4.40)$$

где ν^* — оператор поперечной ползучести; E^* — оператор релаксации, а функция δ_0 описывается уравнением

$$\delta_0(t) = \sigma_0 \int_{\arcsin(r_0/a)}^{\psi} \sqrt{r_0^2 - r^2\sin^2\varphi}\, d\varphi. \qquad (4.41)$$

Здесь

$$\psi = \begin{cases} \pi/2 & (0 \leqslant r \leqslant r_0) \\ \arcsin(r_0/a) & (r_0 \leqslant r \leqslant a), \end{cases}$$

где $a = r_0 + d_1$.

Условие конечности напряжений имеет вид

$$\sigma a - \sigma_0 \sqrt{a^2 - r_0^2} = 0. \tag{4.42}$$

Раскрытие берегов трещины при $r = r_0$ определяется из соотношения

$$\delta_I (l, 0) = Z^* r_0 \sigma_0 (1 - r_0/a). \tag{4.43}$$

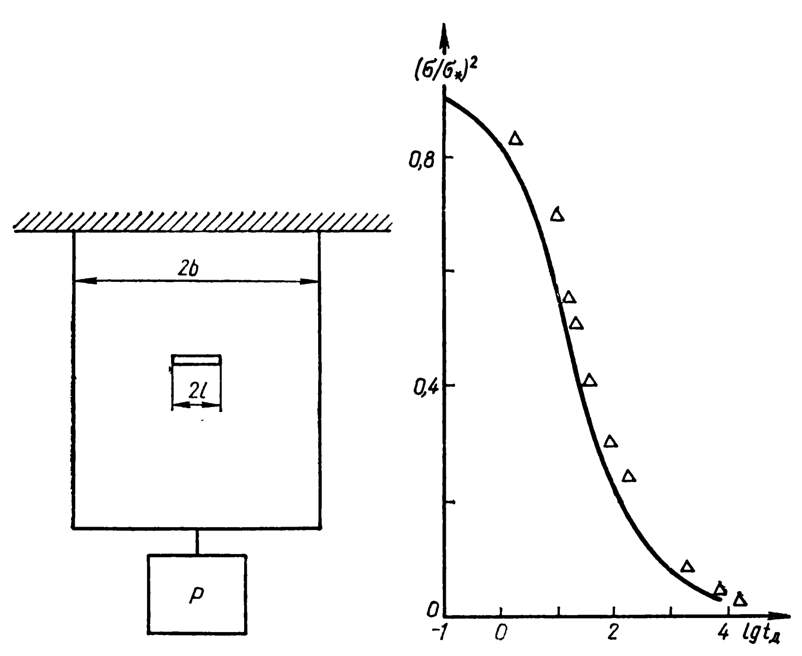


Рис. 4.4. Схема эксперимента на длительную прочность.

Рис. 4.5. Длительная прочность полиуретановой пластины с трещиной (точки — эксперимент; сплошная линия — расчет).

При $d_1 \ll r_0$ справедливо уравнение роста трещин (4.23), в котором коэффициент интенсивности необходимо принимать для задачи Сакка в виде [1]

$$K_I = 2\sigma \sqrt{r_0/\pi}. \tag{4.44}$$

Развитие трещины в этом случае также находится из соотношений (4.31) и (4.32), а для тела Кельвина остаются справедливыми выражения (4.36)—(4.38).

Экспериментально определена долговечность тонкой пластины из полиуретана марки солитан-113 со сквозной центральной прямолинейной трещиной (рис. 4.4). Деформирование описывается интегральным оператором с экспоненциальным ядром вида (4.39) и с реологическими характеристиками, приведенными в табл. 4.1. Длина трещины значительно меньше ширины пластины. Поэтому для вычислений можно принять коэффициент интенсивности напряжений таким же, как и для неограниченной пластины.

На рис. 4.5 представлена зависимость долговечности $t_д$ полиуретана марки солитан-113 от безразмерного параметра $(\sigma/\sigma_*)^2$ при $\varkappa = 10^{-2,7}$ (здесь $\varkappa$ — то же, что в формуле (3.31)). Сплошная линия соответствует численному решению по формуле (4.32), а экспериментальные данные представлены точками.

4.2. Критерии разрушения материалов при динамических нагрузках

Важное практическое значение для машиностроения имеют вопросы разрушения материалов при ударном (импульсном) нагружении, поскольку внезапное приложение нагрузки значительной амплитуды — одна из наиболее распространенных на практике причин разрушения элементов конструкций. В то же время многие изделия современной техники работают именно в условиях, при которых ударное нагружение их отдельных элементов — эксплуатационная норма. При проектировании такого рода изделий следует знать и учитывать допустимую величину трещиноподобных дефектов в наиболее ответственных деталях для заданного спектра рабочих нагрузок, а также конструктивные способы торможения начавшегося роста трещин с целью предотвращения разрушения конструкции. Кроме того, в ряде отраслей промышленности (например, в горнодобывающей и фармацевтической) дробление и тонкое измельчение материала — основные производственные процессы. Их оптимизация с использованием результатов динамической механики разрушения в настоящее время считается важнейшим путем поиска энерго- и ресурсоэкономных технологий.

Динамическая механика разрушения, несмотря на растущий к ней интерес, развита еще относительно слабо и зачастую не может дать исчерпывающих ответов на вопросы, которые ставит перед ней современная техника. Причины этого явления: 1) несовершенство теоретических моделей и математические сложности, возникающие при решении соответствующих уравнений, 2) недостаточный для математического моделирования физических процессов, происходящих в зоне предразрушения у вершины трещины, объем экспериментальных данных. В связи с этим процесс создания критериев динамической механики разрушения, выступающих как квинтэссенция достаточно полных теоретических моделей и необходимого объема достоверных экспериментальных данных, еще только начинается. Основная масса используемых в настоящее время критериев получена путем переноса и определенной модификации применительно к динамическим условиям нагружения материала известных критериев статической механики разрушения. Ниже рассматриваются некоторые критерии такого плана, определяющие условия страгивания, роста и остановки трещины в квазихрупком материале. (Достаточно полный анализ исследований по этому направлению содержится в монографии [3] и специальных выпусках международных журналов [4, 5].)

Критерии страгивания трещины при импульсном нагружении. Рост скорости деформирования металла вызывает увеличение предела пластичности, из-за чего зона пластического деформирования материала у вершины трещины при воздействии на нее волны динамического нагружения более локализована, чем при статической нагрузке той же амплитуды. Это явление служит основанием для широкого использования концепций и методов линейной механики разрушения при решении соответствующих динамических задач и интерпретации экспериментальных данных в рамках таких подходов.

При рассмотрении вопроса об определении момента страгивания трещины под действием однократного импульсного нагружения ограничимся трещиной нормального отрыва. Исследование асимптотики поля напря-

жений у вершины предельно острого разреза в упругом теле показывает, что динамический характер приложения нагрузки проявляется лишь в появлении зависимости от времени коэффициента интенсивности напряжений, но не влияет на угловое распределение напряжений. Это дает возможность, описывая процесс разрушения в рамках линейной теории, определять момент возможного страгивания трещины из анализа «истории» изменения во времени либо динамического коэффициента напряжений

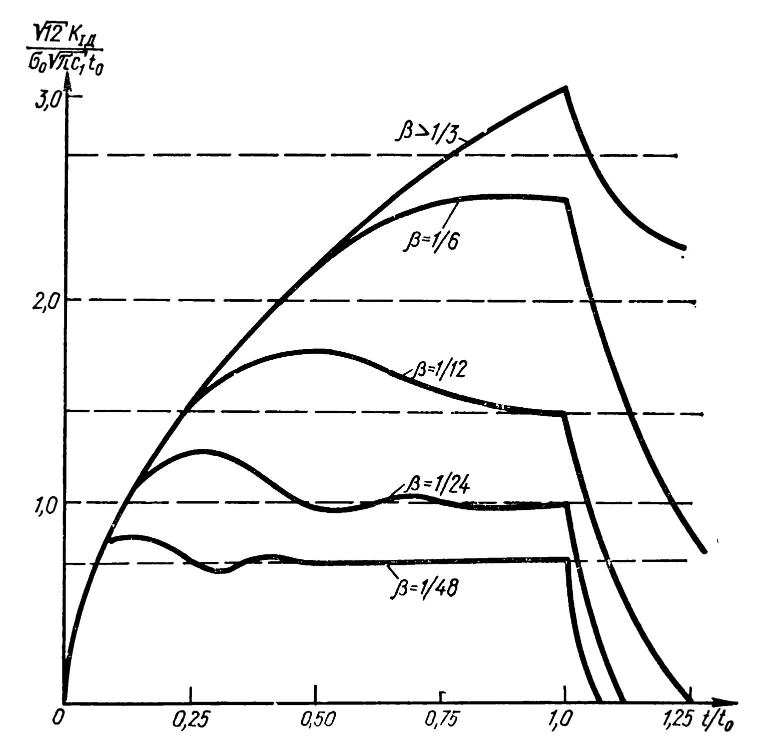


Рис. 4.6. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени для плоских внутренних трещин различной длины $l_0=\rho c_1 t_0$.

$K_{Iд}$ — аналога коэффициента K_I для нормального отрыва, либо соответственно $g_{Iд}$ — динамического аналога энергетического параметра g_{IQ} (см. формулу (3.43)). Ниже будут рассмотрены различные варианты критериев силового типа, предложенные для описания предельного состояния тела с трещиноподобным дефектом при импульсном нагружении.

Рассмотрим две модельные задачи: 1) о воздействии прямоугольного импульса растягивающей нагрузки амплитуды σ_0 и длительности t_0 на сквозную трещину длиной $2l_0$ в плоскости и 2) аналогичную задачу для дисковидной трещины радиуса r_0 в пространстве. Фронт волны в обоих случаях параллелен трещине. На рис. 4.6, 4.7 показаны зависимости коэффициента интенсивности напряжений от времени для плоской и диско-

видной трещин при различных длительностях импульса [3—5]. Вид этих зависимостей позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, для трещин малого размера ($r_0 < \frac{1}{20} c_1 t_0$ для дисковидной, $l_0 < \frac{1}{40} c_1 t_0$ для плоской) график изменения коэффициента интенсивности напряжений имеет практически прямоугольную форму, характерную для квазистати-

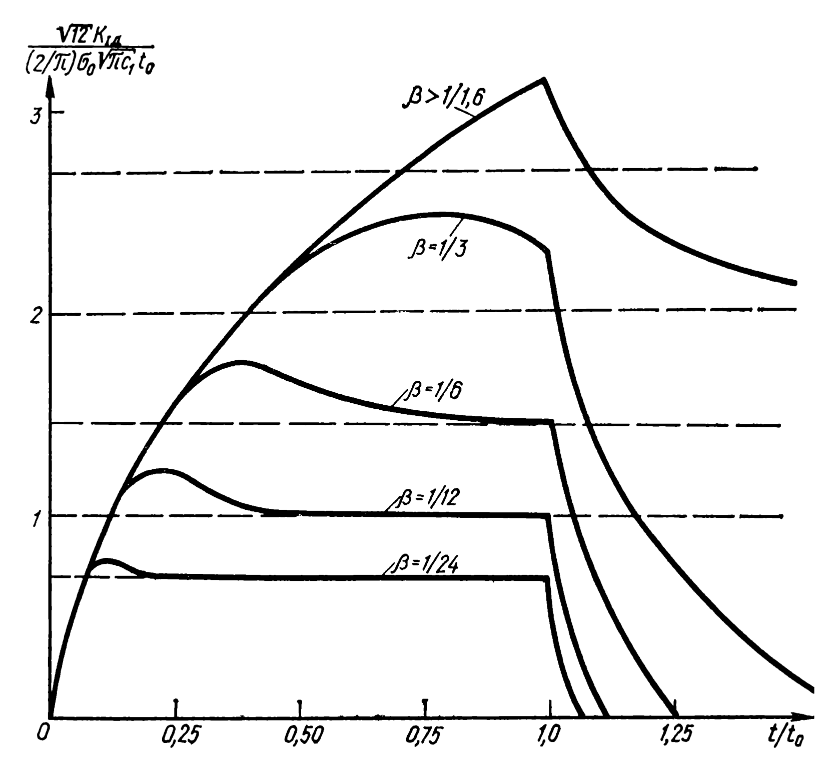


Рис. 4.7. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени для дисковидных трещин различного радиуса $r_0 = \beta c_1 t_0$.

ческого нагружения нагрузкой той же интенсивности. Во-вторых, трещины значительного размера ($r_0 > 0,6\, c_1 t_0$ для дисковидной, $l_0 > \frac{1}{3} c_1 t_0$ для плоской) имеют общую «историю» изменения коэффициента интенсивности напряжений и, следовательно, в рамках линейной механики разрушения должны одновременно становиться нестабильными. Подобное поведение трещинообразных дефектов неоднократно наблюдается при экспериментальных исследованиях.

Для построения динамического аналога критерия Ирвина необходимо выбрать какой-то характерный параметр истории изменения коэффициента интенсивности напряжений в качестве критического. Дж. С. Си и Дж. Д. Ахенбах предложили критерий, согласно которому трещина ста-

новится неустойчивой, как только коэффициент интенсивности напряжений в ее вершине достигнет некоторого критического значения. Другими словами, для установления, является ли импульс данных амплитуды и длительности дестабилизирующим для трещины заданного размера, необходимо вычислить максимальное значение коэффициента интенсивности

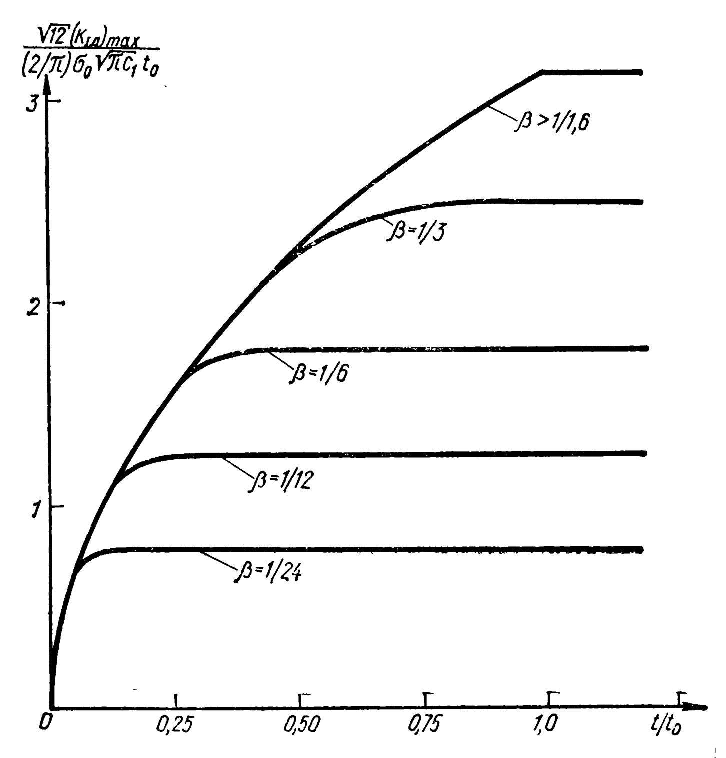


Рис. 4.8. Зависимость величины $(K_{Iд})_{max}$ от времени для дисковидных трещин различного радиуса $r_0=\beta c_1 t_0$.

напряжений и сравнить его с критическим. Таким образом, условие страгивания трещины можно записать так:

$$(K_{Iд})_{max} \geqslant K_{Iд.c}(\dot{\sigma}), \tag{4.45}$$

где $K_{Iд.c}$ — критический параметр, являющийся характеристикой материала, зависящей от скорости нагружения. (Чаще всего ее связывают со скоростью изменения коэффициента интенсивности напряжений $\dot{K}_I = \partial K_I/\partial t$). Очевидно, что критерий, аналогичный (4.45), можно записать в терминах $G_{Iд}$ и $J_Д(\dot{\sigma})$, где $J_Д(\dot{\sigma})$ — удельная энергия разрушения при динамическом нагружении.

На рис. 4.8 приведены графики изменения максимального коэффициента интенсивности напряжений $(K_{\text{Iд}})_{\max}$ от времени для дискообразной трещины. Очевидно, что для одной и той же формы нагружающего импульса (прямоугольной в данном случае) величины σ_0, t_0, r_0 (или l_0) в рамках критерия (4.45) однозначно определяют, является ли данная трещина под действием заданной нагрузки устойчивой. Критические комбинации параметров σ_0, t_0, r_0 (или l_0) образуют в пространстве «амплиту-

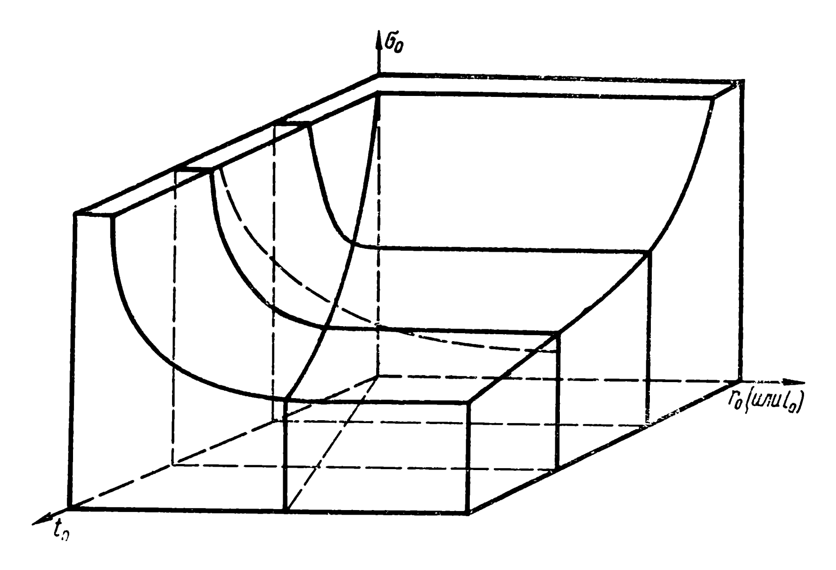


Рис. 4.9. Вид критической поверхности в пространстве параметров нагружающего импульса для критерия максимального коэффициента интенсивности напряжений.

да импульса — длительность импульса — размер трещины» некоторую поверхность (рис. 4.9). Точки пространства, находящиеся под поверхностью, соответствуют устойчивому состоянию трещины, а находящиеся над ней,— неустойчивому.

Линия излома на критической поверхности отвечает моментам достижения максимального значения коэффициента интенсивности напряжений для плоской $(c_1 t_0/l_0 = 5{,}7)$ и дискообразной внутренней $(c_1 t_0/r_0 = 2{,}2)$ трещин. Для сравнения на том же рисунке (в предположении, что $K_{\text{IC}} = K_{\text{Iд.с}}$) показана кривая статической потери устойчивости (штриховая).

Еще один вариант силового типа был предложен Й. Ф. Кальтхоффом и Д. А. Шоки. Они исходили из того, что в статике критерий потери устойчивости трещиной и дальнейшего закритического ее роста заключается в одновременном выполнении двух условий:

$$K_{\text{I}} \geqslant K_{\text{IC}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial K_1}{\partial l} \geqslant 0. \qquad (4.46)$$

где l — длина трещины. Полностью следуя статической аналогии, при ди-

намическом нагружении получаем

$$K_{\text{Iд}} \geqslant K_{\text{Iд.}C}(\dot{\sigma}), \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial K_{\text{Iд}}}{\partial l} + \frac{1}{v}\frac{\partial K_{\text{Iд}}}{\partial t} \geqslant 0, \tag{4.48}$$

где v — скорость распространения трещины после страгивания.

Величины $K_{\text{Iд}}$, $\partial K_{\text{Iд}}/\partial l$ и $\partial K_{\text{Iд}}/\partial t$ достигают максимума в различные моменты времени и поэтому, например, период удовлетворения условия (4.47) может не совпадать по времени с периодом удовлетворения условия (4.48), и наоборот. Поэтому вполне возможна ситуация при которой трещина будет оставаться практически стабильной в течение короткого промежутка времени, даже если динамический коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва $K_{\text{Iд}}$ превысит величину $K_{\text{Iд.}C}$. На основании подобных рассуждений Й. Ф. Кальтхофф и Д. А. Шоки предложили критерий, согласно которому трещина становится нестабильной тогда, когда $K_{\text{Iд}}$ превышает $K_{\text{Iд.}C}$ в течение некоторого (вообще говоря, небольшого) промежутка времени t_C, постоянного для данного материала. Практическое применение такого подхода означает, что по известному графику изменения коэффициента интенсивности напряжений необходимо определить эффективный динамический коэффициент интенсивности напряжений $K_{\text{Iд.эф}}$, т. е. максимальное значение этого коэффициента, при котором неравенство $K_{\text{Iд}}(t) \geqslant K_{\text{Iд.эф}}$ выполняется в течение промежутка времени t_C. Сравнение величин $K_{\text{Iд.эф}}$ и $K_{\text{Iд.}C}$ позволяет определить, является ли данный импульс дестабилизирующим для заданного размера трещины. Определенные качественные выводы об эффективном динамическом коэффициенте напряжений $K_{\text{Iд.эф}}$ для различных сочетаний параметров σ_0, t_0 прямоугольного импульса нагрузки можно сделать на основании графиков, показанных на рис. 4.6 и 4 7 Для трещин малого по сравнению с протяженностью импульса $c_1 t_0$ размера значение этого коэффициента практически в течение всего периода t_0 совпадает с соответствующим статическим значением коэффициента K_{I}. Поэтому

$$K_{\text{Iд.эф}} = K_{\text{I}} \tag{4.49}$$

для $r_0 < \frac{1}{20} t_0 c_1$ (дисковидная трещина) или для $l_0 < \frac{1}{40} t_0 c_1$ (плоская трещина).

Трещины, с бóльшими по сравнению с протяженностью импульса размерами, имеют одинаковую историю изменения коэффициента интенсивности напряжений. Поэтому даже без точного значения величины $K_{\text{Iд.эф}}$ можно сделать вывод, что критерий минимального времени подобно критерию максимального коэффициента интенсивности напряжений предсказывает одинаковое поведение у всех трещин, бóльших некоторого размера: $r_0 > 0{,}6\, c_1 t_0$ для дисковидных и $l_0 > c_1 t/3$ для плоских трещин. На рис. 4.10 схематически показана предельная поверхность, которую образуют в пространстве «амплитуда импульса σ_0 — длительность импульса t_0 — размер трещины r_0 (или l_0)» точки, удовлетворяющие критерию минимального времени. Линии излома *1*, *2* на критической поверхности соответствуют моментам достижения максимального значения коэффициента интенсивности напряжений для плоской [$c_1 t_0/l_0 = 40$ (*1*) и 30 (*2*)] и дискообразной внутренней [$c_1 t_0/r_0 = 20$ (*1*) и 1,6 (*2*)] трещин. Там же для сравнения показана

кривая статической потери устойчивости при условии $K_{I д.\sigma} = K_{IC}$ (штриховая линия).

Временная задержка момента начала разрушения после движения критического значения коэффициента интенсивности напряжения в вершине трещины объяснима. Страгивание трещины может произойти только после того, как сформируется в окрестности от ее вершины зона предразрушения. Для этого необходимо, чтобы область высоких напряжений от

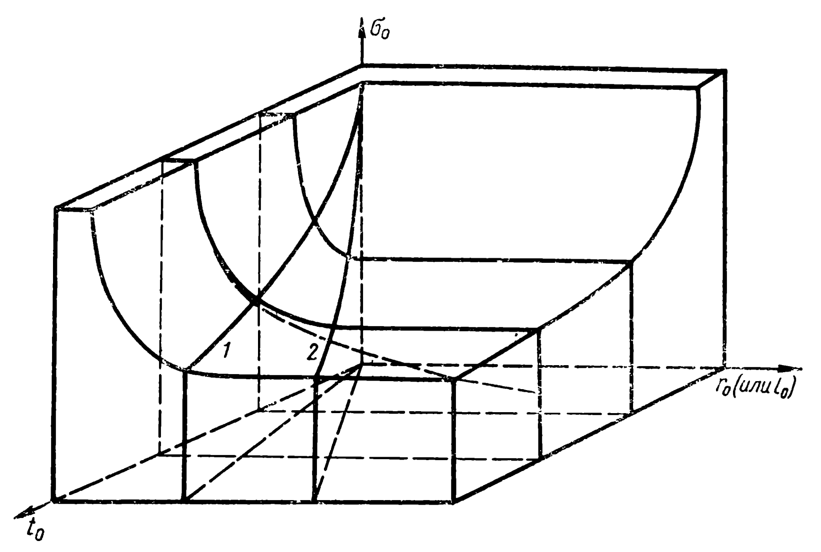


Рис. 4.10. Вид критической поверхности в пространстве параметров нагружающего импульса для критерия минимального времени.

вершины трещины распространилась на некоторый объем материала и чтобы в части этого объема прошли деструкционные процессы, связанные с появлением различного рода повреждений (несплошностей), образующих зону предразрушения. Время, необходимое для этого, и образует тот инкубационный период, на который задерживается момент старта трещины. Само существование такого инкубационного периода — гипотеза, требующая тщательной экспериментальной проверки.

Сравнение рис. 4.9 и 4.10 показывает, что критерий минимального времени t_c предсказывает наступление нестабильности трещины при бóльших амплитудах нагрузки, чем критерий максимального коэффициента интенсивности напряжений. Однако поскольку величина t_c, полученная при обработке экспериментальных данных, весьма мала (например, около 7 мкс для стали 4340 — США), то разница в результатах, получаемых по обоим критериям, должна в большой степени зависеть от формы нагружающего импульса, существенно убывая для более «пологих» импульсов.

Как пример применения энергетического подхода, рассмотрим критерий, основанный на принципе минимального действия. Согласно ему нестабильность трещины, нагружаемой прямоугольным импульсом, наступит при следующих соотношениях между σ_0, t_0 и l_0:

$$l_0\sigma_0^2 \geqslant c, \tag{4.50}$$

$$c_1 t_0 \geqslant ag, \qquad (4.51)$$

где c — константа материала; a — параметр геометрии трещины; g — числовой коэффициент, близкий к 1. Очевидно, что уравнение (4.50) — аналог обычного статического критерия Гриффитса. Смысл уравнения (4.51) в том, что для каждой длительности импульса t_0 устанавливается максимальный размер трещины $l_0 = c_1 t_0 / g$, которая может быть активирована этим импульсом. Трещины большего размера должны оставаться стабильными при любой амплитуде нагружающего импульса σ_0. На рис.

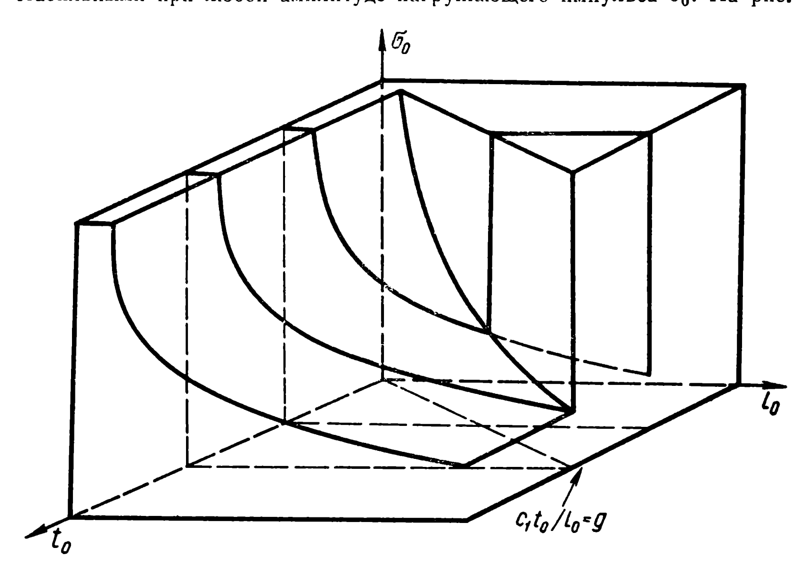


Рис. 4.11. Вид критической поверхности в пространстве параметров нагружающего импульса для критерия минимального действия.

4.11 схематически показана предельная поверхность, соответствующая критерию (4.50), (4.51).

Три различных подхода к построению критериальных соотношений, рассмотренные выше, достаточно ярко демонстрируют основные пути развития динамической механики разрушения в этом направлении, но отнюдь не исчерпывают перечень предлагавшихся критериев. Однако отсутствие достаточного объема достоверных экспериментальных данных не позволяет в настоящее время уверенно оценивать правомерность того или иного подхода.

Так, зависимость $K_{\text{Iд}}(\dot{\sigma})$ невозможно единым образом хотя бы качественно описать для всех материалов. Однако во многих случаях вид зависимости подобен одному из вариантов, показанных на рис. 4.12.

Угловое асимптотическое распределение напряжений у вершины стационарной трещины при динамическом нагружении не отличается от своего статического аналога. Это позволяет без каких-либо изменений перенести критерии, определяющие направление начального развития трещины, установленные для статической механики разрушения, в динамическую при условии, что значения входящих в них коэффициентов K_{I} и K_{II} являются мгновенными (динамическими). Используемые в статической меха-

нике разрушения критерии дают близкие результаты, в особенности для нагрузок, незначительно отличающихся от нагрузок нормального отрыва. Поскольку определить преимущества того или иного критерия невозможно, при выборе критерия для практического применения чаще всего пользуются принципом максимальной простоты. Наиболее приемлем в этом плане σ_θ-критерий.

Помимо прямого следования аналогиям статики, известны попытки построения критериев, определяющих угол начального распространения

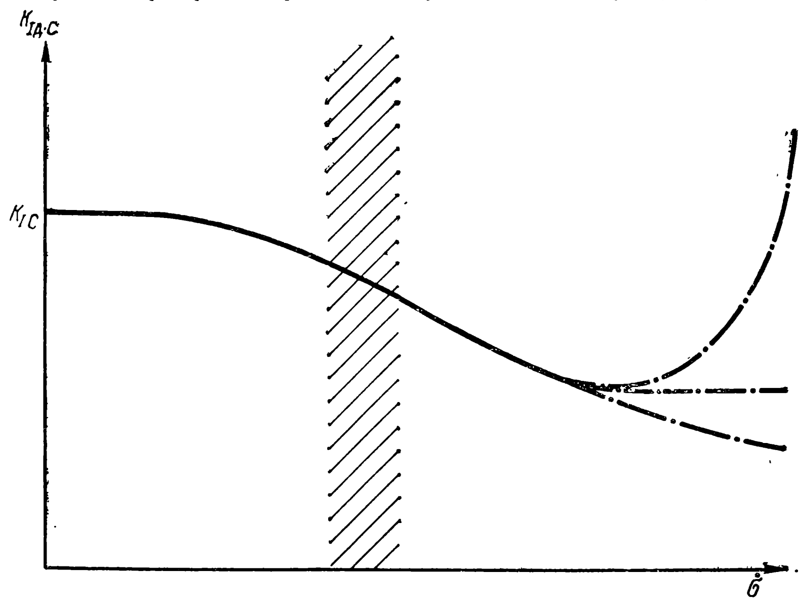


Рис. 4.12. Схематический вид возможных вариантов зависимости величины динамической трещиностойкости $K_{IД.С}$ от скорости нагружения $\dot{\sigma}$ (пунктиром показаны варианты изменения $K_{IД.С}$ при высоких скоростях нагружения, штриховкой обозначена зона скоростей деформирования, соответствующая ударным испытаниям на копре).

трещины с учетом влияния скорости ее роста после страгивания. Так, Дж. Д. Ахенбах рассматривал полубесконечную трещину в упругой пластине, находящуюся под действием начальной двухосной статической нагрузки и импульса ступенчатой формы, падающего на трещину под углом $\varphi\pi$. Предполагалось, что трещина начнет движение в некоторый момент времени $t_{ст}$ со скоростью $v_{ст}$ под таким углом $\varkappa\pi$ к ее начальному положению, что поток энергии в ее вершину E $(v_{ст}, t_{ст}, \varkappa)$ будет максимальным по отношению к вариации $\varkappa$. При этом баланс энергий показал, что в рамках линейной теории упругости и при предположении, что эффективная работа разрушения $J_р$ — величина постоянная для материала, в начальный момент старта трещины $(t_{ст})$ скорость ее движения равна нулю. Это означает, что угол отклонения будет однозначно определяться параметрами напряженно-деформированного состояния материала у вершины трещины перед ее страгиванием, т. е. в рамках линейной механики разрушения коэффициентами интенсивности напряжений. Этот вывод может оказаться не

вполне корректным в том случае, если эффективная работа разрушения $J_р$ зависит от скорости движения трещины. Но, как свидетельствуют результаты экспериментальных исследований, для реальных материалов такого рода зависимость заметно проявляется только для высоких скоростей движения трещины. То, что направление начального роста трещины определяется коэффициентами интенсивности напряжений у ее вершины в стационарном (неподвижном) состоянии, служит существенным доводом в пользу применения в динамической механике разрушения модифицированных аналогов из статической теории.

Критерии механики закритического роста трещин. Л. Б. Фройнд и А. С. Дуглас показали, что для трещины антиплоского сдвига, движущейся с постоянной скоростью в упругопластической* плоскости, протяженность пластической зоны перед ее вершиной с ростом скорости уменьшается по сравнению с таковой для медленнорастущей трещины. В реальных материалах для трещин нормального разрыва эффект локализации пластического течения должен быть сильнее, поскольку рост скорости трещины вызывает увеличение скорости деформирования материала перед ее вершиной, что в свою очередь ведет к повышению предела пластичности. Малая зона пластических деформаций позволяет удовлетворительно описывать напряженно-деформированное состояние материала у вершины трещины с помощью линейной модели, т. е. при предположении об идеально упругом поведении материала. Рассмотрим асимптотическое представление компонент напряжений в полярной системе координат (r, θ), движущейся вместе с вершиной трещины (рис. 4.13). В двухмерном случае:

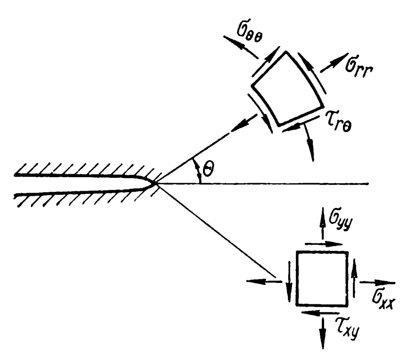


Рис. 4.13. Напряженное состояние элемента материала у вершины движущейся трещины в полярной и декартовой системах координат.

для трещин типа I и II (см. рис. 3.4)

$$\sigma_{xx}^{д} = \frac{K_{Iд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{xx}^{I}(\theta, v) + \frac{K_{IIд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{xx}^{II}(\theta, v) + O(1),$$

$$\sigma_{yy}^{д} = \frac{K_{Iд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{yy}^{I}(\theta, v) + \frac{K_{IIд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{yy}^{II}(\theta, v) + O(1), \qquad (4.52)$$

$$\sigma_{zz}^{д} = \frac{K_{Iд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{xy}^{I}(\theta, v) + \frac{K_{IIд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{xy}^{II}(\theta, v) + O(1);$$

для трещин типа III

$$\sigma_{xz}^{д} = \frac{K_{IIIд}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{xz}^{III}(\theta, v) + O(1), \qquad (4.53)$$

---

* Предполагалось, что материал — упругоидеальнопластический, характеризуется критерием текучести Мизеса и подчиняется теории течения.

$$\sigma_{yz}^{\text{д}} = \frac{K_{\text{IIIд}}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits_{yz}^{\text{III}}(\theta, v) + O(1),$$

где $K_{\text{Iд}}(t)$, $K_{\text{IIд}}(t)$, $K_{\text{IIIд}}(t)$ — динамические коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов; $\sum\nolimits_{xx}^{\text{I}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{xx}^{\text{II}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{xy}^{\text{I}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{xy}^{\text{II}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{xz}^{\text{III}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{yy}^{\text{I}}(\theta, v)$, $\sum\nolimits_{yy}^{\text{II}}(\theta, v)$ — функции углового распределения напряжений в окрестности вершины трещины; v — скорость движения трещины; $o(1) \ll 1/\sqrt{r}$ $(r \to 0)$. Если скорость движения трещины не превышает скорости волн Рэлея для данного материала и внутренняя энергия деформации тела конечна, то в пределе при $v \to 0$ на угловое распределение напряжений влияет только значение мгновенной скорости движения вершины разреза независимо от характера ее изменения.

Правомерно ли использование асимптотического (однопараметрического в случае нормального отрыва) представления (4.52) и (4.53) для описания поля напряжений в малой, но конечной окрестности вершины трещины, размеры которой значительно превышают размеры области предразрушения? Как показывают расчеты, даже для идеально хрупкого материала динамический характер приложения нагрузки может существенно сузить границы применимости описания напряженно-деформированного состояния материала у вершины трещины в терминах только коэффициентов интенсивности напряжений. Причина этого явления в том, что формулы (4.52) и (4.53) справедливы лишь в случае установившегося поля напряжений у вершины трещины. Такое состояние достигается только после того, как фронт возмущения поля напряжений, вызванный отражением волны нагрузки от трещины, удалится достаточно далеко от нее и при этом будет исключено воздействие на вершину трещины упругих волн,отраженных от границ области или другой вершины. В работах Л. Б. Фройнда (см., например, [3]) рассматривалась полубесконечная трещина в плоскости, к берегам которой в момент времени $t = 0$ мгновенно прилагается равномерно распределенная нагрузка постоянной амплитуды. При $t = t_0$ трещина начинает расти со скоростью $v = 0{,}2\, c_1$, причем давление продолжает действовать только на начально нагруженных поверхностях и не следует за вершиной трещины. При такой постановке задачи вычислялись напряжения на некотором малом расстоянии Δx перед вершиной движущейся трещины и сравнивались с аналогичными величинами, определенными по формулам (4.52). При $\Delta x = 2$ мм (характерный радиус теневой зоны в методе каустик) и $t_0 = 50$ мкс для хрупкого оптически активного материала (гомалит-100) необходимо 30 мкс для достижения напряжениями 95 % значений, получаемых по формуле (4.52). Для стали соответствующий промежуток времени будет меньшим из-за большей скорости упругих волн, но тем не менее он также в десятки раз превышает временной диапазон, за который упругая волна растяжения проходит расстояние Δx. Необходимо учитывать, что расчеты проводились для чрезвычайно идеализованных условий (постоянная скорость движения трещины, отсутствие отраженных волн, неизменная нагрузка), которые трудно, а зачастую и просто невозможно реализовать при проведении исследований.

Приведенный пример показывает, что описание поля напряжений у вершины движущейся трещины в терминах только коэффициентов интенсивности напряжений может привести к заметным ошибкам. Бóльшую точность, обеспечивает многопараметрическое описание, при котором учитываются не только сингулярный, но и последующие регулярные члены в разложении типа (4.52). Некоторые примеры построения критериев на основе многопараметрического представления будут приведены ниже. Пока

основная масса исследований закритического роста трещин проводится в рамках однопараметрического описания поля напряжений у вершины трещины. Это объясняется в какой-то мере привязанностью исследователей к определенным стереотипам заимствованным из квазистатической механики разрушения, а главным образом — большой сложностью как экспериментального, так и теоретического (численного) определения несингулярных членов разложения компонент поля напряжений у вершины трещины. Для большинства возникающих на практике задач подход в рамках использования в критериальных зависимостях только коэффициентов интенсивности напряжений обеспечивает допустимую для инженерных расчетов точность.

Описание закритического роста трещины обычно сводится к определению скорости и направления ее роста в каждый момент времени. Большинство исследователей предполагают существование однозначной зависимости между скоростью роста трещины нормального отрыва и коэффициентом интенсивности напряжений в ее вершине. Уравнение движения трещины записывается в виде

$$K_{\text{Iд}}(t) = K_{\text{Iд.}c}, \tag{4.54}$$

где $K_{\text{Iд}}(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в вершине движущейся трещины, зависящий от мгновенной скорости ее движения, текущей длины и действующей нагрузки; $K_{\text{Iд.}c}$ — динамическая трещиностойкость материала.

Предположение о существовании однозначной зависимости между коэффициентом интенсивности напряжений в вершине трещины и скоростью ее движения закономерно вытекает из энергетического баланса для прямолинейно распространяющейся трещины в идеально упругом материале. Для плосконапряженного состояния при предположении постоянной эффективной работы разрушения $\gamma_{\text{р}}$ связь между динамическим коэффициентом интенсивности напряжения $K_{\text{Iд}}$ и скоростью движения трещины v задается соотношением

$$E\gamma_{\text{р}}/K_{\text{Iд}}^2 = f(v) = (1 - v/c_R), \tag{4.55}$$

где $f(v)$ — известная функция, хорошо описываемая выражением, стоящим в правой части формулы. Из соотношения (4.55) следует, что для всех хрупких материалов существует единая зависимость между коэффициентом интенсивности напряжения в вершине трещины и скоростью ее движения, вид которой показан на рис. 4.14. Согласно этой зависимости рост динамического коэффициента интенсивности напряжений $K_{\text{Iд}}$ сопровождается увеличением скорости трещины вплоть до предельной, равной c_R. Однако экспериментальные исследования не подтвердили подобных теоретических предсказаний. Практически для всех известных материалов, подвергнутых различным способам динамического нагружения, максимальная скорость движения трещины не превысила 0,5 c_R. Для наиболее хрупких материалов характерна следующая картина процесса разрушения. При относительно медленном движении трещины ($v \simeq 0,1, \ldots, 0,2\, c_R$) даже небольшие изменения коэффициента интенсивности напряжений способны вызвать значительные изменения скорости ее движения. По мере роста последней связь между $K_{\text{Iд}}$ и v становится все менее заметной и полностью исчезает при достижении максимальной скорости. Дальнейший рост коэффициента интенсивности напряжения вызывает заметные качественные изменения в характере процесса разрушения материала. Об этом свидетельствует значительное повышение шероховатости поверхности трещины, появление микроответвлений. Обычный итог такого процесса — появление вместо одного двух (и более) фронтов разрушения, т. е. ветвление трещины.

Связанное с ростом скорости трещины повышение шероховатости ее поверхности убедительно свидетельствует об увеличении удельной энергии разрушения, затрачиваемой на процесс образования новых поверхностей тела, т. е. о зависимости от скорости роста трещины динамической трещиностойкости материала $K_{\text{Iд.c}}$. Существование этой зависимости — основная причина, ограничивающая предельное значение скорости движения трещины. Принципиальную важность имеет вопрос, является ли величина

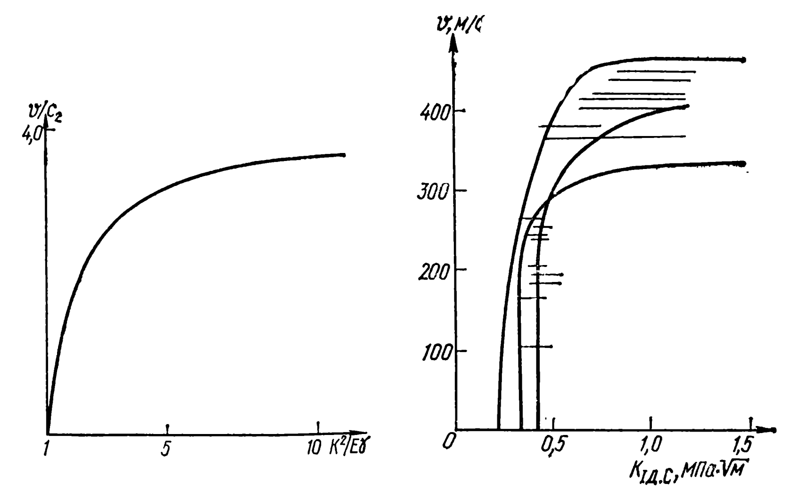


Рис. 4.14. Теоретическая зависимость скорости движения трещины от коэффициента интенсивности напряжений в ее вершине.

Рис. 4.15. Результаты экспериментальных исследований связи динамической трещиностройкости материала гомалит-100 со скоростью движущейся трещины.

$K_{\text{Iд.c}}$ для данного материала функцией лишь одного аргумента — скорости роста трещины или же зависит и от других факторов, например ускорения движения трещины, способа приложения нагрузки, типа образца и т. п. Для первого случая в настоящее время существуют экспериментальные методики и их программное обеспечение, позволяющее осуществить как построение зависимости $K_{\text{Iд.c}}$, так и предсказание на ее основе кинетики разрушения элементов конструкций с трещинами под действием произвольной нагрузки.

На рис 4.15 показаны зависимости величины $K_{\text{Iд.c}}$ от скорости движения трещины v, полученные для хрупкого стеклообразного материала гомалит-100 различными авторами (см., например, [3]) на разных типах образцов и по различным методикам. Все Г-образные кривые построены при квазистатическом приложении нагрузки к образцу (расклинивание, растяжение образца с тупым надрезом), когда рост трещины происходит в условиях энергетического «голода». Отрезки горизонтальных прямых соответствуют результатам экспериментов, в которых интенсивная импульсная нагрузка прилагалась непосредственно к поверхности трещины. При таком типе нагружения скорость трещины однозначно определяется условиями ее старта и не зависит от значения коэффициента интенсивности нап-

ряжений. В целом результаты, приведенные на рис. 4.15, показывают, что для исследуемого материала не существует единой зависимости $K_{IД.C}(v)$ в широком диапазоне скоростей деформирования. Такая зависимость может быть построена и использована только при условии квазистатического приложения нагрузки, однако разброс экспериментальных данных при этом достаточно велик. Широкой оказалась полоса разброса экспериментальных данных при построении зависимостей $K_{IД.C}$ (v) для других типов хрупких пластмасс и высокопрочных сталей. Наилучшие результа-

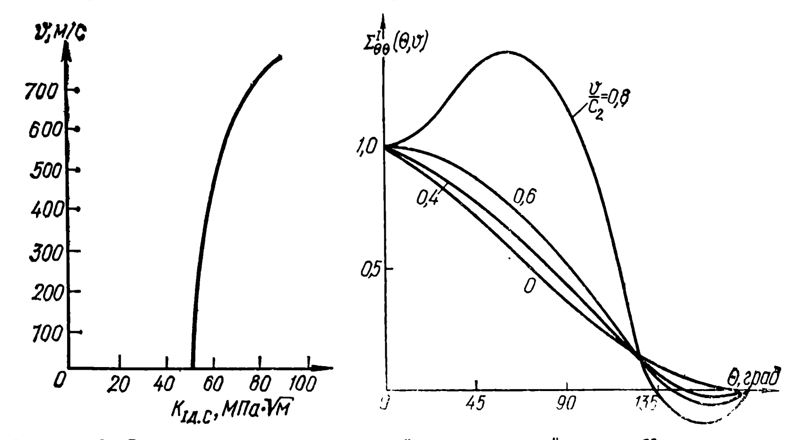


Рис. 4.16. Зависимость динамической трещиностойкости $K_{IД.C}$ от скорости трещины для стали 4340 (США).

Рис. 4.17. Зависимость углового распределения $\Sigma_{\theta\theta}$ напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ от скорости роста трещины.

ты в этом направлении достигнуты для металлов, разрушающихся по механизму роста и слияния микропор. Такой характер имеет рост трещин, например, в стали 4340 (США), зависимость $K_{IД.C}$ (v) для которой приведена на рис. 4.16 (см. также [3]).

Уравнение (4.54) получено путем распространения критерия Ирвина на соответствующие динамические задачи и переходит в него при $v \to 0$. Очевидно, что таким же образом могут быть «одинамичены», и другие критерии, применяющиеся в статической механике разрушения. Однако подобные подходы нуждаются еще в уточнениях и практической проверке.

Критерии для определения направления роста трещины тесно связаны с критериями, определяющими скорость ее движения. Выбрав уравнение движения трещины в виде (4.54), естественно предположить, что направление ее роста в каждый момент времени обусловлено максимумом окружного компонента напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в локальной системе координат, движущейся вместе с вершиной трещины (см. рис. 4.13). Это предположение эквивалентно выводу о том, что развитие трещины в изотропном материале происходит только по механизму нормального отрыва. В настоящее время на основании исследований этого явления еще трудно судить о правомерности указанного предположения, поскольку определяемые с помощью фотоупругости динамические коэффициенты интенсивности напряжений поперечного сдвига $K_{IIд}$ часто находятся в пределах погрешности этого метода.

Большинство исследований в динамической механике разрушения проводится при одноосном растяжении образцов с трещинами нормального отрыва. В этом случае предполагается прямолинейный рост трещины в ее плоскости. Однако при достижении наивысших скоростей роста трещины часто происходит явление, названное ветвлением трещины.

Первое теоретическое объяснение ветвления дал Е. Иоффе на основании критерия максимальных окружных напряжений. При рассмотрении асимптотических выражений для компонентов напряжений у вершины движущейся трещины (4.52), (4.53) было отмечено, что угловое распределение этих величин зависит от скорости распространения трещины. На рис. 4.17 показаны результаты проведенного Е. Иоффе исследования функции $\Sigma^T_{\theta\theta}$ (см. формулу (4.52)) для трещины нормального отрыва. После достижения трещиной скорости роста 0,61 c_2 максимум окружных напряжений смещается из плоскости трещины, что создает предпосылки для потери устойчивости прямолинейного направления ее роста. При дальнейшем повышении скорости сингулярная часть компоненты $\sigma_{\theta\theta}$ будет иметь максимум при $\theta \simeq 60°$, поэтому можно считать, что каждое ответвление отклонится от основной трещины именно на такой угол. Однако на практике ветвление происходит при меньших скоростях трещины и угол между ответвлениями обычно составляет 10—45°.

Новые критерии ветвления трещин возникли на основе более полного учета характера физических процессов, лежащих в основе этого явления В. М. Финкель, Дж. Конглтон, В. Г. Кнаусс, К. Рави-Чандар и др. [3] показали, что распространению трещины всегда предшествует образование перед ее вершиной скоплений микронесплошностей (пор, микротрещин, скоплений дислокаций и т. п.). Они образуют своеобразную «разметку», определяющую дальнейший путь трещины. По мере увеличения скорости движения трещины, а следовательно, и роста интенсивности напряжений у ее вершины, возрастает как число микродефектов в зоне предразрушения, так и их размер. Общее количество образующихся таким образом «несплошностей» повреждений превышает минимальное, необходимое для развития трещины; при этом микродефекты образуются не только в плоскости трещины, но и вне ее, что вызывает повышение шероховатости поверхности разрушения. В конце концов возникает ситуация, при которой одна (а при особо интенсивном нагружении — даже несколько) из вторичных микротрещин становится способной развиться в самостоятельную макротрещину — происходит ветвление. Прямое моделирование этого явления на основе данного представления весьма сложно, а в рамках континуальных моделей механики сплошной среды, вероятно, некорректно, поскольку характерные размеры возникающих перед вершиной трещины микродефектов сравнимы с параметрами структуры материала. Более приемлемым для практического использования может оказаться упрощенный подход, при котором сложные процессы взаимодействия магистральной трещины и скопления вторичных микродефектов интегрально описывались бы одним или несколькими параметрами, характеризующими поле напряжений в объеме материала, окружающем зону предразрушения. Значительная величина зоны предразрушения перед ветвлением делает неизбежным переход от одно- к многопараметрическому представлению компонент напряжений у вершины трещины. Так, компонент окружных напряжений для трещины типа I (нормальный отрыв) может быть представлен следующим образом:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{\text{Iд}}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum\nolimits^{\text{I}}_{\theta\theta}(\theta, v) + \sigma_{0x}\Omega^{\text{I}}_{\theta\theta}(\theta, v) + 0(\sqrt{r}), \qquad (4.56)$$

где σ_{0x} — регулярный компонент напряжений, действующих параллельно линии трещины; $\Omega^{I}_{\theta\theta}$ — функция переменных θ, v; $0(\sqrt{r}) \sim \sqrt{r}\ (r \to 0)$.

Если теперь вновь предположить, что развитие трещины происходит под углом к начальному направлению ее роста, при котором $\sigma_{\theta\theta}$ достигает максимального значения, то этот угол будет функцией расстояния от рассматриваемой точки до вершины трещины. Анализ выражения (4.56) в

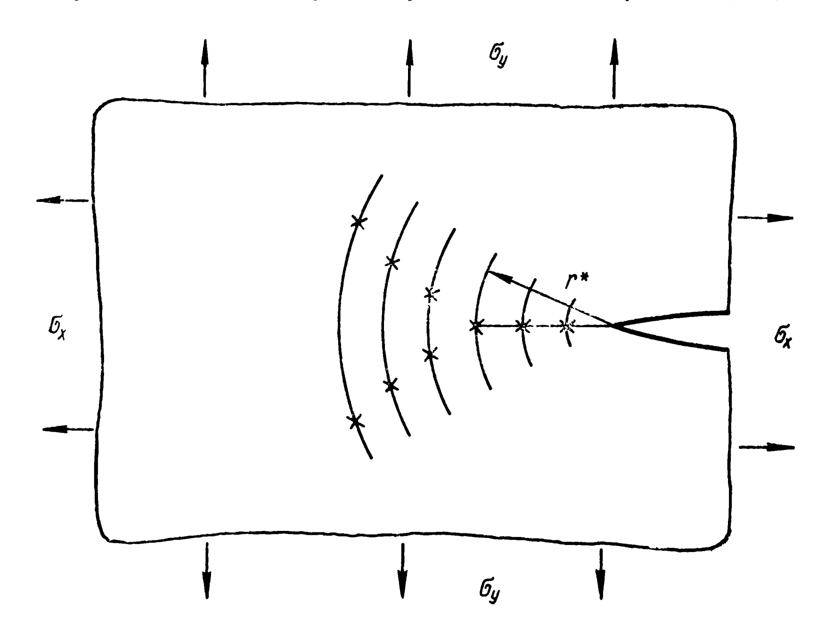


Рис. 4.18. Схема расположения максимумов $\sigma_{\theta\theta}$ (X) для различных расстояний от вершины трещины.

такой постановке показывает, что при $\sigma_{0x} > 0$ существует значение r^*, при котором для всех $r < r^*$ максимум $\sigma_{\theta\theta}$ лежит на продолжении линии трещины, а для $r \geqslant r^*$ смещается на некоторый угол $\theta(r)$ (рис. 4.18).

В нелинейной механике разрушения широко используется предложенный Ф. А. Мак-Клинтоком и Дж. Р. Ирвином критерий, согласно которому развитие трещины происходит, когда напряжение на постоянном для данного материала расстоянии r_C от вершины трещины превысит некоторое критическое значение. Применительно к линейной механике разрушения этот критерий тождествен обычному силовому критерию Ирвина.

Для рассматриваемого случая введение r_C в число критериальных параметров было использовано А. С. Кобаяси и М. Рамулу для постулирования соответствующего критерия.

1. Искривление трещины нормального отрыва произойдет в той точке ее траектории, где выполняется условие $r_C \gg r^*$, причем угол отклонения θ будет функцией расстояния r_C.

2. Для продвижения трещины необходимо достижение коэффициентом интенсивности напряжения в ее вершине некоторого критического зна-

чения, меньшего или равного значению динамического коэффициента интенсивности $K_{Iд}$.

По отношению к ветвлению трещины условие (1) является достаточным, а условие (2) — необходимым. Позднее теми же авторами были разработаны модификации описанного выше критерия для движущейся трещины смешанного типа, но во всех случаях существенным являлось двухпараметрическое представление компонентов напряжений у вершины трещины. Практическая апробация критерия показала, что, несмотря на некоторые присущие ему недостатки, он в целом ряде случаев позволяет прогнозировать угол отклонения (ветвление) трещины с достаточной точностью.

Критерии остановки закритического роста трещины. Предотвращение разрушения как отдельных элементов, так и конструкций в целом — один из основных направлений применения на практике результатов механики разрушения, в частности динамической. Для большинства реальных конструкций основное проявление динамического разрушения — внезапные скачки либо существовавших трещин, либо только что возникших у концентраторов напряжений. Характерной особенностью таких скачков является то, что они происходят при практически постоянном, квазистатическом нагружении конструкции в целом. Подобная двойственность исходной постановки задачи приводит к тому, что для предсказания точки остановки трещины используются два подхода. Первый (он исторически предложен также первым) основан на пренебрежении влиянием динамических эффектов. Предполагается, что длину трещины l_C в момент ее остановки можно определить из чисто статического анализа, найдя такую точку траектории трещины, в которой будет выполняться условие

$$K_I(l_C) \leqslant K_{Ia}, \tag{4.57}$$

где K_{Ia} — постоянная материала, зависящая, как и K_{IC}, только от температуры. Сторонники такого подхода объясняют его правомерность тем, что, как показывают результаты экспериментов, хотя первые две третьих скачка трещина проходит с высокими скоростью и динамическим значением коэффициента интенсивности напряжений и, следовательно, в ее вершине в это время он должен существенно отличаться от соответствующих статических значений, но уже последнюю треть своего пути (до остановки) трещина движется значительно медленнее, затрачивая на это около трех четвертых всего промежутка времени, за который происходит скачок. На этой заключительной фазе движения трещины влияние ее скорости на коэффициент интенсивности напряжений пренебрежимо мало.

Сторонники другого подхода остановки трещины указывают, что динамический характер этой задачи вытекает не из-за необходимости учитывать при определении коэффициента интенсивности напряжений поправку на скорость трещины, а из-за существенного изменения напряженного состояния материала вследствие распространения в нем вызванных движением трещины упругих волн. Волновые процессы изменяют как значение, так и характер нагрузки, приложенной к трещине, тем сильнее, чем больше ее скачок и чем ближе к трещине граница рассматриваемого тела (экспериментального образца или элемента конструкции). При этом условие остановки трещины может быть записано в виде

$$K_{Iд} \leqslant (K_{IC})_{\min}, \tag{4.58}$$

где $(K_{IC})_{\min}$ — минимальное значение динамической трещиностойкости материала $K_{Iд.C}$. На рис. 4.19 показаны результаты экспериментальных исследований И. Ф. Кальтхоффа, проведенных на образцах типа двухконсольной балки, изготовленных из эпоксидной смолы аральдит-Б. Во вре-

мя эксперимента с помощью сверхскоростной киносъемки методом каустик определялся динамический коэффициент интенсивности напряжений $K_{Iд}$ для трещины, возникавшей в результате расклинивания образца с тупым надрезом.

Полученные результаты (рис. 4.19) показывают, что значение $K_{Iд}$ в момент остановки трещины $K_{Iд} = K_{Iд.a}$ практически одинаково для всех испытанных образцов, в то время как соответствующий статический

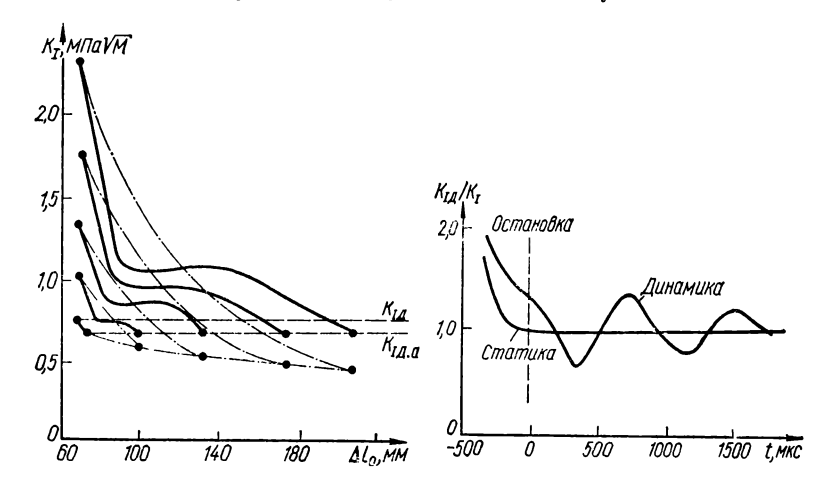


Рис. 4.19. Сравнение историй изменения динамических (—) и эквивалентных статических (—·—) КИН в зависимости от длины Δl_0 скачка трещины в образце типа двухконсольной балки.

Рис. 4.20. Колебания $K_{Iд}$ после остановки трещины.

коэффициент интенсивности напряжений уменьшается с ростом величины скачка. О динамическом характере процессов, происходящих при остановке трещины, свидетельствуют также зафиксированные после этого значительные колебания коэффициента интенсивности напряжений (рис. 4.20).

Различия в результатах, получаемых по описанным выше подходам, в значительной степени зависят от типа образца, применяемого при проведении эксперимента. Они наиболее существенны для двухконсольной балки, менее заметны для компактного образца и почти полностью устраняются в образце, предложенном И. Ф. Кальтхоффом, в котором предприняты специальные меры для устранения собственных колебаний образца и уменьшения влияния на трещину волн, отраженных от его границ.

Только полный учет динамического характера процесса скачкообразного распространения трещины позволяет получить близкую к истинной картину изменения напряженно-деформированного состояния в теле. Но при этом нужно иметь в виду, что проведение соответствующего теоретического анализа в настоящее время представляет весьма сложную задачу. Статический анализ значительно проще, а точность получаемых при этом результатов оказывается во многих случаях достаточной для проведения инженерных расчетов на прочность при условии, что величина скачка трещины мала по сравнению с размерами рассматриваемого элемента конструкции и с расстоянием от трещины до его ближайшей поверхности.

4.3. Общие закономерности усталостного разрушения металлов и развитие усталостных трещин [1, 6—15]

Стадийность в усталостном разрушении металлов. Разрушение материалов под действием циклической (изменяющейся во времени по величине или по величине и знаку) нагрузки называют усталостным разрушением. Это акт, происходящий не мгновенно при достижении напряжениями предельных значений, а длительный процесс накопления повреждений: зарождения и развития несплошностей типа трещин. Кроме того, его отличительная особенность та, что усталость металлов наблюдается при напряжениях как выше, так и значительно ниже обычного предела текучести материалов. Общепринято деление процесса усталостного разрушения материалов на три стадии: I — инкубационную, II — зарождения трещины и III — ее докритического развития (хотя некоторые выделяют IV — стадию долома), что схематически представлено на рис. 4.21, где σ_W — предел усталости; N_W — число циклов до разрушения при напряжении, равном пределу усталости; N_C— критическое число циклов, по достижении которого при напряжении, равном пределу усталости, начинают возникать субмикроскопические трещины; σ_C — критическое напряжение усталости, при котором разрушение наступает за N_C циклов; σ_y — циклический предел упругости, при котором необратимые искажения кристаллической решетки не появляются, как бы ни было велико число циклов нагружения.

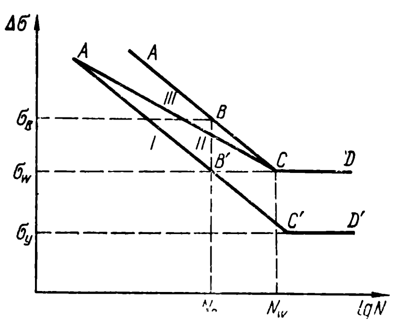


Рис. 4.21. Диаграмма усталостного разрушения, предложенная В. С. Ивановой.

Для зарождения усталостного разрушения (появления трещин) всегда необходима некоторая пластическая деформация, которая проявляется в виде полос скольжения, выходящих на поверхность деформируемого тела. Это подтверждают не только прямые визуальные наблюдения, но и многие косвенные. Например, бездефектные монокристаллы (усы) не поддаются усталостному разрушению при очень высоких напряжениях, если перед этим они не были пластически деформированы. Вполне согласуется с такими представлениями и тот факт, что обработка поверхностного слоя с целью придания ему высокого сопротивления скольжению (пластическим сдвигам) всегда приводит к повышению усталостной прочности. Этому, правда, противоречило много фактов зарождения трещин под поверхностью, особенно в высокопрочных сталях. Однако впоследствии многие из них были объяснены наличием явных дефектов под поверхностью: пустотами, включениями или локальными напряжениями. Образование полос скольжения нельзя рассматривать само по себе как собственно разрушение, хотя бы потому, что это процесс обратимый, хотя и требующий обыкновенно для возврата некоторой энергии активации (сообщается путем нагрева). Поэтому эту первую стадию, занимающую относительно мало времени, называют инкубационной, или подготовительной, стадией усталостного разрушения (область I на рис. 4.21).

Образование субмикротрещин в полосах скольжения, у границ блоков, зерен и двойников, около частичек второй фазы, включений и т. п. в

результате слияния дислокаций и вакансий, а также возникновения разрывов, обусловленных концентрацией напряжений,— вторая стадия усталостного разрушения — стадия разрыхления материала (область II на рис. 4.21). На этой стадии микротрещина формируется и развивается через объемы с сильно нарушенной микроструктурой, постепенно она становится доминантным дефектом в данной части материала (по меньшей мере в объеме данного зерна). Развитие микротрещины на этой стадии имеет свой определенный механизм и управляется своими закономерностями. Процесс протекает все более неравномерно — субмикротрещины растут и сливаются, превращаясь в микротрещины, так что чем больше размер микротрещины, тем меньше образуется субмикротрещин. Таким образом, вторую стадию характеризуют нарушения сплошности (субмикро- и микротрещины), размер которых одного порядка с размером элементов структуры материала (зерен, блоков, включений).

Третья стадия (область III на рис. 4.21) начинается, когда одна из микротрещин, находящаяся в наиболее благоприятных условиях, пересекает границу одного, а затем нескольких зерен и перерастает в макротрещину. Разрушение, которое было вначале более или менее равномерно распределено в деформируемом материале (главным образом в его приповерхностном слое) постепенно концентрируется и в конце полностью локализуется у доминантной макротрещины, развитие которой и есть, по существу, усталостное разрушение тела (его третья стадия).

Таким образом, дальнейший процесс усталостного разрушения материала связан с развитием сформировавшейся макротрещины. Он контролируется не локальными условиями напряженно-деформированного состояния в пределах блока или зерна, а более общими интегральными характеристиками материала. Следовательно, можно говорить о некоторой однородной среде, наделенной свойствами макрообъемов реального материала, определяемыми путем его обычных испытаний. Характерно, что при переходе от микро- к макротрещине первая зарождается и распространяется преимущественно в плоскостях скольжения в направлениях, близких к плоскостям максимальных касательных напряжений, однако далее, достигнув некоторой длины, она менее или более плавно меняет направление и распространяется (уже в макромасштабах) в плоскостях, перпендикулярных максимальным нормальным напряжениям. Момент и детали перехода зависят от структуры и свойств материала, вида напряженного состояния, среды и т. п. Хотя точной границы между микро- и макротрещинами провести нельзя, совокупность приведенных выше черт убедительно свидетельствует о том, что образование макротрещины знаменует начало принципиально новой стадии усталостного разрушения. Третья стадия оканчивается, когда макротрещина достигает критического размера.

В дальнейшем трещина растет спонтанно за счет энергии деформации тела до полного разделения его на части. Продолжительность этой четвертой стадии обычно мала по сравнению с предшествующими, и поэтому ее часто не принимают во внимание. Длительность периодов зарождения и развития трещины изменяется в широких пределах (по различным оценкам от 30 до 90 % общей долговечности) в зависимости от материала, геометрии тела и условий нагружения. Анализ зависимостей, представленных на рис. 4.21, показывает, что в области ограниченной долговечности материала с увеличением уровня напряжений продолжительность стадии распространения макротрещины становится определяющей.

Таковы общие закономерности развития усталостного разрушения гладких (без концентраторов) образцов материала. Однако многие детали машин и механизмов имеют конструктивные концентраторы напряжений. Вероятно, при циклическом нагружении таких изделий у основания концентратора происходят те же процессы, что и на поверхности гладкого образца, Но даже при небольших внешних напряжениях вследствие их боль-

шой концентрации у вершины надреза трещины зарождаются уже после относительно небольшого числа циклов нагружения. Кроме того, дефекты типа трещин могут образоваться в материале также в результате различных технологических операций (термообработки, прокатки, механической обработки и т. п.). Ими могут быть дефекты в сварочных швах. Поэтому с точки зрения стадийности процесса усталости существует три способа расчета усталостной долговечности N (рис. 4.22): 1) тип A — уже существует небольшая трещина, срок службы определяется периодом распространения трещины; 2) тип B — зарождение трещины занимает небольшую долю долговечности, остальное — период развития трещины; 3) тип C— долговечность определяется в основном периодом зарождения трещины, и только незначительную долю долговечности занимает ее рост. Следовательно, во многих важных с точки зрения инженерной практики случаях продолжительность докритического роста усталостной трещины определяет долговечность конструкции, т. е. скорость распространения усталостных трещин является важной характеристикой механических свойств материалов, необходимой для количественного анализа процесса развития трещин и расчета долговечности, а также выбора материала для работы в заданных условиях.

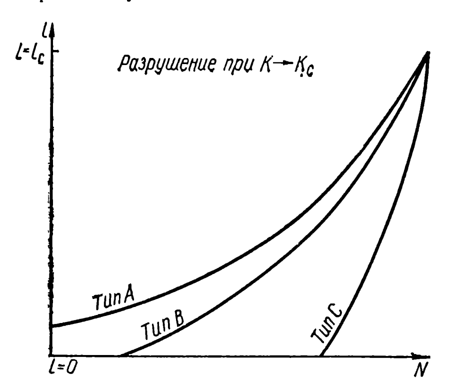


Рис. 4.22. Основные схемы развития усталостного разрушения.

Аналитические подходы в теории распространения усталостных трещин. Время работы элемента конструкции, в котором распространяется усталостная трещина в одной плоскости, характеризуется числом циклов нагружения N, а геометрическая конфигурация подвижного контура усталостной трещины — радиусом-вектором и координатным углом φ (рис. 4.23). Считая, что значение N большое, а приращение радиуса-вектора $\Delta\mathbf{r}$ за один цикл весьма мало, с величинами $r=|\mathbf{r}|$ и N можно обращаться как с непрерывными переменными. Скорость v распространения трещины представляется формулой

$$v = \frac{\partial r}{\partial N} \cos\theta, \tag{4.59}$$

где θ — угол между направлением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и нормалью к контуру трещины

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}}.$$

На основании соотношения (4.59), а также теории размерностей кинетика усталостного распространения трещины определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial r}{\partial N}\left[r^{-2}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + 1\right]^{-1/2} = \frac{r}{N} F(\lambda_1, \dots, \lambda_m). \tag{4.60}$$

Здесь $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — неизвестная безразмерная функция безразмерных величин λ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), которые могут зависеть от радиуса-вектора r, числа циклов нагружения N, внешней нагрузки, физических характеристик материала и т. д.

Если кинетическая система контуров трещины концентрическая или трещина распространяется в пластине (r — изменяющийся радиус трещины, $\partial r/\partial\varphi = 0$), то уравнение (4.60) принимает вид

$$\frac{\partial r}{\partial N} = \frac{r}{N} E(\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

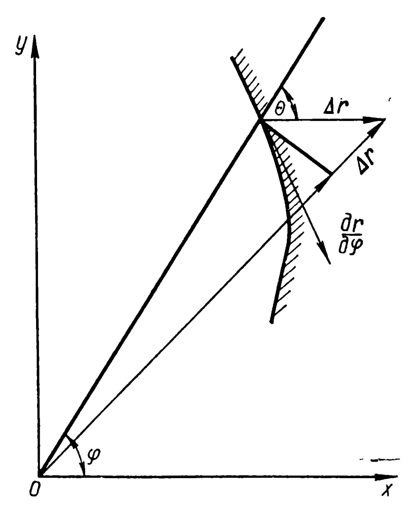


Рис. 4.23. Расчетная схема подвижного контура усталостной трещины.

Для установления структуры функции $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ выбирается обычно один или два физических параметра, ответственных за рост трещины, и экспериментально находится корреляция между этими параметрами и скоростью роста трещины. При постоянных воздействиях внешней среды характер усталостного распространения трещины определяют следующие основные параметры: σ — среднее напряжение, действующее в сечении образца, r — изменяющийся радиус трещины, $K_{\rm I}$ — коэффициент интенсивности напряжений в окрестности контура трещины. Все известные зависимости можно привести к одному из следующих равенств:

$$\frac{dr}{dN} = F_1(\sigma, r, C_1, \ldots, C_l), \tag{4.61}$$

$$\frac{dr}{dN} = F_2(K_{\rm I min}, K_{\rm I max}, C_1, \ldots, C_l), \tag{4.62}$$

где C_j — константы. Соотношения (4.61) и (4.62) описывают кинетику роста усталостной трещины в материале с однородными механическими свойствами. Кроме того, так как σ и r — неинвариантные переменные, то дифференциальные уравнения типа (4.61) пригодны только для описания кинетики усталостной трещины в материале при одной какой-либо силовой схеме (константы C_j, установленные для одной схемы нагружения, не могут быть применимы для другой). Иными словами, константы C_j, которые входят в дифференциальное уравнение (4.61), характеризуют усталостное разрушение не материала, а определенной конструкции (например, испытываемых образцов, на основании которых они установлены).

Функциональная зависимость (4.62) отличается большей универсальностью, и это объясняется следующим. Процессы, происходящие в окрестности контура трещины в условиях циклического нагружения, будут в некоторой степени адекватны аналогичным процессам при статическом растяжении, если частота положения циклического напряжения не слишком высока, т. е. когда еще не сказываются эффекты, обусловленные задержкой пластического течения. Поэтому при усталостном распространении макротрещины в малой окрестности ее контура формируется зона пред-

разрушения, механическое состояние которой при симметричном относительно плоскости трещины нагружении описывается коэффициентом интенсивности напряжений K_I.

Кинетические зависимости скорости роста усталостных трещин от параметров напряженно-деформированного состояния. Исследования распространения усталостных трещин как самостоятельной стадии начато сравнительно недавно (примерно в конце 1960-х гг.), поскольку ранее основное внимание было сконцентрировано на зарождении трещин. Это объясняется тем, что, во-первых, усталостные испытания проводили, как правило, на образцах с круглым поперечным сечением, что затрудняло экспериментальное наблюдение роста трещин; во-вторых, для конструкторских расчетов наибольший интерес представлял именно процесс зарождения трещин, который связывали с допустимыми эксплуатационными нагрузками. В настоящее время использование прогрессивных методов конструирования показало, что безопасность при конструировании будет обеспечена, если принять меры по предотвращению распространения трещин, а не их зарождения. С этой точки зрения данные о распространении усталостной макротрещины (и в частности, о скорости ее распространения) приобретают особый интерес.

Так как скорость v распространения усталостной макротрещины в основном определяется процессами, происходящими в зоне предразрушения, механическое состояние которой описывается коэффициентом интенсивности напряжений K_I, то, вероятно, между величинами v и K_I существует определенная функциональная зависимость, что и подтверждает эксперимент.

Экспериментальные данные о развитии усталостных трещин в материале принято представлять в виде кинетических диаграмм усталостного разрушения, которые изображают зависимость скорости роста трещины $v = \Delta l / \Delta N$ (прироста ее длины Δl за соответствующее число циклов ΔN) от размаха (разности максимального и минимального значений) коэффициента интенсивности напряжений за цикл $\Delta K_I = K_{I\max} - K_{I\min}$ как доминирующего фактора.

Полные кинетические диаграммы усталостного разрушения в логарифмических координатах $\lg v - \lg K_{I\max}(\Delta K)$ представляют собой S-образную кривую, протяженность которой вдоль оси абсцисс ограничена двумя вертикальными асимптотами $K_{I\max} = K_{th}$ слева и $K_{I\max} = K_{fC}$ справа (рис. 4.24), где K_{th} — пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений, ниже которого трещина не растет; K_{fC} — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, выше которого трещина начинает спонтанно развиваться ($K_{fC} \approx K_{IC}$). Таким образом, значение скорости роста усталостной трещины изменяется в широком диапазоне: от нуля до значения, равного, по-видимому, скорости звука в металле. Однако практически на экспериментальных диаграммах она охватывает диапазон 10^{-10}—10^{-5} м/цикл, при этом размах коэффициента интенсивности напряжений изменяется немногим более чем на порядок (например, в диапазоне 2—40 МПа$\cdot\sqrt{м}$ для алюминиевого сплава В95АТ3, 5—100 МПа$\cdot\sqrt{м}$ для среднепрочной стали 03Х13Г19, 4—120 МПа$\cdot\sqrt{м}$ для титанового сплава ВТ-20). При более низких скоростях роста трещины ($v \leqslant 10^{-10}$ м/цикл) диаграмма представляет собой почти вертикальный участок. Поэтому, принимая во внимание длительность таких испытаний, большинство исследователей ограничиваются определением скоростей примерно 10^{-10} м/цикл, когда соответствующий прирост длины трещины за цикл соизмерим с постоянной кристаллической решетки металлов. Закономерности усталостного разрушения при скоростях роста трещины

больше, чем $v = 10^{-5}$ м/цикл, изучают также редко вследствие их ограниченного практического применения.

Кинетическая диаграмма усталостного разрушения (рис. 4.24) по существу является диаграммой циклической трещиностойкости материала (ЦТМ), т. е. характеризует сопротивление материала распространению в нем трещины при действии циклически переменных нагрузок. В определении усталости материалов она играет такую же роль, как диаграмма растяжения при оценке статической прочности. На диаграмме ЦТМ выделяют три характерных участка, соответствующих (как следует из микрофрактографических и микроструктурных исследований) различным механизмам роста трещины. Первый криволинейный участок низких скоростей ($v < v_{1-2}$) отвечает $K_{\mathrm{I max}}$, близким к пороговым значениям K_{th}. Он изучен мало, несмотря на большой практический интерес, так как на этот период роста трещины в конструкции приходится более 90 % ее долговечности. На данном этапе трещина растет очень неравномерно: скачки прироста ее длины чередуются с остановками. Поэтому на первом участке диаграммы представляются некоторые усредненные значения скорости роста усталостной макротрещины $v_{\text{ср}}$. При $v_{\text{ср}} = 10^{-11} \div 10^{-12}$ м/цикл вовсе не означает, что прирост длины трещины за каждый цикл равняется $10^{-2} - 10^{-3}$ нм, что значительно меньше постоянной кристаллической решетки и физически невозможно.

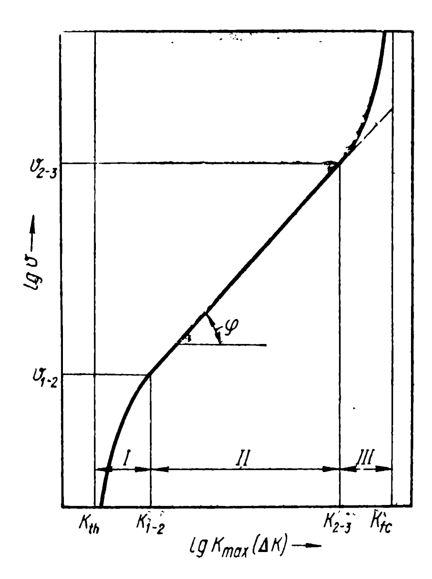


Рис. 4.24. Схема типичной кинетической диаграммы усталостного разрушения (цифрами показаны участки диаграммы); $\varphi = \mathrm{arctg}\, n$—см. формулу (4.63).

Второй участок диаграммы (участок Пэриса) $v_{1-2} \leqslant v \leqslant v_{2-3}$ — прямолинейный. Принято считать, что здесь трещина растет в основном равномерно за каждый цикл нагрузки. Пэрис с сотрудниками впервые заключил, что интенсивность поля напряжений около вершины трещины, характеризуемая коэффициентом K_{I}, должна определять скорость роста трещины, а затем предложил для описания прямолинейных участков диаграммы эмпирическую формулу

$$v = C\,(\Delta K_{\mathrm{I}})^n, \tag{4.63}$$

где n — константа, представляющая собой тангенс угла наклона этой прямой; C — константа, определяющая ее положение по оси ординат (рис. 4.24). Позднее уравнение (4.63) было записано в более удобной форме:

$$v = C\,(\Delta K_{\mathrm{I}})^n = 10^{-7}\left(\frac{\Delta K_{\mathrm{I}}}{K_*}\right)^n. \tag{4.64}$$

где K_* — значение ΔK_I при $v = 10^{-7}$ м/цикл (имеет размерность коэффициента интенсивности напряжений и более четкий физический смысл в отличие от константы C, размерность которой к тому же зависит от n).

Протяженность второго участка диаграммы (рис. 4.24), определяемая значениями $v_{1-2}(K_{1-2})$ и $v_{2-3}(K_{2-3})$, обусловлена материалом и условиями опыта. В большинстве случаев v_{1-2} лежит в диапазоне $v = 10^{-9} \div 10^{-8}$ м/цикл, v_{2-3} — в диапазоне $v = 5 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-6}$ м/цикл.

Третий участок диаграммы ($v > v_{2-3}$) криволинейный, крутизна которого все увеличивается по мере приближения $K_{I\max}$ к критическому значению K_{fC}. Это значение K_{fC}, полученное при циклическом нагружении, может отличаться в ту или иную сторону (хотя оно обычно меньше) от критического значения коэффициента интенсивности напряжений K_C, определенного при статических испытаниях, и это сопровождается различиями в размере пластической зоны и микростроении изломов. На этом участке трещина развивается также скачкообразно. Причем тем интенсивнее, чем более наглядно проявляется переход от второго к третьему участку диаграммы. По-видимому, отсутствием скачков хрупкого разрушения можно объяснить часто встречающиеся случаи, когда такого перехода явно нет, и прямолинейный участок диаграммы распространяется на более высокие скорости роста усталостной трещины ($v = 10^{-5} \div 10^{-4}$ м/цикл). Второй и третий участки диаграммы хорошо описывает формула Г. П. Черепанова, полученная на основании гипотезы о постоянстве диссипированной энергии при образовании единичной поверхности разрушения и анализа размерностей

$$v = -\beta \left[(K_{I\max}^2 - K_{I\min}^2)/K_C^2 + \ln \frac{K_C^2 - K_{I\max}^2}{K_C^2 - K_{I\min}^2} \right], \qquad (4.65)$$

где β — определяемая из эксперимента постоянная.

Аналитическую зависимость (4.62) при $K_{j\min} = 0$ можно представить в виде неограниченного числа вариантов элементарных и специальных функций, которые хорошо будут описывать диаграмму усталостного разрушения в диапазоне $K_{th} \leqslant K_{j\max} \leqslant K_{fC}$. К настоящему времени предложено большое количество математических моделей (табл. 4.2) описания всех трех участков диаграмм, содержащих от четырех до восьми подлежащих экспериментальному определению параметров. Четыре из них: (3), (4), (11) и (14), по-видимому, в какой-то мере из-за математических трудностей, возникающих при вычислении их параметров, никогда не использовались на практике. Все эти формулы, кроме (13), предусматривают наличие вертикальной асимптоты $K_{I\max} = K_{fC}$, а за исключением (13) и (15) — отличного от нуля порогового коэффициента интенсивности напряжений. Формулы (5), (8), (9) и (13) симметричны относительно центра, а формулы (1), (2), (6)—(9), (11), (14) при $R = 0$ можно рассматривать как частный случай общего выражения

$$v = AK_{I\max}^s (K_{I\max}^m - K_{th}^m)^q / (K_{fC}^n - K_{I\max}^n)^\nu, \qquad (4.66)$$

где A, s, m, n, q и ν — постоянные для материала в заданных условиях испытания, предложенные в работах С. Я. Яремы.

А. Е. Андрейкивым, М. М. Стадником и П. С. Кунем для описания процесса усталостного разрушения развиты деформационные и энергетические подходы. В первом случае на основании уравнения Коффина—Мен-

Таблица 4.2. Аналитические зависимости для описания диаграмм усталостного разрушения

Номер формулы	Автор	Формула
1	Ф. Ердоган, М. Ратвани	$v = A(1-R)^q \dfrac{(K_{\mathrm{I}\max} - K_{th})^m}{K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max}}$
2	А. Дж. Мак-Евили	$v = A(1-R)^2 \dfrac{K_{\mathrm{I}\max}^2 - K_{th}}{K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max}} (K_{fC} - RK_{\mathrm{I}\max})$
3	М. П. Вцук	$v = v_0 \left\{ \ln \dfrac{K_{fC}^2 - K_{\mathrm{I}\max}^2}{K_{fC}^2 - K_0^2} + \dfrac{K_{\mathrm{I}\max}^2 - K_0^2}{K_{fC}^2} + \dfrac{A}{\dot{K}_{\mathrm{I}\max}} \left[\ln \dfrac{(K_{fC} + K_{\mathrm{I}\max})(K_{fC} - K_0)}{(K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max})(K_{fC} + K_0)} - 2\dfrac{K_{\mathrm{I}\max} - K_0}{K_{fC}} \right] \right\}$, где $\dot{K}_{\mathrm{I}\max} = dK_{\mathrm{I}\max}/dt$; $K_0 = \inf(K_{th}, RK_{\mathrm{I}\max})$
4	А. Фреденталь	$v = v_0 \ln^m [\ln(K_{fC}/K_{th}) \lg^{-1} [K_{fC}/K_{\mathrm{I}\max}]$
5	Дж. Е. Коллиприст, К. В. Девис, К. Е. Федерсен	$v = v_0 \lg^q [(1-R) K_{\mathrm{I}\max}/K_{th}] \times \lg^{-q} [K_{fC}/(1-R) K_{\mathrm{I}\max}]$
6	Х. П. Чу	$v = A(1-R)^{n-m} \dfrac{(K_{\mathrm{I}\max} - K_{th})^n}{(K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max})^m}$
7	Х. П. Чу	$v = A(1-R)^{n-m} \dfrac{K_{\mathrm{I}\max}^n - K_{th}^n}{(K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max})^m}$
8	С. Я. Ярема, С. И. Микитишин	$v = v_0 \left[\dfrac{K_{\mathrm{I}\max} - K_{th}}{K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max}} \right]^q$
9	К. М. Бранко, И. К. Радон, Л. Е. Кальвер	$v = v_0 (1-R^2)^q \left[\dfrac{K_{\mathrm{I}\max}^2 - K_{th}^2}{K_{fC}^2 - K_{\mathrm{I}\max}^2} \right]^q$
10	А. Е. Андрейкив	$v = v_0 \left[\dfrac{(K_{\mathrm{I}\max} - K_{th})^q}{(K_{fC} - K_{th})^q - (K_{\mathrm{I}\max} - K_{th})^q} \right]$
11	В. Д. Довер	$v = A(1-R)^{s+r-q} K_{\mathrm{I}\max}^s \dfrac{(K_{\mathrm{I}\max} - K_{th})^q}{(K_{fC} - K_{\mathrm{I}\max})^r}$

Номер формулы	Автор	Формула
12	Г. Е. Бови, Д. В. Хопнер	$v = v_0 \{\lg^q [K_{fC}/(K_{fG} - K_{\mathrm{I}\max})] - \lg^q [K_{fC}/(K_{fC} - K_{th})]\}$
13	К. Г. Анмс, Р. М. Веллейс, Д. Л. Санс	$v = v_0 \exp\left[(1 - R)^m \frac{K_{\mathrm{I}\max}^{2m} - K_m^{2m}}{K_{\mathrm{I}\max}^m}\right]$
14	Т. В. Дагген	$v = A \left[K_{\mathrm{I}\max} \frac{K_{\mathrm{I}\max} - K_{th}}{K_{fG} - K_{\mathrm{I}\max}}\right]^q$
15	А. Саксена, С. Дж. Худак	$v = v_0 (1 - R)^n \left[\frac{K_{fC}^n - K_{\mathrm{I}\max}^n}{K_{\mathrm{I}\max}^n} + \frac{B(1 - R)^{n-m}}{K_{\mathrm{I}\max}^n}\right]^{-1}$
16	П. Ромвари, Л. Том	$v = v_0 \left\{- \lg\left[1 - \left(\frac{K_{\mathrm{I}\max} - K_{th}}{K_{fC} - K_{th}}\right)^m\right]\right\}^q$

Примечание. В формуле (13) через K_m обозначена постоянная, представляющая собой абсциссу центра симметрии диаграммы усталостного разрушения.

сона количество циклов нагружения ΔN, за которые трещина осуществит скачок на величину Δl, определяется из выражения

$$\Delta N/\Delta\varepsilon^m = \varepsilon_*^m, \tag{4.67}$$

где $\Delta\varepsilon$ — размах амплитуды пластической деформации в вершине трещины за один цикл; m и ε_* — константы материала, определяемые экспериментально. За длину скачка Δl принимается расстояние x между вершиной трещины и точкой максимума напряжений в зоне предразрушения, которое определяется по результатам исследований Ф. А. Мак-Микина соотношением

$$\Delta l = x_* = \alpha'\delta_{\max}, \tag{4.68}$$

где x_* — расстояние от вершины трещины к точке зоны предразрушения, в которой достигается ε_{fC}; α' — коэффициент пропорциональности; $\delta_{\max}$ — раскрытие вершины трещины.

На основании уравнений (4.67) и (4.68) скорость продвижения трещины определяется по формуле

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta N} = \beta \frac{K_{\mathrm{I}\max}^2}{\sigma_т E}\left(\frac{\Delta K_\mathrm{I}}{K_*}\right)^{2m}, \tag{4.69}$$

где β — коэффициент, который необходимо определить экспериментально; $K_* = \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_{fG}}} K_{fC}$; ε_{fC} — критическое значение деформации ε.

Во втором случае (используя гипотезу о том, что энергия деформации, расходуемая на образование единицы новой поверхности усталостной трещины, величина постоянная для заданного материала) для скорости v распространения трещины получено выражение

$$v = 2\alpha'\delta_{fG}\left(\sigma_т + \frac{A}{n+1}\varepsilon_{fG}\right)^{-1}\frac{K_{I\max}^2}{K_{fG}^2}\left[\sigma_т\frac{K_{I\max}^2 - K_{I\min}^2}{K_{fG}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{n+1}\frac{\varepsilon_{fG}^n}{K_{fG}^{2(n+1)}}\left(K_{I\max}^{2(n+1)} - K_{I\min}^{2(n+1)}\right)\right], \qquad (4.70)$$

где δ_{fG}, ε_{fG}, K_{fG}, $\sigma_т$ — механические характеристики, взятые из эксперимента; A, n, α' — характеристики закона упрочнения материала;

$$K_{I\min} = \begin{cases} K_{I\min} & (K_{I\min} > K_{th}), \\ K_{th} & (K_{I\min} < K_{th}). \end{cases}$$

Полученные таким образом формулы (4.69)—(4.70) теоретически обосновывают ранее приведенные эмпирические зависимости (4.63) и (4.64), а для некоторых конкретных случаев (нулевая асимметрия цикла нагружения, отсутствие упрочнения материала и т. п.) между ними наблюдается хорошая корреляция.

Зависимости (4.62), будучи по своей сути лишь аппроксимационными формулами, имеют и другой существенный недостаток: влияние внешних факторов здесь учитывается не прямо (исключение составляет только асимметрия цикла R), а посредством изменения при их действии параметров C_i, хотя законы такого изменения не установлены.

В известных законах роста усталостных трещин, пожалуй, лишь в уравнении Йокобори

$$v = A\exp\left[(a\ln K_{I\max} - \Delta H_0)/RT\right], \qquad (4.71)$$

где A, a, H_0, R — постоянные, кроме величины $K_{I\max}$ в качестве дополнительного параметра выступает внешний фактор—температура испытания T.

В. В. Панасюк, Л. В. Ратыч и И. Н. Дмытрах при описании развития коррозионно-усталостных трещин в деформируемом металлическом теле в уравнения циклической трещиностойкости ввели параметры, характеризующие электрохимические свойства среды в вершине трещины. Уравнение скорости v представляется в виде

$$v = f(C_i, K_{I\max}, \mathrm{pH}, \varphi_в), \qquad (4.72)$$

где C_i — параметры, характеризующие трещиностойкость материала; pH — водородный показатель среды.

Значения pH и $\varphi_в$ отличаются от значений тех же параметров на поверхности тела ($\mathrm{pH}_{пов}$, $\varphi_{пов}$). Как показали исследования, они зависят от длины трещины и времени действия среды и нагрузки. Отсюда, а также из выражения (4.72) следует, что диаграммы ЦТМ при воздействии на металл коррозионной среды будут инвариантными (т. е. независимыми от условий испытания) характеристиками системы «металл—среда», если они построены при соблюдении следующих условий:

$$\mathrm{pH} = \mathrm{const}, \quad \varphi_в = \mathrm{const}. \qquad (4.73)$$

Если эти условия не соблюдаются, то диаграммы ЦТМ — неинвариантны и не могут служить характеристиками роста трещины в деформируемом металле при одновременном воздействии на него поверхностно-активных и коррозионно-агрессивных сред.

На рис. 4.25 показаны диаграммы ЦТМ для стали 20СФ (кремнистая сталь, $\sigma_в = 707$ МПа, $\sigma_т = 589$ МПа), построенные в сероводородсодержащей водной среде, где кривая *4* получена при соблюдении условий (4.73), а кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5* — без соблюдения этих условий. Данные свидетель-

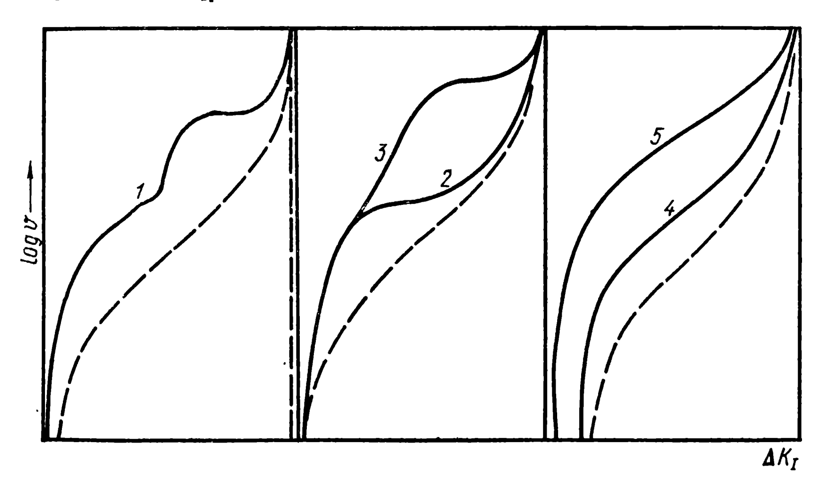


Рис. 4.25. Типичные диаграммы коррозионно-усталостного разрушения при испытаниях в водородной среде. Кривая *1* — инвариантная, а *2*, *3*, *4*, *5* — неинвариантные.

ствуют о принципиальном значении предложенного подхода. Это перспективное направление коррозионной механики усталостного разрушения материала в 1980-е гг. получило мощный импульс в своем развитии, особенно в связи с необходимостью повышения надежности энергетических установок.

Анализ закономерностей формирования пластических зон у вершины усталостной трещины показал, что в результате цикличности нагружения в пластической зоне возникают сжимающие остаточные напряжения, вызывающие закрытие вершины трещины даже при полуцикле растяжения, еще до достижения $K_{Imin} = 0$. Учитывая этот эффект, В. Элбер в 1970 г. предложил так называемый эффективный коэффициент интенсивности напряжений $\Delta K_{эф}$, значение которого меньше, чем формально рассчитанная величина

$$\Delta K_{эф} = (0{,}5 + 0{,}4R)\,\Delta K, \qquad (4.74)$$

где R — асимметрия цикла.

Факт закрытия трещины подтвержден экспериментально, однако известные исследования не позволяют однозначно интерпретировать концепцию Элбера. В настоящее время установлен ряд других механизмов закрытия трещины (оксидообразование на поверхности разрушения ее шероховатость и др.).

Еще более сильно этот эффект проявляется при перегрузках. В результате отмечается задержка распространения трещины, которая может

составлять многие тысячи циклов. Здесь рост трещины происходит лишь тогда, когда при последующем циклическом нагружении в пластической зоне превышаются остаточные сжимающие напряжения. Поскольку эксплуатационные нагрузки имеют в основном не постоянную амплитуду, расчет периода распространения трещины под действием случайных, программных, импульсных и циклических нагрузок представляет собой очень важную практическую задачу. Однако вследствие большой сложности проблемы ее решение можно ожидать лишь в будущем.

Уже в настоящее время большое практическое значение имеют кинетические диаграммы усталостного разрушения, т. е. диаграммы циклической трещиностойкости материалов, в частности коррозионно-усталостной трещиностойкости. Из этих диаграмм устанавливаются характеристики циклической трещиностойкости материала, на их основании выбирается материал конструкции, оцениваются влияния условий эксплуатации и т. п. При определенных допущениях по таким диаграммам можно рассчитать долговечность, т. е. количество циклов N до разрушения путем интегрирования уравнения

$$v = \frac{dl}{dN} = v\,[K\,(l)]. \tag{4.75}$$

В результате получается

$$N_{д} = \int_{l_0}^{l_C} \frac{dl}{v\,[K\,(l)]}, \tag{4.76}$$

где l_0 и l_C — начальная и критическая длины трещины.

Скорость докритического роста усталостных трещин зависит от многих факторов:

а) механических —амплитуда напряжений, асимметрия цикла, вид и спектр нагрузки, частота и т. д.;

б) металлургических — структурное состояние материала, размер зерна, наличие включений, степень и характер легирования;

в) физических и физико-химических — температура, облучение, среда;

г) геометрических — абсолютные размеры образца и т. п.

Так как механизм развития усталостной трещины в металлах определяется коэффициентом интенсивности напряжений, то влияние различных факторов на процесс разрушения существенно зависит от скорости движения трещины, т. е. эти закономерности необходимо рассматривать дифференцированно по участкам кинетической диаграммы усталостного разрушения. На I участке диаграммы (см. рис. 4.24) отмечается сильное влияние асимметрии и частоты цикла нагружения, микроструктуры материалов и окружающей среды. С увеличением асимметрии и понижением частоты нагружения скорость роста трещины увеличивается тем сильнее, чем активнее по отношению к металлу окружающая среда. Влияние асимметрии и частоты связано, в частности, с явлением закрытия трещины, а также с временны́ми эффектами при взаимодействии металла со средой. Наблюдаемые в этом случае эффекты зависят от структурного состояния металла. В припороговой области роль микроструктуры материалов велика даже при испытаниях на воздухе.

На II участке диаграммы влияние микроструктуры и асимметрии цикла нагружения ослабевает, хотя продолжают оказывать значительное отрицательное воздействие окружающая активная среда и нагружения низкой частоты. На III участке диаграммы снова проявляется сильное влияние микроструктуры и асимметрии, что связано с доминированием в этих

условиях статических механизмов разрушения, ускоряющих развитие трещины. Здесь (при больших уровнях K_{Imax}) у вершины усталостной трещины образуются сравнительно большие пластические зоны, которые охватывают и вовлекают в процесс разрушения различные структурные элементы металлов, в первую очередь границы зерен. Следствием образования больших пластических зон является также чувствительность скорости роста трещины к абсолютным размерам образца, особенно его толщине Как правило, скорость распространения усталостной трещины с увеличением толщины растет. Что касается влияния среды и частоты, то на III участке диаграммы оно практически исчезает.

Развитие усталостного разрушения представляет собой сложный процесс, зависящий от многих факторов. Поэтому установление параметров, описывающих его, должно проходить в условиях, моделирующих эксплуатационные. Роль этих параметров призваны играть характеристики циклической трещиностойкости материалов, определение которых с целью обеспечения их достоверности и сопоставимости строго регламентировано в Методических указаниях (МУ), утвержденных Госстандартом СССР. МУ разработаны для случаев, когда применима линейная механика материалов и напряженно-деформированное состояние у вершины трещины вполне характеризуется коэффициентом интенсивности напряжений. В них описаны конструкция испытательных образцов и их изготовление, проведение испытаний и обработка их результатов. В качестве характеристик циклической трещиностойкости металлов используются: пороговое значение K_{th}, критическое значение K_{fC}, параметры n и C или n и K_* в соотношениях (4.63) и (4.64) соответственно.

Дополнительными характеристиками являются значения K_{1-2} и K_{2-3} (см. рис. 4.24). Широко используются как характеристики также значения K_v — величины коэффициента интенсивности напряжений при заданной скорости роста трещин (K_{10}^{-10}, K_{10}^{-9} и т. д.). Исходные данные о циклической трещиностойкости материалов дают перечисленные выше характеристики, определенные в обычной воздушной среде при атмосферном давлении и относительной влажности 40—60 %, не содержащей активных по отношению к испытываемому материалу примесей при коэффициенте асимметрии $R = \frac{K_{I\,min}}{K_{Imax}} \approx 0 \div 0,1$, частоте цикла $f = 10 \div 20$ Гц, синусоидальной форме цикла и температуре 290 — 296 К.

4.4. Расчетная модель для определения периода зарождения усталостной макротрещины *

Определение периода зарождения усталостной макротрещины в деформируемом твердом теле — важнейшая задача теории усталости материалов.

Рассмотрим неограниченное тело, ослабленное концентратором напряжений в виде полости с гладкой поверхностью, симметричной относительно ее срединной плоскости. На рис. 4.26 изображено сечение полости плоскостями xOz и xOy (срединная плоскость) прямоугольной системы декартовых координат $Oxyz$. Пусть такое тело подвергнуто пульсирующему растяжению симметрично относительно плоскости xOy. Задача состоит

---

* В этой рубрике излагается расчетная модель, сформулированная в работах В. В. Панасюка, А. Е. Андрейкива и П. С. Куня.

в определении количества циклов нагружения $N = N_з$, по достижении которого у поверхности концентратора образуется усталостная макротрещина.

В результате пульсирующего растяжения в окрестности контура L_0 срединного сечения полости возникает пластическая область — область предразрушения (на рис. 4.26 заштрихована) глубиной $r_п$, которая и будет очагом зарождения усталостной макротрещины.

Предположим, что деформация растяжения ε в упомянутой выше области предразрушения будет инвариантной характеристикой усталостно-

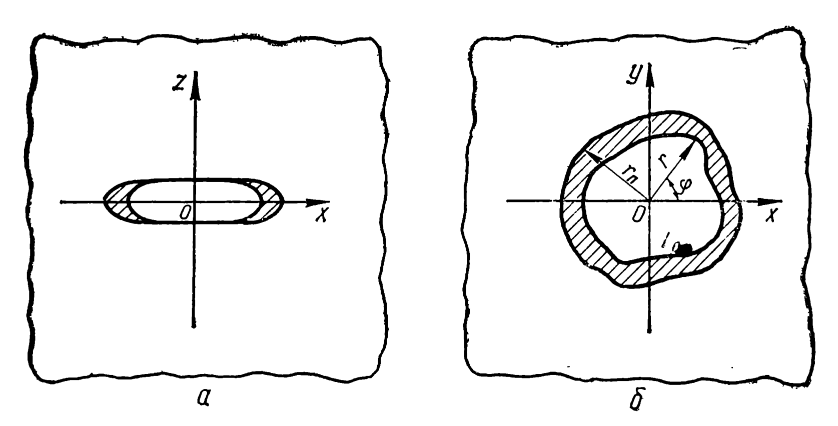


Рис. 4.26. Схема сечения неограниченного тела с полостью координатными плоскостями xOz (*а*) и xOy (*б*).

го разрушения. Другими словами: скорость образования единицы новой поверхности усталостной трещины у вершины гладкого или остроконечного (типа трещины) концентратора есть однозначная функция деформации растяжения ε. Эта гипотеза хорошо подтверждается результатами исследования остроконечных концентраторов напряжений (типа трещин), когда значение ε может быть определено через коэффициент интенсивности напряжений K_I. На основании этой гипотезы, а также учитывая, что (см. п. 4.3) скорость распространения усталостной трещины направлена по нормали к ее контуру, для определения кинетики зарождения усталостной трещины получим такое дифференциальное уравнение:

$$\Phi(\Lambda)\left[1 + r^{-2}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{-1/2}\frac{\partial r}{\partial N} = 1. \qquad (4.77)$$

Здесь $\Phi(\Lambda)$ — характеристическая функция усталостного разрушения, которая при заданных условиях (внешняя среда и температура) является характеристикой материала (диаграмма циклической трещиностойкости); r — радиус контура зарождающейся трещины, который в начальный момент совпадает с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ контура L_0; φ — координатный угол полярной системы координат ($Or\varphi$) (см. рис. 4.26); величина

$$\Lambda = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{fO}}}. \qquad (4.78)$$

Для нахождения периода ($N_з$) зарождения усталостной макротрещины в самом общем случае необходимо интегрировать уравнение (4.77) при заданных начальных и граничных условиях. Это связано со значительными математическими трудностями. Поэтому разберем некоторые частные, более простые, случаи данной задачи, которые имеют также важное значение для инженерной практики.

Пусть рассматриваемая полость осесимметрична или рассматриваемое тело представляет собой пластину с вырезом. В таком случае уравнение (4.77) принимает вид $\Phi(\Lambda)\frac{dr}{dN} = 1$ (для пластины радиус r — полудлина l протяженности выреза). Из этого уравнения период зарождения $N_з$ макротрещины глубиной r_1 определяется формулой

$$N_з = \int_{r_0}^{r_1} \Phi(\Lambda)\, dr, \qquad (4.79)$$

где Λ— функция деформации растяжения ε (см. соотношение 4.78), которая в свою очередь зависит от r.

Теперь следует сформулировать, как определять r_1 и функцию $\Phi(\Lambda)$ в выражении (4.79). Для того чтобы образовавшаяся у концентраторов трещина была макроскопической, необходимо, чтобы ее глубина r_1 была не меньше глубины первоначальной пластической зоны $r_п$ возле концентратора, т. е. трещина должна пройти эту зону и сформировать зону предразрушения, характерную для трещин. Для многих случаев геометрической конфигурации осесимметричных концентраторов это условие — необходимое и достаточное. Поэтому в формуле (4.79) следует положить

$$r_1 = r_п. \qquad (4.80)$$

Предположим, что материал тела идеально упругопластический, удовлетворяющий условию пластичности Треска. Тогда следует, что

$$\varepsilon\varepsilon_{fC}^{-1} = \delta\delta_{fG}^{-1}, \qquad (4.81)$$

где δ — раскрытие трещины в ее тупиковой части; δ_{fC} — критическое значение δ при циклическом нагружении, по достижении которого наступает спонтанное распространение трещины и разрушение тела. Для трещины достаточно малого размера l величина δ пропорциональна l (см., например [7]), т. е.

$$\delta = Bl, \qquad (4.82)$$

где B — константа. На основании равенств (4.81) и (4.82) можно записать, что при малых размерах трещин, например поверхностных,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + B_1 l. \qquad (4.83)$$

Здесь ε_0 — максимальная величина деформации ε в первоначальной области предразрушения; B_1 — неизвестный коэффициент, который определяется из следующих соображений. После того, как зародилась макротрещина глубиной $l = r_п - r_0$, деформация ε, раскрытие трещины в ее тупиковой части δ и коэффициент интенсивности напряжений K_I при отсутствии регулярных составляющих поля напряжений в зоне предразрушения будут удовлетворять следующему условию:

$$\varepsilon\varepsilon_{fG}^{-1} = \delta\delta_{fC}^{-1} = K_I^2 K_{IfC}^{-2},$$

где K_{IfG} — критическое значение коэффициента интенсивности напряже-

ний при усталости. На основании этого соотношение (4.83) примет вид

$$\varepsilon = K_{IfC}^{-2} (r_п - r_0)^{-1} [\varepsilon_0 K_{IfC}^2 (r_п - r_0) + K_I^2 \varepsilon_{fC} (r - r_0)]. \tag{4.84}$$

Используя равенства (4.78) и (4.84), можно определить величину Λ как функцию параметра r.

Из экспериментальных исследований и анализа соотношений (4.76) и (4.78) можно заключить, что характеристическая функция $\Phi(\Lambda)$ по своей структуре обратная по отношению к скорости v роста макротрещины в данном материале и может быть графически представлена в координатах $\Phi \sim \Lambda$ S-образной монотонно возрастающей кривой (рис. 4.27). Эта кривая $\Phi(\Lambda)$ ограничена координатной осью $\Lambda = 0$ и прямой $\Lambda = \Lambda_0$, где значение Λ_0 соответствует пороговому значению коэффициента интенисвности напряжений K_{th} (это эквивалентно деформации ε_{th} или раскрытию трещины δ_{th}), ниже которого трещина не распространяется.

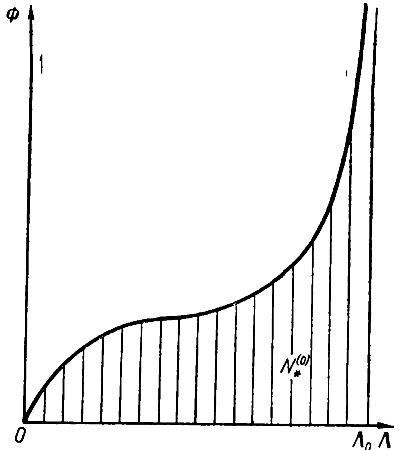


Рис. 4.27. Зависимость характеристической функции Φ от параметра Λ.

Полный диапазон изменения функции $\Phi(\Lambda)$ описывается следующим соотношением:

$$\Phi(\Lambda) = A\left[\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0 - \Lambda}\right)^m - 1\right]. \tag{4.85}$$

При малых значениях Λ ее достаточно точно можно аппроксимировать полиномом n-ой степени $A_j \Lambda^j$:

$$\Phi(\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} A_j \Lambda^j. \tag{4.86}$$

В соотношениях (4.85) и (4.86) величины A, Λ_0, m, A_n неизвестны. Они устанавливаются на основании экспериментальной диаграммы циклической трещиностойкости материала с макротрещиной в координатах (v^{-1}, Λ), при этом параметр Λ определяется по формуле $\Lambda = 1 - K_I/K_{fC} = 1 - \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_{fC}}$. Указанные параметры служат характеристиками материала.

Формулы (4.85), (4.86) в отличие от ранее известных разрешают более эффективно вести аналитические исследования кинетики распространения усталостных трещин для различных видов циклического нагружения и достаточно хорошо согласуются с опытами. Так, экспериментальные данные о циклической трещиностойкости стали 300 (США) хорошо описываются полиномом третьей степени (рис. 4.28, *а*):

$$\Phi(\Lambda) = 1288\Lambda - 5927\Lambda^2 + 9500\Lambda^3, \tag{4.87}$$

а экспериментальные данные для стали 65Г после закалки с отпуском

при 614 K функцией — (рис. 4.28,*б*)

$$\Phi(\Lambda) = 751{,}1\left[\left(\frac{0{,}85}{0{,}85-\Lambda}\right)^{2{,}5} - 1\right]. \qquad (4.88)$$

Графическая зависимость характеристической функции $\Phi(\Lambda)$ от безразмерного параметра Λ имеет также важное практическое значение при оценке долговечности элемента конструкции из данного материала. Построенные таким образом диаграммы циклической трещиностойкости материала в координатах Φ —Λ ограничивают площадь (между диаграммой и

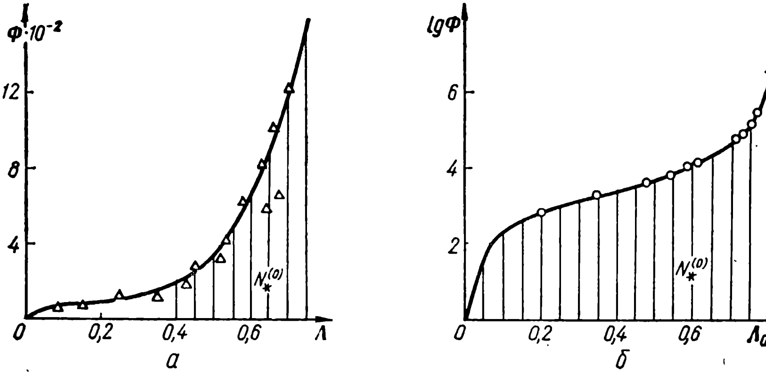


Рис. 4.28. Зависимости (4.87) (*а*) и (4.88) (*б*) и экспериментальные данные для сталей 300 (США) и 65Г (сплошная линия — расчет; точки — эксперимент).

осью абсцисс, рис. 4.28), которая характеризует относительную долговечность N_*^0 материала. Эту величину легко пересчитать для каждого конкретного вида элемента конструкции в долговечность (живучесть) данного элемента. Следует отметить удобство в построении таких диаграмм: каждая начинается из нулевой точки и, монотонно возрастая, уходит в область многоцикловой усталости (см. рис. 4.27), изменяясь в промежутке $0 \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda_0 < 1$. Построение таких диаграмм облегчает сравнительный анализ опытных данных для различных материалов и условий испытаний. Некоторая универсальность предлагаемых здесь диаграмм состоит в том, что они дают возможность исследовать не только докритический рост усталостной трещины, но и установить период ее зарождения.

В качестве примера, на основании соотношений (4.78)—(4.85) определим период зарождения макротрещины при усталости материала. С этой целью выражение для Λ подставляем в формулу (4.85), а затем полученное выражение для $\Phi(\Lambda)$— в (4.79) и производим интегрирование. В результате этого находим

$$N_з = Al_п\left\{\frac{2\Lambda_0^m}{(2-m)(\varepsilon_п-\varepsilon_0)}\left[\left(\Lambda_0 - 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_п}{\varepsilon_{fC}}}\right)^{2-m} - \left(\Lambda_0 - 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{fC}}}\right)^{2-m}\right] - \frac{2\Lambda_0^m(\Lambda_0-1)\varepsilon_{fC}}{(\varepsilon_п-\varepsilon_0)(1-m)} \times \left[\left(\Lambda_0 - 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{fC}}}\right)^{1-m}\right] - 1\right\}, \qquad (4.89)$$

где $\varepsilon_п = K_I^2 \varepsilon_{fC} K_{IfC}^{-2}$; K_I — коэффициент интенсивности напряжений в окрестности контура зародившейся макротрещины глубиной $l_п = r_п - r_0$.

Следовательно, если для рассматриваемого случая установлены величины $r_п$, ε_0, K_I, а также значения параметров A, m, Λ_0, ε_{fC} и K_{IfC}, то длительность периода зарождения усталостной макротрещины вычисляется на основании равенства (4.89). Такой подход можно использовать и при отсутствии первоначальных концентраторов напряжений.

4.5. Определение долговечности тела с трещиной произвольной конфигурации, подвергнутого циклическому нагружению

Распространение усталостных трещин в трехмерных телах. Рассмотрим трехмерное квазихрупкое тело, ослабленное макротрещиной области S_0 вдоль некоторой поверхности и подвергнутое циклическому нагружению. Задача состоит в определении времени (числа циклов $N = N_д$), по истечении которого трещина подрастает до критического размера и тело разрушится.

Выберем в теле сферическую систему координат r, φ, θ (рис. 4.29). Поверхность распространения усталостной трещины может быть задана уравнениями в параметрической $r = r(N, \theta)$, $\varphi = \varphi(N, \theta)$ или векторной $\mathbf{r} = \mathbf{r}(N, \theta)$ форме. Уравнения начальной поверхности S_0 усталостной трещины и ее контура зададим в векторной форме:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\varphi, \theta), \quad \mathbf{r}(0, \theta) = \mathbf{r}_0(\theta) \tag{4.90}$$

(углы θ и φ указаны на рис. 4.29).

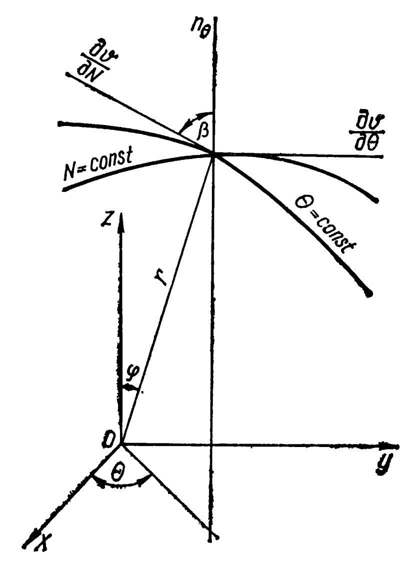


Рис. 4.29. Координатные линии на поверхности усталостной трещины.

Кинетику распространения усталостной трещины будем определять согласно подходу, предложенному в работах [1, 8], предполагая выполнение следующих условий:

1. Рассматриваемая трещина макроскопическая, т. е. около ее вершины реализуется условие автомодельности напряженно-деформированного состояния (уровень напряженно-деформированного состояния определяется только коэффициентами интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III} и значением регулярных частей компонент напряжений в зоне предразрушения).

2. На протяжении каждого цикла внешнее нагружение возрастает от нуля до некоторого амплитудного значения (пульсирующее нагружение), а его частота не слишком высока, т. е. инерционными эффектами будем пренебрегать.

3. Распространение трещины в какой-либо точке ее контура происходит вдоль площадок, которые проходят через касательную к контуру трещины в этой точке и на которых достигается максимальное значение деформации растяжения ε_{max}.

Обычно в распространенных конструкционных материалах механизм роста усталостной трещины квазихрупкий. При этом концентрация напряжений вблизи трещины вызывает пластические сдвиги в перпендикулярных ее контуру направлениях и образование дислокационных скоплений в пересекающихся плоскостях скольжения (рис. 4.30). Объединение таких дислокаций вдоль линии пересечения плоскостей скольжения приводит к зарождению микротрещин, которые, сливаясь с магистральной, вызывают ее продвижение.

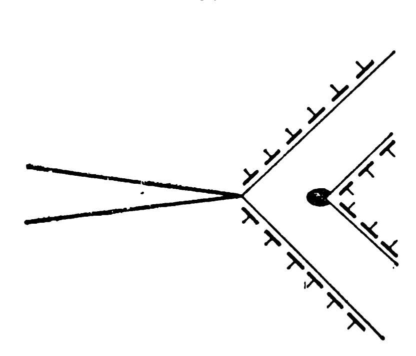


Рис. 4.30. Дислокационный механизм распространения усталостных трещин.

Доминирующая роль в процессе зарождения микротрещин принадлежит сдвиговым касательным напряжениям, перпендикулярным подвижному контуру трещины. Поэтому для упрощения решения задачи будем считать, что влияние касательных напряжений, действующих параллельно контуру трещины, на ее продвижение незначительно и ими будем пренебрегать. На основании этого, а также сформулированных выше условий будем считать справедливым следующее утверждение: скорость роста усталостной трещины — однозначная функция деформации растяжения ε_{max} (здесь подразумевается ее максимальное значение по амплитуде, минимальное ее значение равно нулю), имеющей место на площадках ее распространения. Эта функция при заданных параметрах окружающей среды и температуре — характеристика материала.

Рассмотрим поверхность усталостной трещины (рис. 4.29). При изменении параметров θ или N на этой поверхности образуются соответственно θ- или N линии. Линии $N = \text{const}$ будут составлять кинетическое многообразие контуров трещины, а линии $\theta = \text{const}$ описывать кинетику продвижения точек подвижного контура трещины в определенном направлении. Поэтому вектор касательной вдоль линии $\theta = \text{const}$ будет описывать скорость роста усталостной трещины в точке подвижного контура в направлении угла:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}. \tag{4.91}$$

Из третьего условия следует, что распространение усталостной трещины происходит в нормальной к подвижному контуру плоскости, т. е. вектор скорости трещины $\partial\mathbf{r}/\partial N$ и вектор нормали $\mathbf{n}_\theta$ к подвижному контуру ($N = \text{const}$) будут находиться в этой плоскости под некоторым углом β друг к другу. Математически это условие записывается так:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\mathbf{n}_б = \sin\beta, \tag{4.92}$$

где $\mathbf{n}_б$ — вектор бинормали к линии $N = \text{const}$: $\mathbf{n}_б = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2}$. Подстав-

ляя значение $n_б$ в соотношение (4.92), получим

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} - \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\right| \cdot \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2}\right| \sin \beta = 0. \tag{4.93}$$

Вместе с тем на основании третьего условия можно заключить, что угол β определяет максимальное значение деформации растяжения на площадках, проходящих через касательную к подвижному контуру трещины. Поэтому он будет вычисляться через коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II}, как и в случае плоской деформации, по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{f(\theta_*)\cos^4 \frac{\beta}{2}}{1 - \eta \sin 2\theta_*}\left(K_I \cos\frac{\beta}{2} - 3K_{II}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right] = 0, \tag{4.94}$$

где $f(\theta_*) = 0{,}0583 \sin\theta_*[1 - \cos(3\theta_* - 90^0)]^2(1{,}0043 \sin\theta_* + 0{,}2136 \sin 2\theta_* + 0{,}1564 \sin 3\theta_*)$; $\theta_* = 71^0 - \eta 26^0$; $\eta = \sigma_{0,2}^{-1}(\sigma_б^{(1)} - \sigma_n^{(1)})$; $\sigma_б^{(1)}$, $\sigma_n^{(1)}$ — регулярные составляющие нормальных напряжений в зоне предразрушения соответственно по бинормали $\mathbf{n}_б$ и нормали $\mathbf{n}$ к контуру трещины.

На основании сформулированного выше утверждения и третьего условия скорость распространения усталостной трещины определяется равенством

$$v = \Phi^{-1}(\Lambda), \tag{4.95}$$

где $\Phi(\Lambda)$ —характеристическая функция усталостного разрушения, которая определяется соотношениями (4.85) и (4.86).

Предполагая, что деформация растяжения ε_{max} вычисляется через коэффициент интенсивности растягивающих напряжений K_p, действующих на площадке ε_{max}, безразмерный параметр Λ можно записать еще в таком виде:

$$\Lambda = 1 - \frac{K_p}{K_{fC}}\sqrt{\frac{f(\theta_*)}{1 - \eta \sin\theta_*}}. \tag{4.96}$$

Коэффициент интенсивности K_p растягивающих напряжений на площадке с полярным углом β будет определяться выражением

$$K_p = v \cos^2\frac{\beta}{2}\left(K_I \cos\frac{\beta}{2} - 3K_{II}\sin\frac{\beta}{2}\right). \tag{4.97}$$

Используя соотношения (4.91)—(4.96), для описания кинетики распространения усталостной трещины (нахождения функции $r(N, \theta)$ и $\varphi(N, \theta)$) в дополнение к уравнениям теории упругости, определяющим коэффициенты интенсивности K_I и K_{II}, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\Phi(\Lambda)\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\right| = 1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} - \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\right| \cdot \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2}\right| \sin \beta = 0, \tag{4.98}$$

где величина β определяется из соотношения (4.94).

Если в процессе усталостного разрушения внешнее нагружение не изменяется по направлению или величине амплитуды, направление ско-

рости усталостной трещины v будет совпадать с направлением нормали $\mathbf{n}_\theta$ к подвижному контуру трещины ($\mathbf{n}_\theta \parallel \mathbf{v}$, $\beta = 0$). В этом случае второе уравнение (4.98) упрощается к такому виду:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (K_{II}(\mathbf{r}) = 0).$$

Для определения долговечности $N = N_д$ элементов конструкций кроме кинетики распространения трещины необходимо еще знать и ее критический размер $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(N_д, \theta)$, при достижении которого наступит предельно равновесное состояние тела.

Это уравнение с учетом регулярных составляющих напряжений в зоне предразрушения имеет вид

$$\frac{f\left(\theta_* \cos^4 \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \eta \sin 2\theta_*} \left(K_{I*} \cos \frac{\beta}{2} - 3K_{II*} \sin \frac{\beta}{2}\right) = 0{,}2222 K_{fC}^2, \qquad (4.99)$$

где K_{I*}, K_{II*} — коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} для тела с трещиной, контур которой описывается радиусом-вектором $\mathbf{r}_*$. Соотношение (4.99) охватывает целое семейство контуров трещин, из которого надо выбрать тот, который удовлетворяет уравнениям кинетики распространения усталостной трещины (4.95).

Таким образом, совокупность уравнений (4.85), (4.86) и (4.98), (4.99) при начальных условиях (4.90) вместе с уравнениями теории упругости и дают решение задачи об определении долговечности элементов конструкции с дефектами типа трещин, если из эксперимента установлены значения величин A, m, Λ_0, A_j для соотношений (4.85), (4.86).

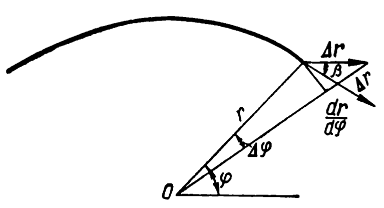


Рис. 4.31. Линия продвижения усталостной трещины в пластине, отнесенной к полярной системе координат.

Распространение усталостных трещин в пластинах. В пластине трещина будет двигаться вдоль линии, уравнение которой в полярной системе координат $rO\varphi$ (рис. 4.31) можно записать в параметрическом виде: $r = r(N)$, $\varphi = \varphi(N)$. Начальные условия (4.90) запишутся так:

$$r_0 = r_0(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi(i),$$
$$r(0) = r(i) \quad (i = 1, 2, \ldots, j). \quad (4.100)$$

Здесь j — число угловых точек начального трещинообразного дефекта; (r_i, φ_i) — их полярные координаты.

В результате приращения числа циклов на ΔN длина усталостной трещины получит приращение на $|\Delta \mathbf{r}|$, или в параметрической форме полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi$, а радиус $\mathbf{r}$ — приращение $\Delta \mathbf{r}$ (см. рис. 4.31). При этом приращение $\Delta \mathbf{r}$ будет направлено под углом β к касательной $d\mathbf{r}/d\varphi$.

Из геометрических соображений на основании рис. 4.31 можно записать, что

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta\varphi)^2 r^2},$$

где $\Delta r = r\Delta\varphi \operatorname{tg}\beta$, или в дифференциальной форме

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial N}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial N}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)^2}, \qquad (4.101)$$

где $\frac{\partial r}{\partial N} = r\frac{\partial \varphi}{\partial N}\operatorname{tg}\beta$.

Учитывая соотношения (4.94), (4.98) и (4.101), для описания кинетики распространения усталостной трещины в пластине (определения функций $\varphi = \varphi(N)$, $r = r(N)$) получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\Phi(\Lambda)\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial N}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)^2} = 1, \qquad (4.102)$$

$$\frac{\partial r}{\partial N} = r\frac{\partial \varphi}{\partial N}\operatorname{tg}\beta,$$

где величины β и Λ вычисляются из соотношений (4.94) и (4.78).

Определяя в формуле (4.78) величины ε_{max} и ε_{fC} через коэффициент интенсивности напряжений $K_р$ и их регулярные члены, найдем

$$\Lambda = 1 - \frac{K_р}{K_{fC}\sqrt{1-\xi}},$$

где $\xi = \sigma_р\sigma_{0,2}^{-1}$ (здесь $\sigma_р$ — значение регулярной составляющей растягивающих напряжений на площадке ε_{max}); $K_р$ вычисляется из равенства (4.97).

Для установления критического радиуса трещины $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(N_д)$ уравнение (4.99) в случае тонких пластин можно записать так:

$$\frac{\cos^4\frac{\beta}{2}}{f_0(\eta_0)(1-\xi)}\left(K_{I*}\cos\frac{\beta}{2} - 3K_{II*}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = K_{fC}^2. \qquad (4.103)$$

Пример. Пусть бесконечная пластина, ослабленная сквозной прямолинейной трещиной первоначальной длины $2a$, подвергнута растяжению — сжатию внешними напряжениями $\sigma_{вн} = \sigma\sin\omega t$, приложенными в бесконечно удаленных точках пластины и направленными под углом θ_0 к линии расположения трещины (рис. 4.32). Необходимо определить долговечность пластины $N = N_д$.

Для упрощения задачи можно предположить, что последующее распространение трещины близко к направлению, образующему прямой угол с линией действия внешних напряжений. Кроме того, из анализа распространения косых трещин известно, что при достаточном удалении вершины усталостной трещины от ее первоначального положения направление ее роста будет тоже образовывать прямой угол с линией действия внешних напряжений. Поэтому можно считать, что в процессе усталостного распространения трещина двигается таким образом, что в основном направлена перпендикулярно линии действия внешних усилий. На основании этого коэффициент интенсивности напряжений K_I можно приближенно вычислить по формуле

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l_\eta}, \qquad (4.104)$$

где l_η — полудлина проекции усталостной трещины на линию, перпендикулярную направлению действия внешних усилий (рис. 4.32). Тогда система уравнений (4.102) и (4.103) для этого случая сведется к виду

$$\Phi(\Lambda)\frac{dl}{dN} = 1, \quad K_{I*} = K_{fC}\sqrt{1 - \sigma\sigma_{0,2}^{-1}} \qquad (4.105)$$

при начальных условиях

$$l_0 = a\sin\theta_0, \quad N = 0 \qquad (4.106)$$

Аппроксимируя характеристическую функцию $\Phi(\Lambda)$ соотношением (4.85), а также используя соотношения (4.104)—(4.106), находим выраже-

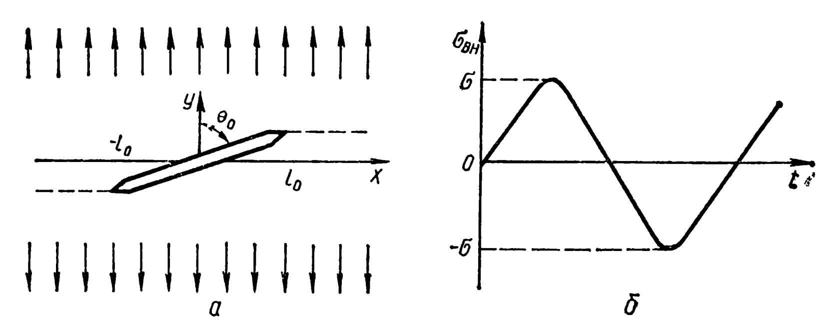


Рис. 4.32. Схема циклического растяжения пластины с центральной трещиной (*а*) и зависимость параметра нагружения от времени (*б*).

ние для определения долговечности пластины

$$N_д = A(l_0 - l_*) + \frac{2(\Delta K_{fC})^m Al_*}{K_{fC}^2(1-m)(2-m)(1-\sigma\sigma_{0,2}^{-1})}\{(\Delta K_{fC})^{1-m} \times$$

$$\times [(1-m)K_{fC}\sqrt{1-\sigma\sigma_{0,2}^{-1}} + K_{th}] - (\Delta K_0)^{1-m}[(1-m)K_0 + K_{th}]\}, \qquad (4.107)$$

где $K_0 = \sigma\sqrt{\pi l_0}$; $\Delta K_{fG} = K_{fG}(1-\sigma\sigma_{0,2}^{-1}) - K_{th}$; $\Delta K_0 = K_0 - K_{th}$; $l_* = \dfrac{K_{fG}^2(1-\sigma\sigma_{0,2}^{-1})}{\pi\sigma^2}$.

Если для данного материала найдены значения характеристик A, $\sigma_{0,2}$, m, K_{th}, K_{fC}, то по формуле (4.107) можно подсчитать для заданных a, θ_0 и σ долговечность пластины, подвергнутой циклическому нагружению.

Распространение трещины в одной плоскости трехмерного тела. Если в трехмерном теле усталостная трещина распространяется в одной плоскости, то система дифференциальных уравнений (4.98) вырождается в одно уравнение

$$\Phi(\Lambda)\frac{\partial r}{\partial N}\left[r^{-2}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + 1\right]^{-1/2} = 1 \qquad (4.108)$$

при начальных условиях

$$r(0, \theta) = r_0(\theta), \qquad (4.109)$$

а критический размер трещины $r(N_д, \theta) = r_*(\theta)$ определяется из равенства

$$f(\theta_*) K_{I*}^2 = 0{,}2222 K_{fC}^2 (1 - \eta \sin 2\theta_*), \qquad (4.110)$$

где K_{I*} — значение коэффициента интенсивности напряжений для критического размера трещины.

Пример. Неограниченное тело, ослабленное дискообразной трещиной начального радиуса r_0 (рис. 4.33), подвергнуто растяжению — сжатию в

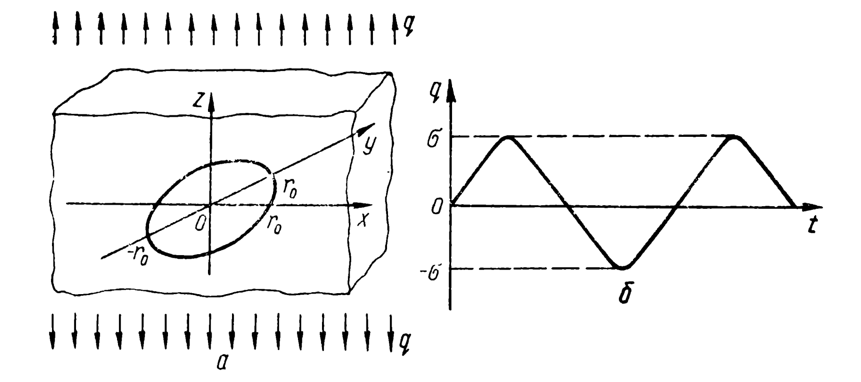


Рис. 4.33. Схема циклического растяжения пластины с центральной трещиной (*а*) и изменение параметра нагружения во времени (*б*).

неограниченно удаленных точках равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q, направленной перпендикулярно плоскости расположения трещины и изменяющейся по закону $q = \sigma \sin\omega t$. Необходимо определить долговечность тела $N = N_д$.

Трещина будет распространяться в одной плоскости, оставаясь все время круговой. Поэтому уравнение (4.108) для описания кинетики распространения усталостной трещины примет вид

$$\Phi(\Lambda) \frac{dr}{dN} = 1. \qquad (4.111)$$

Определяя коэффициент интенсивности напряжений K_I, а также используя соотношения (4.85)—(4.110), найдем формулу долговечности тела

$$N_д = A(r_0 - r_*) + \frac{9 r_* A f(\theta_*) (\Delta K_{fC})^m}{K_{fC}^2 (1 - m)(2 - m) \sqrt{1 - \sigma\sigma_{0,2}^{-1} \sin 2\theta_*}} \times$$

$$\times \left\{ (\Delta K_{fC})^{1-m} \left[(1 - \eta \sin 2\theta_*)^{1/2} \frac{0{,}4714 K_{fG} (1-m)}{\sqrt{f(\theta_*)}} + K_{th} \right] - \right.$$

$$\left. - (\Delta K_{I0})^{1-m} [(1-m) K_{I0} + K_{th}] \right\}, \qquad (4.112)$$

где

$$r_* = \frac{0{,}1745 K_{fC}^2 (1 - \eta \sin 2\theta_*)}{\sigma^2 f(\theta_*)}; \quad \Delta K_{fC} = \frac{0{,}4714 K_{fG}}{\sqrt{f(\theta_*)}} (1 - \eta \sin 2\theta_*)^{1/2} -$$

$$- K_{th}; \quad \Delta K_{I0} = K_{I0} - K_{th}; \quad K_{I0} = 2\sigma \sqrt{r_0/\pi};$$

$\eta = \sigma\sigma_{0,2}^{-1}$, а характеристики A, $\sigma_{0,2}$, m, K_{th}, K_{fC} должны быть найдены из эксперимента для каждого конкретного вида материала.

ГЛАВА 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Решение задач механики разрушения материалов (теории трещин) состоит из двух этапов: 1) формулировка необходимых концепций о распространении трещины в материалах; 2) составление на этой основе критериальных уравнений и определение локального поля напряжений и деформаций около трещины-разреза (трещин) в деформируемом твердом теле. Подходы, используемые исследователями на первом этапе, изложены в гл. 3, 4. На втором этапе необходимо в наиболее эффективной для рассматриваемых задач форме построить общее решение дифференциальных уравнений упругого равновесия трехмерных тел с трещинами, а затем по заданным граничным условиям и полученному общему решению свести задачу к соответствующим критериальным уравнениям (интегро-дифференциальным, интегральным, алгебраическим и т. д.) и разработать методы решения этих уравнений. В литературе известно множество различных методов и их модификаций для решения задач математической теории трещин [1—3]. В настоящей главе изложены некоторые основные методы решения задач математической теории трещин.

5.1. Метод функций комплексного переменного для определения напряженного состояния в пластинах с трещинами [1]

Упругое равновесие твердых тел описывается [1] уравнениями плоской задачи теории упругости в случае плоской деформации цилиндрических тел постоянного поперечного сечения (когда на тело действуют внешние силы, нормальные к его оси и одинаковые для всех поперечных сечений указанного тела) либо в случае обобщенного плоского напряженного состояния (при деформации тонкой пластины силами, действующими в ее плоскости). При этом для определения напряженно-деформированного состояния в произвольной точке деформируемого упругого изотропного тела необходимо найти три компонента тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{zy} и две составляющие вектора перемещений u_x, u_y, которые в случае отсутствия объемных сил удовлетворяют уравнениям (см. гл. 2)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \tag{5.1}$$

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial u_x}{\partial x}; \qquad \sigma_y = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Первая группа уравнений (5.1) (условия равновесия) будет автоматически удовлетворяться, если представить напряжения в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \tag{5.2}$$

где $u(x, y)$ — бигармоническая функция напряжений.

В этом случае закон Гука можно представить в виде

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Решая первые два уравнения относительно $\partial u_x/\partial x$ и $\partial u_y/\partial y$, получаем

$$\begin{aligned} 2G_1\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)}P, \\ 2G_1\frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2G_1}{2(\lambda + G_1)}P, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $P(x, y)$ — гармоническая функция ($\Delta u = P$).

Пусть $Q(x, y)$ — тоже гармоническая функция, сопряженная с $P(x, y)$.

Введем еще следующие функции:

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

$$\varphi(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz,$$

здесь $z = x + iy$ — комплексная переменная; $i = \sqrt{-1}$. Тогда

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4}f(z) = \frac{1}{4}(P + iQ) = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Последнее равенство записано по правилу дифференцирования аналитической функции $\varphi = p + iq$ по z. Следовательно,

$$\frac{1}{4}P = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

и уравнения (5.4) примут вид

$$\begin{aligned} 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ 2G\frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}\frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Интегрируя, получаем

$$2Gu_x = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G} p + f_1(y),$$

$$2Gu_y = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G} q + f_2(x).$$

Из третьего уравнения системы (5.3) имеем $\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ и, следовательно, $f_1 = 2G(-\gamma' y + \alpha')$, $f_2 = 2G(\gamma' x + \beta)$.

Здесь α', β, γ' — произвольные константы. Таким образом, функции f_1 и f_2 представляют собой смещение тела как жесткого целого и при определении напряженно-деформированного состояния ими можно пренебречь.

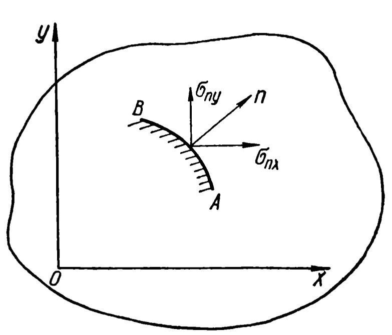


Рис. 5.1. Компоненты напряжений на дуге AB в упругом теле.

Покажем теперь, что всякая бигармоническая функция, например $u - px - qy$, может быть выражена через две аналитические функции комплексного переменного.

Пусть $\chi(z)$ — аналитическая функция, вещественная часть которой $u - px - qy$, т. е. $\mathrm{Re}\,\chi(z) = u - px - qy$. Тогда $u = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$ или $2u = \bar{z}\varphi(z) + z \times \varphi(\bar{z}) + \chi(z) + \overline{\chi(z)}$.

Составим сумму

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{5.6}$$

где $\varphi'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$; $\psi(z) = \frac{\partial \chi}{dz}$. Тогда на основании выражений (5.5) упругое смещение можно выразить через функции φ и ψ:

$$2G(u_x + iu_y) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{5.7}$$

где $\varkappa = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} = 3 - 4\mu$ — для плоской деформации, $\varkappa = \frac{5\lambda + 6G}{3\lambda + 2G} = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}$ — для плоского напряженного состояния.

Выразим теперь компоненты напряжений через φ и ψ. Пусть AB — произвольная дуга длиной s в области, занятой телом (рис. 5.1). При этом

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos(n, x) - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}\cos(n, y),$$

$$\sigma_{ny} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(n, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos(n, x)$$

или $\sigma_{nx} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\sigma_{ny} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Составим выражение

$$(\sigma_{nx} + i\sigma_{ny})\, ds = -\,id\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\,id\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]. \tag{5.8}$$

Дуга AB — произвольна, поэтому можно сначала принять, что ds параллельно оси y, а потом ds параллельно оси x. Отсюда следует, что

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \overline{\psi'(z)}, \tag{5.9}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{z\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)},$$

где $\varphi''(z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$; $\psi'(z) = \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}$. Вместо функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ можно использовать также функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(\overline{z}) = \psi'(z)$. Запишем через введенные функции краевые условия на границе тела.

1. Пусть на контуре тела L заданы напряжения σ_{nx} и σ_{ny} (см. рис. 5.1) (первая основная краевая задача). Из выражения (5.8) при умножении обеих частей уравнения на i следует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} = i\int\limits_0^s (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny})\, ds + \text{const}.$$

Вводя обозначение $i\int\limits_0^s (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny})\, ds = f_1(s) + if_2(s)$ и учитывая сумму (5.6), получаем

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = f_1 + if_2 + \text{const}. \tag{5.10}$$

Постоянная в данном случае не влияет на напряженное состояние и может быть произвольной.

2. Пусть на контуре тела L заданы смещения $u_x = g_1(s)$, $u_y = g_2(s)$ (вторая основная задача). Из выражения (5.7) имеем

$$\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 2G(g_1 + ig_2). \tag{5.11}$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к отысканию двух функций комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитических внутри области S, занятой телом. Эти функции на контуре L должны удовлетворять краевым условиям (5.10) или (5.11).

При решении задач для неканонических областей целесообразно использовать конформное отображение области, занимаемой телом, на круг. Пусть область S в плоскости z отображена на круг γ_1 в плоскости ζ посредством функции $z = \omega(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta = e^{i\theta}$. Тогда $\varphi_1(\zeta) = \varphi[\omega(\zeta)]$, $\psi_1(\zeta) = \psi[\omega(\zeta)]$, $\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$, $\frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$, где $\omega'(\zeta) = \frac{d\omega}{d\zeta}$. При этом соотношение (5.6) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,\overline{\varphi_1(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)}.$$

(Функция $\omega'(\zeta)$ не обращается в нуль внутри круга γ_1, так как отображение взаимно однозначно.)

Тогда граничные условия можно записать так:

$$\varphi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega}'(\overline{\tau})}\overline{\varphi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = f_1 + if_2 + \text{const}, \qquad (5.12)$$

где $\tau = e^{i\theta}$ — переменная на контуре круга γ_1 с радиусом, равным единице, и

$$\varkappa\varphi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\varphi'(\tau)} - \overline{\psi(\tau)} = 2G(g_1 + ig_2). \qquad (5.13)$$

Здесь $g_{1,2}(s)$ и $f_{1,2}(s)$ — заданные функции дуги S на контуре L, которая является функцией угла θ на окружности круга γ_1; поэтому y и f есть известные функции угла θ.

Метод рядов. Решение указанных выше уравнений можно искать в форме рядов Лорана, т. е. искать функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в таком виде:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k, \qquad \psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k,$$

Подстановка этих рядов в граничные условия дает рекуррентные соотношения для определения a_k и b_k.

Другой метод решения плоской задачи теории упругости состоит в сведении ее к решению некоторых интегральных уравнений. Для этого поступают следующим образом. Отображают рассматриваемую область S на круг единичного радиуса $|\zeta| \leqslant 1$ с помощью конформного отображения $z = \omega(\zeta)$. Тогда граничное условие (5.12) записывается в виде

$$\varphi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\overline{\tau})}\overline{\varphi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = f_1 + if_2$$

или в виде

$$\overline{\varphi}(\overline{\tau}) + \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\omega}'(\tau)}\varphi'(\tau) + \psi(\tau) = f_1 - if_2$$

($f = \overline{f}$, так как они действительны).

Умножим эти соотношения на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}$ (ζ — точка внутри круга γ_1) и проинтегрируем вдоль окружности γ_1' круга γ_1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\omega(\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-\varphi)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\overline{\psi(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta} = A(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\overline{\omega(\tau)}\,\varphi'(\tau)\,d\tau}{\omega'(\tau)(\tau-\zeta)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = B(\zeta). \qquad (5.14)$$

На основании свойств интеграла Коши, а также равенства $\overline{\tau} = 1/\tau$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \varphi(\zeta), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \psi(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta}=\overline{\varphi}(0)=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1'}\frac{\overline{\psi(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta}=\overline{\psi}(0)=\alpha'-i\beta$$

при $|\zeta|<1$. С учетом этих равенств уравнения (5.14) примут вид

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\omega(\tau)\,\overline{\varphi}'(\tau)\,d\tau}{\overline{\omega}'(\tau)(\tau-\zeta)}+\alpha'-i\beta=A(\zeta),$$
$$\psi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\overline{\omega(\tau)}\,\varphi'(\tau)\,d\tau}{\omega'(\tau)(\tau-\zeta)}=B(\zeta),\tag{5.15}$$

где $\alpha'=\operatorname{Re}\psi(0)$; $\beta=\operatorname{Im}\psi(0)$.

Из первого уравнения (5.15) находим $\varphi(\zeta)$, а затем из второго уравнения — $\psi(\zeta)$ при соблюдении условия $\varphi(0)=0$.

Метод сопряжения граничных значений. Метод состоит в приведении краевых задач теории упругости к задачам линейного сопряжения граничных значений, называемых задачами Римана. Приводимое здесь краткое изложение задачи сопряжения основано на фундаментальных работах Н. И. Мусхелишвили [1].

Формулировка задачи. Найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)$ с линией скачков L, граничные значения которой слева и справа (кроме концов) удовлетворяют условию

$$F^+(\tau)=G(\tau)F^-(\tau)+f(\tau),\tag{5.16}$$

где $G(\tau)$ и $f(\tau)$ — заданные на линии L функции, причем на L всюду $G(\tau)\neq 0$. При $f(\tau)\equiv 0$ всюду на L — задача однородная.

Решение задачи при $G(\tau)\equiv 1$. В этом случае

$$F^+(\tau)-F^-(\tau)=f(\tau)\tag{5.17}$$

и одним из решений этой задачи будет

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-z},\tag{5.18}$$

так как на основании свойств интеграла Коши

$$F_0^+(\tau)-F_0^-(\tau)=f(\tau)\tag{5.19}$$

на линии L (кроме концов). Рассмотрим разность

$$F(z)-F_0(z)=F_*(z),\tag{5.20}$$

где $F(z)$ — искомое решение. Составим разности правых и левых частей выражения (5.20) на L:

$$F^+(\tau)-F_0^+(\tau)-[F^-(\tau)-F_0^-(\tau)]=F_*^+(\tau)-F_*^-(\tau).$$

Учитывая выражения (5.17) и (5.19), получаем $F_*^+(\tau)-F_*^-(\tau)=0$ на линии L. Следовательно, значения $F_*(z)$ аналитически продолжают друг друга по обе стороны L, т. е. функция $F_*(z)$ — голоморфна (аналитическая и однозначная). По теореме Лиувилля в этом случае $F_*(z)=\text{const}$

на всей плоскости. Таким образом из разности (5.20) имеем искомое решение

$$F(z) = F_0(z) + F_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + \text{const.} \qquad (5.21)$$

Используем далее обобщенную теорему Лиувилля: если $\varphi(z)$ голоморфна всюду, кроме $z = \infty$, и если при больших $|z|$ $\varphi(z) = O(z^m)$ (где m — целое положительное число), то $\varphi(z)$ есть полином степени не выше m. В более общей задаче предполагается, что $F(z)$ голоморфна всюду, кроме $z = \infty$, где она может иметь полюс порядка не выше m. Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана:

$$F(z) = C_m z^m + C_{m-1}z^{m-1} + \ldots + C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \ldots.$$

Тогда $F_*(z)$ будет равна полиному m-го порядка $P_m(z)$ и общим решением задачи (5.17) будет следующее :

$$F(z) = F_0(z) + F_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + P_m(z), \qquad (5.22)$$

где $P_m(z) = C_m z^m + \ldots + C_0$.

Решение однородной задачи при $G(\tau) = g = \text{const}$. В этом случае на линии L

$$F^+(\tau) - gF^-(\tau) = 0 \qquad (5.23)$$

(кроме концов a_k, b_k). Ищем частное решение в виде

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-\nu}(z - b_j)^{\nu-1}, \qquad (5.24)$$

где n — число непрерывных участков линии L; $\nu = \alpha_1 + i\beta = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{\ln|g|}{2\pi i} + \frac{\arg g}{2\pi}$ $(\alpha_1 \neq 0)$.

При этом подразумевается, что при больших $|z|$

$$X_0(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{A}{z^{n-1}}, \qquad (5.25)$$

причем $X_0^+(\tau) = gX_0^-(\tau)$ на линии L, или

$$g = \frac{X_0^+(\tau)}{X_0^-(\tau)}. \qquad (5.26)$$

При переходе с «+» (слева при движении точки τ по L от a_k до b_k) на «—» (справа от L) вокруг точки a_k $\arg(z - a_k)$ получает приращение $+2\pi$, поэтому $\arg(z - a_k)^{-\nu}$ получит приращение $-2\pi\nu$. Следовательно, на основании выражения (5.24)

$$X_0^-(\tau) = e^{-2\pi i\nu}X_0^+(\tau).$$

При переходе с «+» на «—» вокруг точки b_k $\arg(z-b_k)$ получит приращение -2π, а $\arg(z-b_k)^{-\nu}$ получит приращение $-2\pi(\nu-1)$:

$$X_0^-(\tau) = e^{-2\pi i(\nu-1)} X_0^+(\tau) = e^{-2\pi i\nu} X_0^+(\tau)\, e^{2\pi i},$$

т. е. в данном случае имеем тот же результат, что и для точки a_k. Поэтому на основании соотношения (5.26)

$$g(\tau) = \frac{X_0^+(\tau)}{X_0^-(\tau)} = e^{2\pi i\nu}.$$

Отсюда $\ln g = 2\pi i\nu$ и

$$\nu = \frac{\ln g}{2\pi i}. \qquad (5.27)$$

Следовательно, из выражений (5.23) и (5.26) на линии L

$$\frac{F^+(\tau)}{X_0^+(\tau)} - \frac{F^-(\tau)}{X_0^-(\tau)} = 0 \qquad (5.28)$$

или, обозначая $F_*(z) = F(z)/X_0(z)$, на линии L

$$F_*^+ - F_*^- = 0. \qquad (5.29)$$

Эта задача совпадает с задачей (5.17) при $f(\tau) = 0$ и ее решением согласно уравнению (5.22) будет $F_*(z) = P_m(z)$.

Таким образом, общее решение однородной задачи сопряжения

$$F(z) = X_0(z)\, P(z), \qquad (5.30)$$

где $P(z)$ — произвольный полином, вид которого определяется из поведения решения на бесконечности и вблизи концов линии L:

1) если решение регулярно на бесконечности, то на основании выражения (5.25)

$$P(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \ldots + C_0; \qquad (5.31)$$

2) если $F(\infty) = 0$, то $C_n = 0$;

3) если решение ограничено вблизи заданных концов C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, то полином $P(z)$ должен обращаться в нуль в этих точках, т. е. $P(z) = Q(z)\prod_{i=1}^{p}(z - C_i)$, где $Q(z)$ — произвольный полином;

4) если решение ограничено на всех концах, то

$$F(z) = Q(z)\, X_0(z) \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{1-\nu} (z - b_j)^{\nu} = Q(z)\, X(z). \qquad (5.32)$$

Решение неоднородной задачи. Граничное условие на линии L

$$F^+(\tau) - gF^-(\tau) = f(\tau) \qquad (5.33)$$

с учетом выражения (5.26) представим в виде

$$\frac{F^{+}(\tau)}{X_0^{+}(\tau)}-\frac{F^{-}(\tau)}{X_0^{-}(\tau)}=\frac{f(\tau)}{X_0^{+}(\tau)} \tag{5.34}$$

или, обозначая $F_*(z)=F(z)/X_0(z)$ и $f_*(\tau)=f(\tau)/X_0^{+}(\tau)$, — в виде

$$F_*^{+}(\tau)-F_*^{-}(\tau)=f_*(\tau). \tag{5.35}$$

Эта задача совпадает с задачей (5.17) и имеет общее решение (5.22). Таким образом, решение задачи (5.33), допускающее полюс на бесконечности, будет

$$F(z)=X_0(z)\,[F_0(z)+P_m(z)], \tag{5.36}$$

где $P_m(z)$ — произвольный полином.

Все замечания, изложенные в предыдущей задаче, относительно выбора $P(z)$ (см. выражение (5.31)) при соответствующем поведении решения на бесконечности и на концах линии L остаются справедивыми и в этом случае.

При $g=-1$ из выражения (5.24) имеем

$$\nu=\frac{\ln(-1)}{2\pi i}=\frac{\ln 1}{2\pi i}+\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}.$$

Функция (5.24) принимает вид

$$X_0(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{-1/2}(z-b_j)^{-1/2}, \tag{5.37}$$

а из равенства (5.32) следует

$$X(z)=\frac{1}{X_0(z)}=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{1/2}(z-b_j)^{1/2}. \tag{5.38}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения выражения (5.36):

а) решение, допускающее полюс на бесконечности

$$F(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(\tau)\,d\tau}{X_0^{+}(\tau)(\tau-z)}+X_0(z)P(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi iX(\tau)}\int\limits_L\frac{X^{+}(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+\frac{P(z)}{X(z)}, \tag{5.39}$$

где $P(z)$ — произвольный полином;

б) решение, остающееся голоморфным и на бесконечности, получается из решения (5.39), если полином $P(z)$ имеет степень не больше n (n — число дуг разрезов L_i, $i=1, 2, \ldots, n$);

в) решение, ограниченное вблизи всех концов, аналогично решению (5.32)

$$F(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(\tau)\,d\tau}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}+X(z)P(z);$$

г) если к тому же решение голоморфно и на бесконечности, то $P(z) \equiv 0$, кроме того, на $f(\tau)$ накладывается условие

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau^{k-1} f(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Приведение плоской задачи теории упругости к задаче сопряжения. Рассмотрим плоскость с прямолинейными разрезами-трещинами $L_k = a_k b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, расположенными вдоль действительной оси. На основе свойств функций Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ при ограниченности напряжений на бесконечности их структура при больших $|z|$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = \Phi(z) &= \Gamma - \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \psi'(z) = \Psi(z) &= \Gamma' + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned} \tag{5.40}$$

где (X, Y) — главный вектор внешних усилий, приложенных к краям разрезов L;

$$\begin{aligned} \Gamma = B + iC; \qquad B &= \frac{N_1 + N_2}{4}; \qquad C = \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa}; \\ \Gamma' = B' + iC' &= -\frac{N_1 - N_2}{2} e^{-2i\theta}; \end{aligned} \tag{5.41}$$

N_1, N_2 — главные напряжения на бесконечности; θ — угол между N_1 и осью Ox; $\varepsilon_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$ — вращение на бесконечности.

Заметим, что компоненты тензора напряжений на бесконечности $(\sigma_x)_\infty = 2B - B'$, $(\sigma_y)_\infty = 2B + B'$, $(\tau_{xy})_\infty = C'$. Введем функцию

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z) \tag{5.42}$$

$\left(\text{здесь } \Phi'(z) = \frac{d\Phi}{dz}\right)$, которая при больших $|z|$ имеет вид

$$\Omega(z) = \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}' + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{5.43}$$

Заменяя в функции (5.42) z на $\bar{z}$ и переходя затем к сопряженным значениям $(\overline{\Omega(\bar{z})} = \overline{\Omega}(z))$, получаем

$$\Psi(z) = \overline{\Omega}(z) - \Phi(z) - z\Phi'(z). \tag{5.44}$$

Так как компоненты тензора напряжений записываются по формулам (5.9) через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, то можно их выразить также и через $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Вводя функцию

$$\omega(z)=\int\Omega(z)\,dz=\int[z\Phi(z)]'\,dz+\int\overline{\Psi}(z)\,dz=z\overline{\Phi}(z)+\overline{\Psi}(z)+\text{const},\tag{5.46}$$

упругое смещение (5.7) записываем в виде

$$2G(u_x+iu_y)=\varkappa\,\varphi(z)-\omega(\bar z)-(z-\bar z)\,\overline{\Phi(z)}+\text{const}.\tag{5.47}$$

Рассмотрим случай, когда на линии L заданы напряжения σ_y^+, τ_{xy}^+, σ_y^-, τ_{xy}^-. Граничные значения отмечены верхними индексами («+» и «—»). Напряжения на бесконечности тоже заданы и, следовательно, известны величины $\text{Re}\,\Gamma=B$ и Γ'. Поскольку искомым является напряженное состояние, то вращение на бесконечности можно зафиксировать и положить $C=0$, т. е. $\Gamma=\Gamma'=B$.

Граничные условия на основании (5.45) примут вид

$$\Phi^+(\tau)+\Omega^-(\tau)=\sigma_y^+-i\tau_{xy}^+,$$

$$\Phi^-(\tau)+\Omega^+(\tau)=\sigma_y^--i\tau_{xy}^-.$$

Взаимно складывая и вычитая эти уравнения, получаем

$$[\Phi(\tau)+\Omega(\tau)]^++[\Phi(\tau)+\Omega(\tau)]^-=2\sigma_1(\tau),\tag{5.48}$$

$$[\Phi(\tau)-\Omega(\tau)]^+-[\Phi(\tau)-\Omega(\tau)]^-=2\sigma_2(\tau),\tag{5.49}$$

где

$$\sigma_1(\tau)=\frac{\sigma_y^++\sigma_y^-}{2}+\frac{i}{2}(\tau_{xy}^++\tau_{xy}^-);$$

$$\sigma_2(\tau)=\frac{\sigma_y^+-\sigma_y^-}{2}-\frac{i}{2}(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-).\tag{5.50}$$

Условие (5.48) представляет собой задачу сопряжения (5.33), для которой $q=-1$ и решение ограничено на бесконечности. По аналогии с формулой (5.39) имеем

$$\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi iX(z)}\int\limits_L\frac{X^+(\tau)\,\sigma_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{2P_n(z)}{X(z)},\tag{5.51}$$

где согласно равенству (5.38) $X(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2}$; $P_n(z)=$ $=C_nz^n+C_{n-1}z^{n-1}+\ldots+C_0$.

Условие (5.49) эквивалентно задаче сопряжения (5.17) с решением (5.21):

$$\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\sigma_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}-\Gamma'.\tag{5.52}$$

Из выражений (5.51) и (5.52) следует

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\frac{P_n(z)}{X(z)}-\frac{\overline{\Gamma}'}{2},$$

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{\overline{\Gamma}'}{2}, \tag{5.53}$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X^+(\tau)\,\sigma_1(\tau)\,d}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_2(\tau)\,d\tau}{\tau - z};$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X^+(\tau)\,\sigma_1(\tau)\,d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_2(\tau)\,d\tau}{\tau - z}.$$

Коэффициенты полинома $P_n(z) = C_n z^n + \ldots + C_0$ определяются из условия однозначности перемещений и условий на бесконечности.

В частном случае, когда края разрезов свободны от напряжений, $\Phi_0(z) = \Psi_0(z) = 0$ и по формулам (5.53)

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{\overline{\Gamma}'}{2}, \quad \Omega(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{\overline{\Gamma}'}{2}. \tag{5.54}$$

Коэффициенты полинома $P_n(z)$ определяются условиями

$$C_n = \Gamma + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}', \quad \int_{L_k} \frac{P_n(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)} = 0. \tag{5.55}$$

Если разрез один, то $n = 1$, и при $a_1 = -l$, $b_1 = l$ (здесь l — полудлина разреза) из выражений (5.54) и (5.55) получаем $\int_{-l}^{l} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2 - l^2}} = \int_{-l}^{l} \sqrt{\tau^2 - l^2}dt = 0$, следовательно, $C_0 = 0$;

$$\Phi(z) = \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma}')\,z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}',$$

$$\Omega(z) = \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma}')\,z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}'. \tag{5.56}$$

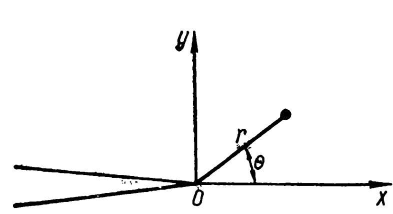


Рис. 5.2. Локальные схемы координат в вершине трещины.

Эти функции определяют напряженное состояние неограниченной плоскости с одиночным разрезом.

Напряженное состояние в окрестности вершины трещины. Рассмотрим в непосредственной близости к вершине трещины O (рис. 5.2) область, размеры которой малы по сравнению с остальными размерами тела и трещины. На основании принципа предельного перехода можно утверждать, что напряженное состояние в этой области эквивалентно состоянию у вершины полубесконечной трещины при соответствующем нагружении. Таким образом, задача может быть сведена к следующей краевой задаче плоской теории упругости:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0,\ x < 0 \tag{5.57}$$

(при дополнительных условиях на бесконечности).

В этом случае $X(z)=\sqrt{z}$ и на основании выражения (5.54) искомое решение при малых z ($|z|\to 0$) можно представить в виде

$$\Phi(z)=\frac{P(z)}{\sqrt{2\pi z}}+0(1),$$

$$\Omega(z)=\frac{P(z)}{\sqrt{2\pi z}}+0(1).$$

Здесь $P(z)$ — достаточно гладкая, ограниченная в окрестности точки $z=0$ функция. Обозначим ее значение в начале координат через $\frac{1}{2}\times(K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}})$, где K_{I} и K_{II} — вещественные параметры (коэффициенты интенсивности напряжений):

$$K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}=2\lim_{z\to 0}[\sqrt{2\pi z}\Phi(z)].$$

Тогда асимптотическое поведение функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ в окрестности вершины трещины описывается соотношениями

$$\begin{aligned}
\Phi(z)&=\frac{K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi z}}+0(1),\\
\Omega(z)&=\frac{K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi z}}+0(1),\\
\varphi(z)&=\int\Phi(z)\,dz=\frac{K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{z}+0(z),\\
\omega(z)&=\int\Omega(z)\,dz=\frac{K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{z}+0(z),
\end{aligned}\tag{5.58}$$

где $0(1)$ и $0(z)$ — величины, ограниченные при $|z|\to 0$.

Переходя к полярной системе координат, связанной с вершиной трещины (см. рис. 5.2) $z=re^{i\theta}+l$, где l — длина трещины, и подставляя выражения (5.58) в соотношения (5.45) и (5.47), находим распределение напряжений и перемещений в окрестности точки 0.

В частности, для трещины нормального отрыва ($K_{\mathrm{I}}\neq 0$, $K_{\mathrm{II}}=0$):

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),\\
\sigma_y&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),\\
\tau_{xy}&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},
\end{aligned}\tag{5.59}$$

$$u_x=\frac{K_{\mathrm{I}}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\mu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_y = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\mu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

В случае поперечного сдвига ($K_I = 0$; $K_{II} \neq 0$):

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \quad (5.60)$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\mu + \cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\mu + \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Формулы (5.59) — (5.60) получены для плоской деформации, при этом $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. В случае плоского напряженного состояния $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а модуль G необходимо заменить на $G(1 + \mu)$.

5.2. Метод сингулярных интегральных уравнений для решения двухмерных задач теории трещин [2]

Рассмотрим бесконечную плоскость, содержащую N гладких разрезов L_k ($k = \overline{1, N}$), на берегах которых заданы несамоуравновешенные усилия (первая основная задача)

$$\mathrm{N}^{\pm} + i\mathrm{T}^{\pm} = p(\tau) \pm q(\tau) \quad (\tau \in L) \qquad (5.61)$$

или производные от смещений (вторая основная задача)

$$2G\frac{d}{d\tau}(u_x^{\pm} + iu_y^{\pm}) = f'(\tau) \mp \frac{1 + \varkappa}{2i} g'(\tau). \quad (\tau \in L) \qquad (5.62)$$

(здесь $p(\tau)$, $q(\tau)$, $f'(\tau)$ и $g'(\tau)$ — произвольные функции), причем напряжения и вращения на бесконечности отсутствуют. Здесь N и T — нормальная и касательная компоненты внешних усилий; u_x и u_y — компоненты смещений; индекс «+» («—») обозначает предельное значение функции при стремлении к разрезу слева (справа); $\varkappa$ — то же, что в формуле (5.7): $L = \bigcup L_k$ ($k = \overline{1, N}$).

Найдем сначала решение вспомогательной задачи, когда на разрезе заданы скачки напряжений и производных от смещений

$$\begin{gathered}(\mathrm{N} + i\mathrm{T})^+ - (\mathrm{N} + i\mathrm{T})^- = 2q(\tau) \quad (\tau \in L), \\ \frac{d}{d\tau}[(u_x + iu_y)^+ - (u_x + iu_y)^-] = \frac{i(1 + \varkappa)}{2G} g'(\tau) \quad (\tau \in L).\end{gathered} \qquad (5.63)$$

Выразив левые части равенств (5.63) через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, придем к задаче сопряжения для кусочно-голоморфной функции

$$\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau) = i\,[g'(\tau) - 2iq(\tau)/(1+\varkappa)] \equiv iQ(\tau) \quad (\tau \in L). \qquad (5.64)$$

Представив потенциал $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\bar{\tau}\,Q(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau + \Omega(z) \qquad (5.65)$$

и воспользовавшись формулой

$$F^{\pm}(\tau_0, \bar{\tau}_0) = \pm\frac{1}{2} f(\tau_0)\frac{d\bar{\tau}_0}{d\tau_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)}{(\tau - \tau_0)^2} f(\tau)\,d\tau$$

для предельных значений интеграла

$$F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau} - \bar{z}}{(\tau - \tau_0)^2} f(\tau)\,d\tau,$$

получим задачу сопряжения для функции $\Omega(z)$

$$\Omega^+(\tau) - \Omega^-(\tau) = i\,[\overline{Q(\tau)} - 2i\overline{q(r)}\,\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} \quad (\tau \in L). \qquad (5.66)$$

На основании соотношений (5.64) — (5.66) находим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{Q(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{\overline{Q(\tau)} - 2i\overline{q(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}Q(\tau)\,d\tau}{(\tau - z)^2}\right]. \qquad (5.67)$$

Функции (5.67) дают решение вспомогательной задачи (5.63) для общего случая несамоуравновешенной нагрузки $q(\tau)$. Их можно также рассматривать как интегральные представления комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, с помощью которых могут быть решены различные граничные задачи для бесконечной плоскости с разразами.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для задач (5.61), (5.62) ищутся в виде (5.67), причем в первой основной задаче неизвестной является функция $g'(\tau)$, а во второй — $q(\tau)$. Удовлетворив граничные условия (5.61) и (5.62), получим сингулярные интегральные уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \left\{2\,\frac{Q(\tau) + iq(\tau)}{\tau - \tau'}\,d\tau + k_1(\tau, \tau')\,[Q(\tau) + 2iq(\tau)]\,d\tau + \right.$$
$$\left. + k_2(\tau, \tau')\,\overline{Q(\tau)}\,d\bar{\tau}\right\} = p(\tau') \quad (\tau' \in L),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \left\{\frac{(\varkappa - 1)\,Q(\tau) - 2iq(\tau)}{\tau - \tau'}\,d\tau - k_1(\tau, \tau')\,[Q(\tau) + 2iq(\tau)]\,d\tau - \right.$$
$$\left. - k_2(\tau, \tau')\,\overline{Q(\tau)}\,d\bar{\tau}\right\} = f'(\tau) \quad (\tau' \in L) \qquad (5.68)$$

соответственно первой и второй основных задач. Здесь регулярные ядра $k_1(\tau, \tau')$ и $k_2(\tau, \tau')$ даются соотношениями

$$k_1(\tau, \tau') = \frac{d}{d\tau'} \ln \frac{\tau - \tau'}{\bar{\tau} - \bar{\tau}'}, \quad k_2(\tau, \tau') = \frac{d}{d\tau} \frac{\tau - \tau'}{\bar{\tau} - \bar{\tau}'}.$$

При дополнительных условиях

$$\int_L g'(\tau)\, d\tau = 0, \quad \int_L q(\tau)\, d\tau = \frac{i}{2}(X_k + iY_k) \quad (k = \overline{1, N}) \tag{5.69}$$

интегральные уравнения (5.68) имеют единственное решение в классе функций, не ограниченных вблизи концов разрезов. Первое из условий (5.69) обеспечивает однозначность смещений при обходе каждого контура L_k, а второе определяет проекции X_k и Y_k главного вектора внешних усилий, приложенных к разрезу L_k.

На основании соотношений (5.67) и (5.68) могут быть получены асимптотические формулы для распределения напряжений и смещений в окрестности вершин криволинейного разреза. Коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} выражаются через функцию $g'(\tau)$ соотношением

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \mp \lim_{\tau \to l^{\pm}} [\sqrt{2|\tau - l^{\pm}|}\, g'(\tau)], \tag{5.70}$$

где нижние знаки относятся к началу ($z = l^-$), а верхние — к концу ($z = l^+$) трещины (здесь l — полудлина трещины).

На основе представления комплексных потенциалов напряжений в виде (5.67) может быть рассмотрен ряд задач о системах трещин в различных областях. Кратко остановимся на некоторых из них, ограничиваясь построением интегральных представлений функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ через разрывы смещений и напряжений, с помощью которых легко записать соответствующие сингулярные интегральные уравнения. Эти представления могут быть использованы также при решении ряда других граничных задач для областей с разрезами, в частности, когда на берегах разрезов напряжения и смещения связаны линейными зависимостями (например, в случае тонкостенных упругих включений), когда на одном берегу заданы смещения, а на другом — напряжения, смешанные задачи и т. д.

Полученные для бесконечной плоскости, ослабленной конечным числом произвольно размещенных разрезов, результаты могут быть существенно упрощены, если форма разрезов и геометрия их расположения, а также внешняя нагрузка удовлетворяют определенным условиям симметрии или периодичности. При этом удобно использовать запись комплексных потенциалов напряжений и интегральных уравнений в локальных координатах, к которым отнесены разрезы. Таким путем рассмотрены системы трещин при наличии циклической симметрии, а также периодическая и двоякопериодическая задачи теории трещин.

Периодическая система криволинейных разрезов. Пусть бесконечная упругая плоскость, связанная с системой декартовых координат Oxy, ослаблена циклически размещенными криволинейными разрезами. Будем считать, что каждая последующая система разрезов L_k $(k = \overline{1, N})$ получается (без наложения) поворотом относительно точки O предыдущей системы на угол $2\pi/m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, т. е. вся плоскость состоит из m циклически повторяющихся секторов. В предположении, что напряженно-деформированное состояние удовлетворяет условию циклической симметрии, для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ получены интегральные пред-

ставления

$$\Phi(z) = \frac{m}{2\pi} \int_L \frac{\tau^{m-1} Q(\tau)}{\tau^m - z^m} d\tau,$$

$$\Psi(z) = \frac{m}{2\pi \bar{z}} \int_L \left\{ [\overline{Q(\tau)} - 2i\overline{q(\tau)}] \left[\frac{\tau z^{m-1}}{\tau^m - z^m} - \delta_{1m} \right] d\bar{\tau} - \right.$$

$$\left. - Q(\tau)\, \bar{\tau} z^{m-1} \frac{(m-1)\tau^m + z^m}{(\tau^m - z^m)^2} d\tau \right\},$$

где δ_{1m} — символ Кронекера.

Удовлетворив граничные условия на берегах разрезов (5.61) и (5.62), получим сингулярные интегральные уравнения первой или второй основной задачи. В компактной форме они записываются

$$\varkappa^* \Phi(\tau') + \overline{\Phi(\tau')} + \frac{d\bar{\tau}'}{d\tau'} [\tau' \overline{\Phi'(\tau')} + \overline{\Psi'(\tau')}] = P(\tau'), \qquad (5.71)$$

где $\Phi(\tau')$ и $\Psi(\tau')$ — прямые значения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, т. е. полученные непосредственной подстановкой $z = t'$ в выражения для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$; $\varkappa^* = 1$; $P(\tau') = p(\tau')$ (здесь $p(\tau')$ — то же, что в формуле (5.61)) и $\varkappa^* = -\varkappa$, $P(\tau^*) = -f'(\tau')$ (здесь $f'(\tau')$ —то же, что в формуле (5.62)) для первой и второй основной граничной задачи соответственно. В виде (5.71) могут быть записаны и уравнения (5.68), (5.69), а также уравнения других задач, если известны интегральные представления потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ через скачки напряжений и смещений.

Для периодической системы разрезов, когда в основной полосе периодов шириной d (вдоль оси Ox) есть N криволинейных разрезов L_k ($k = \overline{1, N}$), найдены интегральные представления

$$\Phi(z) = \frac{1}{2d} \int_L Q(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau - z) d\tau,$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2d} \int_L \left\{ [\overline{Q(\tau)} - 2i\overline{q(\tau)}] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau - z) d\bar{\tau} - \right.$$

$$\left. - \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau - z) + \frac{\pi}{d} (\bar{\tau} - \tau + z) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d} (\tau - z) \right] Q(\tau) d\tau \right\}.$$

В случае бесконечного ряда коллинеарных трещин, когда в полосе периодов симметрично размещены одна или две трещины, аналогично может быть получено замкнутое решение задачи. Таким образом также построены приближенные аналитические и численные решения для периодической системы произвольно ориентированных прямолинейных трещин, а также для бесконечного ряда параллельных внутренних или внешних трещин.

Аналогично может быть рассмотрена двоякопериодическая система разрезов, когда в основном параллелограмме периодов есть N криволинейных разрезов L_k ($k = \overline{1, N}$), причем на одних заданы несамоуравновешен-

ные усилия, а на других — смещения. Здесь дополнительно требуется, чтобы главный вектор суммарных усилий, действующих на всех разрезах, равнялся нулю, что является необходимым условием существования решения двоякопериодической задачи.

Система криволинейных разрезов в полуплоскости. Плоские задачи теории упругости для полуплоскости с криволинейными разрезами сводятся к сингулярным интегральным уравнениям, которые непосредственно получаются из уравнений (5.68) и (5.69). Последние при этом соответствуют аналогичной задаче для бесконечной плоскости, когда контур одного разреза представляет собой бесконечную прямую.

Пусть в упругой бесконечной плоскости находится $N+1$ разрезов L_k $(k=\overline{0, N})$. Предположим, что разрез L_0 является отрезком $[-l_0, l_0]$ оси Ox, а остальные находятся в нижней полуплоскости $(y<0)$. На берегах разреза L_0 задана самоуравновешенная нагрузка, т. е. $p(x) = p_0(x) = \sigma_y - i\tau_{xy}$, $q(x)=0$. Устремив l_0 к бесконечности, получим систему криволинейных разрезов L_k $(k=\overline{1, N})$ в упругой полуплоскости, край которой нагружен усилиями $p_0(x)$. При этом будем считать, что функция $p_0(x)$ при больших $|x|$ удовлетворяет условию $p_0(x) = o(1/x)$. Исключив из рассмотрения определенную на L_0 функцию $g'(x)$ [2], получим выражения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi(z)$ через разрывы смещений и напряжений на объединении разрезов $L = \bigcup L_k$ $(k=\overline{1, N})$ в полуплоскости:

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \Phi_0(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \Big[\frac{Q(\tau) + 2iq(\tau)}{z-\bar{\tau}}\, d\tau + \frac{\tau-\bar{\tau}}{(\bar{\tau}-z)^2}\, \overline{Q(\tau)\, d\tau} \Big];$$

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) + \Psi_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_L \Big\{ \frac{Q(\tau) + 2iq(\tau)}{(\bar{\tau}-z)^2}\, \bar{\tau}\, d\tau + \Big[\frac{(\bar{\tau}-z)(\bar{\tau}+z)}{(\bar{\tau}-z)^3} - \frac{\tau}{\bar{\tau}-z} \Big] \overline{Q(\tau)\, d\tau} \Big\},$$

где функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ даются соотношениями (5.67), а потенциалы

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(\tau)\, d\tau}{\tau - z}, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\overline{p_0(\tau)}}{\tau - z} - \frac{\tau p_0(\tau)}{(\tau - z)^2} \Big] d\tau$$

определяют решение задачи для сплошной полуплоскости при заданных на ее крае напряжениях. Аналогичные представления могут быть получены для случая, когда на краю полуплоскости заданы смещения.

Система разрезов в круговом диске. С использованием представлений комплексных потенциалов (5.67) и решений плоских задач теории упругости для различных областей методом суперпозиции строятся аналогичные представления $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ для этих же областей с разрезами.

Пусть круговой диск, ограниченный окружностью Г единичного радиуса с центром в начале системы координат Oxy, ослаблен системой N криволинейных разрезов L_k ($k=\overline{1,N}$). Граница диска нагружена усилиями $\sigma_0(\tau)=N(\tau)+iT(\tau)$. Тогда напряженное состояние в сплошном диске определяется функциями

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{2\tau}\right)\sigma_0(\tau)\,d\bar{\tau};$$

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\{\sigma_0(\tau)\,z-[\sigma_0(\tau)+\overline{\sigma_0(\tau)}]\,\tau\,\frac{d\tau}{\tau^2(\tau-z)^2}\right\}. \qquad (5.72)$$

На основе соотношений (5.67) и (5.72) получим представление комплексных потенциалов для кругового диска с разрезами:

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)+\Phi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{\left[Q(\tau)+2iq(\tau)\right]\frac{\tau}{z\tau-1}+\right.$$

$$\left.+\,iq(\tau)\,\bar{\tau}\right]d\tau+\frac{z(\tau\bar{\tau}-1)(z\bar{\tau}-2)}{(z\bar{\tau}-1)^2}\,\overline{Q(\tau)}\,d\bar{\tau}\Bigg\};$$

$$\Psi_1(z)=\Psi(z)+\Psi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{[Q(\tau)+2iq(\tau)]\frac{(\bar{\tau})^3\,d\tau}{(z\bar{\tau}-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\,\overline{Q(\tau)}\left[1+\frac{(z\bar{\tau}-3)(\tau\bar{t}-1)}{(z\bar{\tau}-1)^2}\right]\frac{\bar{\tau}d\bar{\tau}}{z\bar{\tau}-1}\right\}.$$

Здесь использованы равенства

$$\int_\Gamma\sigma_0(\tau)\,d\tau-2\int_L q(\tau)\,d\tau=0,$$

$$\int_\Gamma[\sigma_0(\tau)-\overline{\sigma_0(\tau)}]\frac{d\tau}{\tau}+2\int_\Gamma[q(\tau)\,\bar{\tau}d\tau+\overline{q(\tau)}\,\tau d\bar{\tau}]=0, \qquad (5.73)$$

которые выражают условия обращения в нуль главных вектора и момента внешних усилий, действующих на краю диска и на разрезах L_k ($k=\overline{1,N}$).

С использованием выражения (5.73), аналогично случаю бесконечной плоскости строятся комплексные потенциалы напряжений для кругового диска с разрезами при наличии циклической симметрии, когда каждая последующая система разрезов L_k ($k=\overline{1,N}$) получается (без наложения) поворотом относительно центра диска предыдущей системы на угол $2\pi/m$ ($m=1,2,\ldots$).

На основании представления (5.67) и выражений для функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, описывающих напряженное состояние в сплошной плоскости с круговым отверстием [1], аналогично строятся комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ для бесконечной плоскости, ослабленной разрезами L_k и отверстием Г. Затем аналогично находятся

функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ при наличии циклической симметрии, когда каждая последующая система разрезов L_k $(k = 1, N)$ получается (без наложения) поворотом относительно центра отверстия предыдущей системы на угол $2\pi/m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Плоские задачи теории упругости для многосвязной области с отверстиями и трещинами. Приведенные выше интегральные представления комплексных потенциалов напряжений и интегральные уравнения для криволинейных разомкнутых разрезов обобщаются на случай замкнутых контуров Таким путем рассматриваются основные граничные задачи для многосвязной области, содержащей отверстия и трещины.

Пусть область S, занятая телом, ограничена одним или несколькими замкнутыми контурами $L_1, L_2, \ldots, L_M, L_0$, где первые M контуров расположены вне друг друга, а последний охватывает все остальные (контур L_0 может и отсутствовать). Конечные области, ограниченные контурами L_k, обозначим S_k^+ $(k = \overline{1, M})$, а бесконечную об ласть (вне контура L_0)—через S_0^-. Положительным направлением обхода контуров L_k $(k = \overline{1, M})$ и L_0 будем считать то, при котором область S остается слева. Кроме того, в области S есть $N - M$ криволинейных разрезов L_k $(k = \overline{M + 1, N})$ (рис. 5.3.). Пусть $L = L' \cup L''$,где L' и L'' обозначают совокупность замкнутых и разомкнутых контуров, т. е.

$$L = \cup L_k \quad (k = \overline{0, N}), \quad L' = \cup L_k \quad (k = \overline{0, M}), \quad L'' = \cup L_k \, (k = \overline{M + 1, N}).$$

Рассмотрим первую основную задачу, когда на границе области (на конту ре L) заданы напряжения

$$\mathrm{N} + i\mathrm{T} = \sigma^*(\tau) \; (\tau \in L');$$

$$\mathrm{N}^{\pm} + i\mathrm{T}^{\pm} = \sigma^*(\tau) \pm q(\tau) \; (\tau \in L''). \tag{5.74}$$

При этом соотношения типа (5.73)

$$\int_{L'} \sigma^*(\tau)\, d\tau + 2 \int_{L''} q(\tau)\, d\tau = 0;$$

$$\mathrm{Re}\left[\int_{L'} \bar{\tau}\sigma^*(\tau)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + 2\int_{L''} \bar{\tau} q(\tau)\, d\bar{\tau}\right] = 0 \tag{5.75}$$

выражают равенство нулю главных вектора и момента внешних усилий, действующих на контуре L.

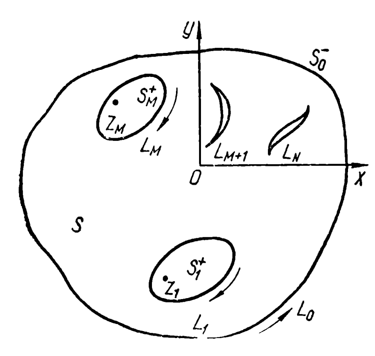


Рис. 5.3. Схематическое представление плоскости с отверстиями и трещинами.

В случае второй основной задачи будем считать, что на границе области (на контуре L) заданы производные от смещений

$$2G \frac{d}{d\tau}(u_x + iu_y) = f'_*(\tau) \; (\tau \in L'), \; 2G \frac{d}{d\tau}(u_x^{\pm} + iu_y^{\pm}) = f'_*(\tau) \mp$$

$$\mp \frac{2i}{1 + \varkappa} g'(\tau). \tag{5.76}$$

Известны также главные векторы усилий, приложенные к каждому контуру L_k $(k=\overline{0,N})$, с проекциями X_k и Y_k на оси Ox и Oy. Тогда комплексные потенциалы напряжений $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ в области можно представить в виде [1]

$$\Phi_*(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{M}\frac{X_k+iY_k}{z-z_k}+\Phi(z),$$

$$\Psi(z) = \frac{\varkappa}{(\varkappa+1)2\pi}\sum_{k=1}^{M}\frac{X_k-iY_k}{z-z_k}+\Psi(z), \tag{5.77}$$

где функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ голоморфны в области S; z_k — произвольные точки внутри контуров L_k $(k=\overline{1,M})$.

Граничные задачи (5.74) и (5.76) остаются в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{Q(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{M}\frac{M_k}{(z-z_k)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_L\left[\frac{\overline{Q(\tau)}-2i\overline{q(\tau)}}{\tau-z}d\bar{\tau}-\frac{\bar{\tau}Q(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\right], \tag{5.78}$$

где $M_k=-2\,\mathrm{Im}\int\limits_{L_k}\bar{\tau}g'(\tau)\,d\tau$ $(k=\overline{1,M})$ при $\tau\in L'$, $q(\tau)=0$ или $g'(\tau)=0$ соответственно в случае первой или второй основной задачи. Функции (5.78) отличаются от аналогичных представлений комплексных потенциалов для системы разрезов в бесконечной плоскости (5.67) только наличием в потенциале $\Psi(z)$ слагаемых с M_k. Можно было бы использовать точно такие же представления $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для замкнутых контуров, как и в случае разрезов, однако тогда необходимо видоизменить выражения (5.77) таким образом, чтобы для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ получалась граничная задача с заданными на контурах L_k $(k=\overline{1,M})$ усилиями, главный вектор и момент которых равны нулю на каждом контуре L_k в отдельности.

Подставив потенциалы (5.77), (5.78) в граничные условия (5.74), получим сингулярное интегральное уравнение первой основной задачи

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{2\frac{Q(\tau)+iq(\tau)}{\tau-\tau'}d\tau+k_1(\tau,\tau')[Q(\tau)+2iq(\tau)]\,d\tau+\right.$$

$$\left.+k_2(\tau,\tau')\overline{Q(\tau)}\,d\tau\right\}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{M}\frac{\Delta_{kn}M_k}{(\bar{\tau}'-\bar{z}_k)^2}\frac{d\bar{\tau}'}{d\tau'}+\delta_n a_n\frac{ds_n'}{d\tau}=$$

$$=p(\tau')\quad(\tau'\in L) \tag{5.79}$$

для определения неизвестной функции $g'(\tau)$. Здесь $\delta_n = 1$ при $n = \overline{0, M}$; $\delta_n = 0$ при $n = \overline{M+1, N}$; $\Delta_{kn} = 1 + (\delta_n - 1)\delta_{k0}$; s' — дуговая абсцисса, соответствующая точке τ'; $z_0 = 0 \in s$;

$$p(\tau') = \sigma^*(\tau') + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{M} \left\{ 2\,\mathrm{Re}\, \frac{X_k + iY_k}{\tau' - z_k} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\tau'(X_k - iY_k)}{(\tau' - z_k)^2} + \varkappa \frac{X_k + iY_k}{\bar{\tau}' - \bar{z}_k} \right] \frac{d\bar{\tau}'}{d\tau'} \right\}.$$

К левой части уравнения (5.79) прибавлены функционалы

$$M_0 = -2\,\mathrm{Im} \int_{L'} g'(\tau) \frac{d\tau}{\tau}\,; \quad a_n = \int_{n} g_n'(\tau)\, d\tau \quad (n = \overline{0, M}). \qquad (5.80)$$

Тогда уравнение (5.79) для любой правой части имеет единственное решение [2] при выполнении дополнительных условий

$$\int_{L_k} g_k'(\tau)\, d\tau = 0 \quad (k = \overline{M+1, N}), \qquad (5.81)$$

следующих из однозначности смещений при обходе контуров трещин. При этом $g'(\tau)$ ищем в классе H^* функций, которые имеют на концах разрезов интегрируемые особенности, а на каждой закрытой части линии L, не содержащей концов, удовлетворяют условию Гельдера. При выполнении условий равновесия (5.75) функционалы (5.80) равны нулю, так что полученное уравнение (5.79) дает решение поставленной задачи.

Из граничного условия (5.76) с помощью потенциалов (5.77) и (5.78) придем к сингулярному интегральному уравнению второй основной задачи

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L} \left\{ \frac{(\varkappa - 1)Q(\tau) - 2iq(\tau)}{\tau - \tau'} d\tau - k_1(\tau, \tau')[Q(\tau) + 2iq(\tau)]\, d\tau - \right.$$

$$\left. - k_2(\tau, \tau')\overline{Q(\tau)}\, \overline{d\tau} \right\} + \delta_n b_n \frac{ds'}{d\tau'} = f'(\tau') \quad (\tau \in L) \qquad (5.82)$$

относительно неизвестной функции $q(\tau)$. Здесь

$$f'(\tau') = f_*'(\tau') + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \frac{\varkappa(X_k + iY_k)}{\tau' - z_k} - \frac{X_k - iY_k}{\bar{\tau}' - \bar{z}_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{d\bar{\tau}'}{d\tau'} \left[\frac{\tau'(X_k - iY_k)}{(\bar{\tau}' - \bar{z}_k)^2} + \frac{\varkappa(X_k + iY_k)}{\bar{\tau}' - \bar{z}_k} \right] \right\}.$$

К левой части уравнения (5.82) присоединены функционалы

$$b_n = -\frac{2i}{1+\varkappa} \int_{l_n} q_n(\tau)\, d\tau \quad (n = \overline{0, M}), \qquad (5.83)$$

которые наряду с условиями

$$\int_{l_n} q_n(\tau)\,d\tau = \frac{i}{2}(X_n + iY_n) \quad (n = \overline{M+1, N})$$

обеспечивают существование единственного решения при любой правой части, причем $q(\tau) \in H$. В силу однозначности смещений в области S функционалы (5.83) равны нулю, так что уравнение (5.82) определяет решение поставленной задачи.

Уравнения (5.79) и (5.82) построены при обобщении интегральных уравнений для разомкнутых контуров (разрезов) (5.68) и (5.69) на случай замкнутых (отверстия и внешняя граница тела). При этом напряженно-деформированное состояние в области S аналитически продолжается на области S_k^+ $(k = \overline{1, M})$ и S_0^-, т. е. на всю плоскость, таким образом, что при переходе через замкнутые контуры L_k $(k = \overline{0, M})$ остаются непрерывными либо напряжения, а вектор смещения получает скачок $g'(\tau)$ (первая основная задача), либо смещения, тогда как напряжения имеют разрыв $q(\tau)$ (вторая основная задача). При отсутствии замкнутых контуров L_k $(k = \overline{0, M})$ уравнения (5.79) и (5.82) совпадают с интегральными уравнениями основных граничных задач (5.68) и (5.69) для системы криволинейных разрезов в бесконечной плоскости. Следовательно, при решении плоской задачи теории упругости для многосвязных областей, содержащих как отверстия, так и трещины произвольной формы, здесь предложен [2] единый подход, который также распространен на другие двухмерные задачи для аналогичных областей.

Численное решение сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение для криволинейного разреза L в виде

$$\int_{-1}^{1} [K(\xi, \eta)\,g'(\xi) + L(\xi, \eta)\,\overline{g'(\xi)}]\,d\xi = \pi p(\eta) \quad (|\eta| < 1), \tag{5.84}$$

где $K(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\xi - \eta} + k(\xi, \eta)$; ядра $K(\xi, \eta)$, $L(\xi, \eta)$ и свободный член $p(\eta)$ — заданные на отрезке $[-1, 1]$ непрерывные функции своих аргументов. При дополнительном условии

$$\int_{-1}^{1} g'(\xi)\,d\xi = 0 \tag{5.85}$$

решение интегрального уравнения (5.84) в классе функций, неограниченных при $\eta = \pm 1$, т. е.

$$g'(\eta) = \frac{u(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \tag{5.86}$$

существует и единственно (здесь $u(\eta)$ — непрерывная по Гельдеру на отрезке $[-1, 1]$ функция).

Численное решение уравнения (5.84) получим с помощью квадратурных формул Гаусса — Чебышева

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - \eta_k)}\,d\xi = \frac{\pi}{N_*} \sum_{m=1}^{N_*} \frac{u(\xi_m)}{\xi_m - \eta_k}, \tag{5.87}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \frac{\pi}{N_*} \sum_{m=1}^{N_*} u(\xi_m), \tag{5.88}$$

где $\xi_m = \cos[(2m-1)\pi/(2N)]$ и $\eta_k = \cos[k\pi/N]$ $(k = \overline{1, N-1})$ — нули многочленов Чебышева первого и второго родов.

Таким образом, формула (5.87) для сингулярного интеграла с ядром Коши, которая справедлива в дискретной системе точек $\eta = \eta_k$, совпадает с обычной квадратурной формулой Гаусса (5.87).

Применение квадратурных формул (5.87) и (5.88) к уравнению (5.84) и интегралу (5.85) приводит к системе N_* линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N_*} \sum\limits_{m=1}^{N_*} [K(\xi_m, \eta_k)\, u(\xi_m) + L(\xi_m, \eta_k)\, \overline{u(\xi_m)}] = p(\eta_k) \quad (k = \overline{1, N_*-1}), \\ \sum\limits_{m=1}^{N_*} u(\xi_m) = 0 \end{cases}$$

для определения N_* неизвестных $u(\xi_m)$.

Формула (5.70) для определения коэффициентов интенсивности напряжений выражается через значения функции $u(\xi)$ в точках $\xi = \pm 1$ следующим образом:

$$K_{\rm I}^{\pm} - iK_{\rm II}^{\pm} = \mp\sqrt{\pi}\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}\, \frac{u(\pm 1)}{\omega'(\pm 1)}, \tag{5.89}$$

где $u(1) = -\dfrac{1}{N_*} \sum\limits_{m=1}^{N_*} (-1)^m\, u(\xi_m) \operatorname{ctg} \dfrac{2m-1}{4N}\pi$; $u(-1) = \dfrac{1}{N} \times$ $\times \sum\limits_{m=1}^{N_*} (-1)^{m+N_*}\, u(\xi_m) \operatorname{tg} \dfrac{2m-1}{4N_*}\pi$; $\omega(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$ — параметрическое уравнение контура криволинейного разреза L.

При численном решении сингулярного интегрального уравнения для замкнутого криволинейного контура L с 2π-периодическими ядрами и неизвестной функцией применяется квадратурная формула

$$\int_0^{2\pi} M(\tau, \theta)\, \psi(\tau)\, d\tau = \frac{2\pi}{N^*} \sum_{\nu=1}^{N^*} M(\tau_\nu, \theta)\, \psi(\tau_\nu), \tag{5.90}$$

которая верна для регулярных функций $M(\tau, \theta)$ при любых углах θ, а для сингулярных ядер $M(\tau, \theta)$ при $\theta = \theta_s = \dfrac{2s-1}{N^*}\pi + \delta$ $(s = \overline{1, N^*})$.

Здесь N^* — четное натуральное число; δ — произвольное действительное число; $\tau_\nu = 2\pi\nu/N^* + \delta$.

Таким образом, для сингулярных интегральных уравнений по замкнутому или разомкнутому контуру (либо для системы таких уравнений) их дискретный аналог легко строится с помощью квадратурных формул (5.86)—(5.88).

5.3. Метод двухмерных сингулярных интегральных уравнений в пространственных задачах теории трещин

Поскольку каждое реальное тело с какой угодно точностью можно представить в виде многогранника, то здесь излагается развитый в работе [3] метод интегральных уравнений применительно к задачам об упругом равновесии многогранников, ослабленных системами плоских произвольно ориентированных трещин.

Постановка задачи. Рассмотрим выпуклый многогранник, ослабленный системой плоских трещин ω_n $(n = 1, 2, 3, \dots, N)$ (рис. 5.4). Введем локальные прямоугольные системы декартовых координат $O_i^{(1)}x_i^{(1)}y_i^{(1)}z_i^{(1)}$ с направляющими единичными векторами $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$ и плоскостями $z_i^{(1)}=0$, совпадающими с плоскостями трещин ω_i (рис. 5.4, 5.5), а также системы координат $O_k^{(2)}x_k^{(2)}y_k^{(2)}z_k^{(2)}$ с направляющими единичными векторами $\beta_1^{(k)}$, $\beta_2^{(k)}$, $\beta_3^{(k)}$ и плоскостями $z_k^{(2)} = 0$, совпадающими соответственно с гранями многогранника s_k $(k = 1, 2, \dots, m)$ (рис. 5.4,5.6).

Пусть на каждой грани s_k многогранника приложены внешние усилия с векторами $\mathbf{F}_k$, а на трещинах задана самоуравновешивающаяся система внешних усилий на каждой поверхности трещины с вектором $\mathbf{P}_i$. Граничные условия для задачи можно записать в виде

$$\alpha_3^{(i)}\hat{\sigma}|_{\omega_i} = \mathbf{P}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$
$$\beta_3^{(k)}\hat{\sigma}|_{s_k} = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{5.91}$$

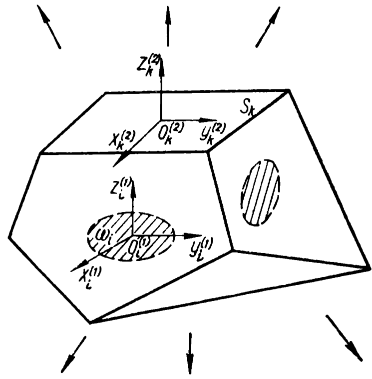


Рис. 5.4. Схема многогранника с трещиной.

Для решения задачи (5.91) представим напряженное состояние в многограннике как сумму напряженных состояний $\hat{\sigma}_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ в полупространствах W_k, поверхности которых совпадают с плоскостями граней s_k многогранника, и напряженных состояний $\hat{\sigma}_i^{(2)}$ $(i=1, 2, \dots, N)$ в неограниченных пространствах V_i с трещинами конфигурации ω_i

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=1}^{m} \hat{\sigma}_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^{(2)}. \tag{5.92}$$

Тогда на основании соотношений (5.91) и (5.92) граничные условия для каждого такого полупространства W_k и пространства V_i с трещиной ω_i запишутся так:

$$\beta_3^{(k)}\hat{\sigma}^{(1)}|_{z_k^{(2)}=0} = \mathbf{F}_k|_{s_k} - \sum_{j=1(\neq k)}^{m} \beta_3^{(k)}\hat{\sigma}_j^{(1)}|_{Q_j^{(k)}} + \sum_{k=1}^{N} \beta_3^{(k)}\hat{\sigma}_n^{(2)}|_{z_k^{(2)}=0}, \tag{5.93}$$

$$\alpha_3^{(i)}\hat{\sigma}_i^{(2)}|_{\omega_i} = \mathbf{P}_i - \sum_{j=1(\neq i)}^{N} \alpha_3^{(i)}\hat{\sigma}_j^{(2)}|_{\omega_i} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_3^{(i)}\hat{\sigma}_k^{(1)}|_{\omega_i}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $Q_j^{(k)}$ — сечение полупространства W_j плоскостью $z_k^{(2)} = 0$.

Таким образом, задача свелась к упругим задачам для полупространства W_k и пространства V_i с трещиной ω_i при граничных условиях (5.93).

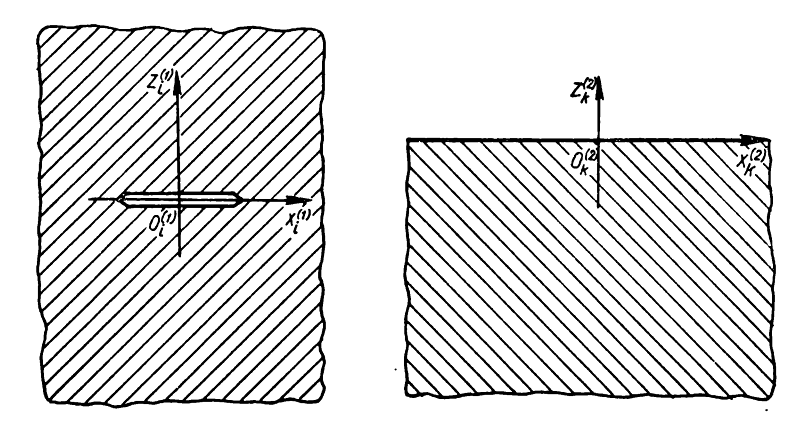


Рис. 5.5. Схема расположения систем декартовых координат $O_i^1 x_i^{(1)} y_i^{(1)} z_i^{(1)}$ на i-й трещине.

Рис. 5.6. Схема расположения системы декартовых координат $O_k^2 x_k^{(2)} y_k^{(2)} z_k^{(2)}$ на грани S_k.

Первая основная задача теории упругости для полупространства. Рассмотрим полупространство W_k, на поверхности которого $z_k^{(2)} = 0$ заданы граничные условия

$$\beta_3^{(k)}\hat{\sigma}_k^{(1)}|_{z_k^{(2)}=0} = \mathbf{F}_k. \tag{5.94}$$

Решение уравнения равновесия в перемещениях для данной задачи выбираем в форме

$$2\mu \mathbf{u}_k = z \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Phi}_k - 2(1-\mu)\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial z} + (1-2\mu)(\operatorname{grad} \Phi_k - \beta_3^{(k)} \operatorname{div} \mathbf{\Phi}_k), \tag{5.95}$$

где $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Phi}_k(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, z_k^{(2)})$ — гармонический вектор, через проекции которого определяются касательные и нормальные напряжения в плоскости $z_k^{(2)} = 0$. При этом вектор-функцию $\mathbf{\Phi}_k$ зададим в виде интегрального

разложения

$$\Phi_k^{(1)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_k^{(1)}(\xi, \eta) \exp[-z_k^{(2)}\sqrt{\xi^2+\eta^2} +$$

$$+ i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta)] \frac{1}{\xi^2+\eta^2} d\xi d\eta. \qquad (5.96)$$

где $\mathbf{A}_k^{(1)}(\xi, \eta)$ — искомая вектор-функция.

Определяем тензор напряжений $\hat{\sigma}_k^{(1)}$ на основании соотношений (5.95), (5.96), при этом используем соотношение

$$\hat{\sigma} = G\left[\frac{2\mu}{1-2\mu}(\nabla \mathbf{u})\hat{\mathbf{E}} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*\right], \qquad (5.97)$$

где $\hat{\mathbf{E}}$ — единичный вектор; $\nabla = \mathrm{grad}$; $(\nabla \mathbf{u})^*$ — транспонированный тензор к $(\Delta \mathbf{u})$.

Подставляя найденное таким образом выражение для тензора напряжений в граничные условия (5.94), получаем

$$\sum_{j=1}^{3} \beta_j^{(k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{t}_j \cdot \mathbf{A}_k^{(1)}) \exp[i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta] d\xi d\eta = -\mathbf{N}_k. \qquad (5.98)$$

Здесь компоненты векторов $\mathbf{t}_j$ определяются так:

$$t_1^{(1)} = f_1(\xi, \eta); \quad t_1^{(2)} = f_2(\xi, \eta); \quad t_1^{(3)} = 0; \quad t_2^{(1)} = f_2(\xi, \eta);$$

$$t_2^{(2)} = f_1(\eta, \xi); \quad t_2^{(3)} = t_3^{(1)} = t_3^{(2)} = 0; \quad t_3^{(3)} = 1; \qquad (5.99)$$

$$f_1(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 + \eta^2(1-\mu)}{\xi^2+\eta^2}; \quad f_2(\xi, \eta) = \frac{\mu\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

На основании соотношений (5.98), (5.99) и обратного преобразования Фурье для вычисления вектора $\mathbf{A}_k^{(1)} = \mathbf{A}_k^{(1)}(\xi, \eta)$ получим формулу

$$\mathbf{A}_k^{(1)} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta)] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{3} \beta_j^{(k)} (\gamma_j \cdot \mathbf{N}_k) dx_k^{(2)} dy_k^{(2)}, \qquad (5.100)$$

где компоненты векторов γ_j определяются так:

$$\gamma_1^{(1)} = (1-\mu)^{-1} f_1(\xi, \eta); \quad \gamma_1^{(2)} = -(1-\mu)^{-1} f_2(\xi, \eta); \quad \gamma_1^{(3)} = 0;$$

$$\gamma_2^{(1)} = -(1-\mu)^{-1} f_2(\eta, \xi); \quad \gamma_2^{(2)} = (1-\mu)^{-1} f_1(\xi, \eta); \quad \gamma_2^{(3)} = 0; \qquad (5.101)$$

$$\gamma_3^{(1)} = \gamma_3^{(2)} = 0; \quad \gamma_2^{(3)} = 1.$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние в полупространстве W_k находится в помощью соотношений (5.95)—(5.97) и (5.100).

Упругое равновесие неограниченного пространства, ослабленного плоской трещиной. Пусть неограниченное пространство V_n ослаблено плоской трещиной ω_n с контуром L_n, на поверхностях которой задана самоуравновешивающаяся система внешних усилий

$$\alpha^{(m)}\hat{\sigma}_n^{(2)}|_{\omega_n} = \mathbf{P}_n. \tag{5.102}$$

Для определения упругого равновесия пространства V_n решение уравнения выбираем в форме (5.95). При этом вектор-функцию $\mathbf{\Phi}_n^{(2)}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, z_n^{(1)})$ зададим в виде интегрального разложения

$$\mathbf{\Phi}_n^{(2)}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, z_n^{(1)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n^{(2)}(\xi, \eta) \times$$

$$\times \exp\left[-|z_k^{(1)}|\sqrt{\xi^2+\eta^2} + i(x_n^{(1)}\xi + y_n^{(1)}\eta)\right]\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\,d\xi d\eta, \tag{5.103}$$

где $\mathbf{A}_n^{(2)} = \mathbf{A}_n^{(2)}(\xi, \eta)$ — искомая вектор-функция.

Доопределим напряженное состояние в плоскости трещины $z_n^{(1)} = 0$ следующим образом:

$$\alpha_n\hat{\sigma}^{(2)}|_{z_n^{(1)}=0} = \begin{cases}\mathbf{P}_n & [(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \in \omega_n],\\ \sigma_{\omega n} & [(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \in \overline{\omega}_n],\end{cases} \tag{5.104}$$

где $\sigma_{n\omega}$ — вектор напряжений в области $\overline{\omega}_n$; $\overline{\omega}_n$ — область, дополняющая ω_n до полной плоскости $z_k^{(1)} = 0$.

Вычисляя тензор напряжений на основании соотношений (5.95), (5.97), (5.103) и подставляя его в равенство (5.104), находим

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{t}_j\mathbf{A}_n^{(2)})\exp\left[i(x_n^{(1)}\xi + y_n^{(1)}\eta)\right]d\xi d\eta = \mathbf{B}_n(x, y), \tag{5.105}$$

где

$$\mathbf{B}_n(x, y) = \begin{cases}\mathbf{P}_n & [(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \in \omega_n]\\ \sigma_{n\omega} & [(x_n^{(1)}, y_n^{(1)} \in \overline{\omega}_n]\end{cases},$$

а компоненты векторов $\mathbf{t}_j$ вычисляются по формулам (5.99).

Применяя к обеим частям равенства (5.105) двухмерное преобразование Фурье, получаем формулу для определения неизвестного вектора

$$\mathbf{A}_n^{(2)} = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{(n)}\left\{\iint_{\omega_n}(\gamma_j\mathbf{P}_n)\exp\left[-i(x_n^{(1)}\xi + y_n^{(1)}\eta)\right]dx_n^{(1)}dy_n^{(1)} +\right.$$

$$\left.+\iint_{\omega_n}(\gamma_i\sigma_{n\omega})\exp\left[-i(x_n^{(1)}\xi + y_n^{(1)}\eta)\right]dx_n^{(1)}dy_n^{(1)}\right\}, \tag{5.106}$$

где компоненты векторов γ_j вычисляются из соотношений (5.101).

Рассматривая раздельно случаи отсутствия в плоскости $z_n^{(1)} = 0$ касательных или нормальных напряжений, а также вычисляя на основании соотношений (5.95), (5.103) и (5.106) для этих случаев вектор перемещения $\mathbf{u}_n^{(2)}$ в области $\bar{\omega}_n$, находим интегральное уравнение для определения вектора $\sigma_{n\omega}$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{(n)} \left[\iint\limits_{\omega_n} (\varphi_j \mathbf{P}_n)\, d\xi_n d\eta_n + \iint\limits_{\bar{\omega}_n} (\varphi_i \sigma_{n\omega})\, d\xi_n d\eta_n \right] = 0, \qquad (5.107)$$

где

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\xi_n, \eta_n); \qquad \sigma_{n\omega} = \sigma_{n\omega}(\xi_n, \eta_n); \qquad (5.108)$$

$$\varphi_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_j(\xi, \eta) \exp\left[i(\xi_n - x_n^{(1)})\xi + i(\eta_n - y_n^{(1)})\eta\right] \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\, d\xi d\eta.$$

Таким образом, задача свелась к решению двухмерного интегрального уравнения первого рода (5.107).

Упругое равновесие многогранника, ослабленного системой плоских трещин. Исследовав вспомогательные задачи по определению тензоров напряжений $\hat{\sigma}_k^{(1)}$ и $\hat{\sigma}_n^{(2)}$ соответственно для полупространства W_k и пространства V_k с трещиной ω_n, перейдем к определению напряженно-деформированного состояния в многограннике с трещинами. Как следует из постановки задачи, последняя сводится к упругим задачам для полупространства W_k и пространства V_n с трещиной ω_n при граничных условиях (5.93). Сравнивая первое и второе граничные условия (5.93) с граничными условиями соответственно (5.94) и (5.102), а также используя соотношения (5.100) и (5.107), сводим задачу к решению системы интегральных уравнений

$$\mathbf{A}_k^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^{3} \beta_s^{(k)} \Bigg\{ \iint\limits_{s_k} (\gamma_s \cdot \mathbf{F}_k) \exp\left[-i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta)\right] dx_k^{(2)} dy_k^{(2)} -$$

$$- \sum_{j=1(\neq k)}^{m} \iint\limits_{Q_j^{(k)}} \left[\gamma_s \cdot \mathbf{T}_{j1}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, \mathbf{A}_j^{(1)})\right] \exp\left[-i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta)\right] dx_k^{(2)} dy_k^{(2)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\gamma_s \cdot \mathbf{T}_{n2}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, \sigma_{n\omega})\right] \exp\left[-i(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta)\right] dx_k^{(2)} dy_k^{(2)} \Bigg\};$$

$$\sum_{s=1}^{3} \alpha_s^{(n)} \Big\langle \iint\limits_{\bar{\omega}_n} (\varphi_s \sigma_{n\omega})\, d\zeta_n d\eta_n + \iint\limits_{\omega_n} \Big\{ (\varphi_s \mathbf{P}_n) - \sum_{j=1}^{m} \left[\varphi_s \mathbf{T}_{j3}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \mathbf{A}_j^{(1)})\right] -$$

$$- \sum_{j=1(\neq n)}^{N} \left[\varphi_s \mathbf{T}_{j4}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{j\omega})\right] \Big\} d\xi_n d\eta_n \Big\rangle = 0 \qquad (5.109)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, m), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Здесь $A_k^{(1)}$ — вектор-функция, на основании которой, а также на основании соотношений (5.95) — (5.97) определяется тензор напряжений $\hat{\sigma}_k^{(1)}$; $\sigma_{n\omega}$ — искомый вектор напряжений в плоскости трещины ω_n пространства V_n, с помощью которого, а также соотношений (5.95), (5.97), (5.103) и (5.106) вычисляется тензор напряжений $\hat{\sigma}_n^{(2)}$; γ_s, φ_s — векторы, которые рассчитываются по формулам (5.101) и (5.108); $T_{n2}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, \sigma_{n\omega})$ — вектор напряжений в пространстве V_n вдоль плоскости грани s_k; $T_{j1}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, A_j^{(1)})$ — вектор напряжений в области $Q_j^{(k)}$ сечения полупространства W_j плоскостью $z_k^{(2)} = 0$; $T_{j3}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, A_j^{(1)})$ — вектор напряжений в полупространстве W_j вдоль плоскости трещины ω_n; $T_{j4}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{j\omega})$—вектор напряжений в пространстве вдоль плоскости трещины ω_j.

Выберем подвижную систему координат с началом в точке O_n с контуром L_n трещины ω_n и направляющими единичными векторами $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\alpha_3^{(n)}$. Считаем, что единичный вектор $\alpha_1^{(n)}$ направлен перпендикулярно плоскости $z_n^{(1)} = 0$; $\alpha_2^{(n)}$, $\alpha_3^{(n)}$ — единичные векторы нормали и касательной к контуру L_n в точке O_n. Если теперь из системы интегральных уравнений (5.109) определен вектор напряжений $\sigma_{n\omega}$, то на основании вышеизложенного, а также соотношений (5.91) компоненты вектора интенсивности напряжений $K^{(n)} = K^{(n)}(K_I^{(n)}, K_{II}^{(n)}, K_{III}^{(n)})$ вычисляются как

$$K_j^{(n)} = \lim_{s\to 0}[\sqrt{2\pi s}\,(\sigma_{n\omega}\cdot\alpha_j^{(n)})] \quad (j = \mathrm{I, II, III}), \tag{5.110}$$

где s — расстояние до точки O_n контура L_n по нормали.

Предельно равновесное состояние многогранника теперь можно определить, если использовать уравнения предельного равновесия тел с трещинами при сложных напряженных состояниях [3, 4], подставив в них значения $K_j^{(n)}$, вычисляемые по формуле (5.110).

Для некоторых конфигураций контуров L_n трещин ω_n интегральные уравнения (5.109) могут быть сведены к интегральным уравнениям второго рода относительно векторов $\sigma_{n\omega}$, которые решаются как методом последовательных приближений, так и численными методами.

Упругое равновесие неограниченного тела, ослабленного системой произвольно ориентированных круговых трещин. Рассмотрим неограниченное тело, ослабленное системой произвольно ориентированных круговых трещин радиусом r_n ($n = 1, 2, \ldots, N$). Считается, что на поверхностях каждой трещины вектором P_n задана самоуравновешивающаяся система внешних усилий. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния в таком теле. Она сводится к решению системы интегральных уравнений (5.109), которая для рассматриваемого случая записывается в виде

$$\sum_{s=1}^{3} \alpha_s^{(n)} \Big\langle \iint_{\bar{\omega}_n} (\varphi_s\cdot\sigma_{n\omega})\, d\zeta_n d\eta_n + \iint_{\omega_n} \Big\{(\varphi_s\cdot\beta_n) -$$

$$- \sum_{j=1(\neq n)}^{N} [\varphi_s\cdot T_{j4}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{j\omega})]\Big\} d\zeta_n d\eta_n \Big\rangle = 0, \tag{5.111}$$

где ω_n = область круга $x_n^2 + y_n^2 \leqslant r_n^2$.

После ряда преобразований систему интегральных уравнений (5.109) можно привести к виду

$$\iint\limits_{\bar{\omega}_n} \frac{\sigma_{n\omega}}{\sqrt{(x_n-\xi_n)^2+(y_n-\eta_n)^2}}\, d\xi_n d\eta_n +$$

$$+ \iint\limits_{\omega_n} \frac{\mathbf{P}_n - \sum\limits_{j=1(\neq n)}^{N} \mathbf{T}_{j4}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{jn})]}{\sqrt{(x_n-\xi_n)^2+(y_n-\eta_n)^2}}\, d\xi_n d\eta_n =$$

$$= -\frac{\mu}{1-\mu}\sum_{s=1}^{3} \alpha_s^{(n)} M_s^{(n)}(x_n, y_n) \quad (n = 1, 2, \ldots, N), \qquad (5.112)$$

где x_n, y_n — декартовы координаты прямоугольной системы $O_n x_n y_n z_n$, начало O_n и плоскость $z_n = 0$ которой совпадают с центром и плоскостью трещины;

$$M_s^n(x_n, y_n) = \iint\limits_{\omega_n} \frac{\left\{(\boldsymbol{\psi}_s \cdot \mathbf{P}_n) - \sum\limits_{j=1(1\neq n)}^{N} [\boldsymbol{\psi}_s \cdot \mathbf{T}_{j4}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{jn})]\right\}}{[(x_n-\xi_n)^2+(y_n-\eta_n)^2]^{3/2}}\, d\xi_n d\eta_n -$$

$$- \iint\limits_{\bar{\omega}_n} \frac{\boldsymbol{\psi}_s \cdot \sigma_{n\omega}}{[(x_n-\xi_n)^2+(y_n-\eta_n)^2]^{3/2}}\, d\xi_n d\eta_n; \qquad (5.113)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 = [(\xi_n - x_n)^2;\ (\xi_n - x_n)(\eta_n - y_n);\ 0];$$

$$\boldsymbol{\psi}_2 = [(\xi_n - x_n)(\eta_n - y_n);\ (\eta_n - y_n)^2;\ 0];\quad \boldsymbol{\psi}_3 = 0.$$

Используя метод регуляризации, систему интегральных уравнений первого рода (5.112) сведем к системе интегральных уравнений второго рода

$$\sigma_{n\omega} = -\iint\limits_{\omega_n} \left[\mathbf{P}_n - \sum_{j=1(\neq n)}^{N} \mathbf{T}_{j4}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{j\omega})\right] K_n^{(1)}(\xi_n, \eta_n, x_n, y_n) \times$$

$$\times d\xi_n d\eta_n - \frac{\mu}{1-\mu}\sum_{s=1}^{3} \alpha_s^{(n)} \left\{ \iint\limits_{\bar{\omega}_n} [\sigma_{n\omega} \mathbf{F}_s^{(n)}(\xi_n, \eta_n, x_n, y_n)]\, d\xi_n d\eta_n + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\omega_n} \langle [\mathbf{P}_n - \sum_{j=1(\neq n)}^{N} \mathbf{T}_{j4}(\xi_n, \eta_n, \sigma_{j\omega})]\, \mathbf{P}^{(n)}(\xi_n, \eta_n, x_n, y_n)\rangle\, d\xi_n d\eta_n \right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, N). \qquad (5.114)$$

Здесь

$$K_n^{(1)}(\xi_n, \eta_n, x_n, y_n) = \frac{\sqrt{r_n - \xi_n^2 - \eta_n^2}}{\pi^2 \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - r_n^2}\,[(x_n - \xi_n)^2 + (y_n - \eta_n)^2]};$$

$$F_s^{(n)}(\xi_n, \eta_n, x_n, y_n) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega_n} \frac{\phi_s K_n^{(2)}(\mu_n, \zeta_n, x_n, y_n)}{[(\xi_n - \mu_n)^2 + (\eta_n - \zeta_n)^2]^{3/2}}\, d\mu_n d\zeta_n +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\, \nabla^2 x_n y_n \times$$

$$\times \iint\limits_{\omega_n} \frac{\phi_s \sqrt{x_n + y_n}\,[(\xi_n - \mu_n)^2 + (\eta_n - \zeta_n)^2]^{3/2}}{(\mu_n^2 + \zeta_n^2)\sqrt{(x_n - \mu_n)^2 + (y_n - \zeta_n)^2}}\, d\mu_n d\zeta_n;$$

$$K_n^{(2)}(\mu_n, \zeta_n, x_n, y_n) =$$

$$= -\frac{(\mu_n^2 + \zeta_n^2 - r_n^2)^{-1/2}}{2\pi^2 \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - r_n^2}\,[(x_n - \mu_n)^2 - (y_n - \zeta_n)^2]} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 [(x_n - \mu_n)^2 + (y_n - \zeta_n)^2]} \times$$

$$\times \arcsin \frac{r_n \sqrt{(x_n - \mu_n)^2 + (y_n - \zeta_n)^2}}{\sqrt{\varkappa_n + r^2 [(x_n - \mu_n)^2 + (y_n - \zeta_n)^2]}};$$

$\varkappa_n = (r_n^2 - x_n^2 - y_n^2)(r_n^2 - \mu_n^2 - \zeta_n^2)$; функции ϕ_s определяются на основании соотношений (5.113), если в них x_n, y_n заменить соответственно на μ_n, ζ_n.

Таким образом, задача сводится к системе двухмерных интегральных уравнений (5.115), которая для многих конкретных случаев может быть решена как методом последовательных приближений, так и численными методами. Рассмотрим некоторые частные примеры.

Система дискообразных трещин в одной плоскости. Пусть неограниченное тело ослаблено системой дискообразных трещин ω_k с радиусами контуров r_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), размещенными в одной плоскости. Введем прямоугольную систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с плоскостью расположения трещин, центры которых имеют координаты (x_k, y_k). Считаем, что на поверхностях каждой трещины приложено давление

$$\sigma_z(x, y, 0) = -f_k(x, y) \qquad [(x, y) \in \omega_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)]. \qquad (5.115)$$

При определении для такой задачи напряженного состояния в плоскости расположения трещин $z = 0$ система интегральных уравнений (5.114) примет следующий вид:

$$\sigma_z^k(x, y, 0) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\omega_k} \frac{\left[f_k(\xi, \eta) + \sum\limits_{i=1(\neq k)}^{n} \sigma_z^i(\xi, \eta, 0)\right] \sqrt{r_k^2 - (\xi - x_k)^2 - (\eta - y_k)^2}}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - r_k^2}\,[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} \times$$

$$\times\, d\xi d\eta. \qquad (5.116)$$

Для многих конкретных случаев система интегральных уравнений (5.116) решается методом последовательных приближений. При этом нормальные напряжения $\sigma_z(x, y, 0)$, действующие в плоскости расположения трещин, запишутся через искомые функции $\sigma_z^{(k)}(x, y, 0)$ в виде

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_z^{(k)}(x, y, 0) \qquad (x, y) \bar{\in} \omega_k. \qquad (5.117)$$

После того как найдена величина растягивающих напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$, коэффициент интенсивности напряжений K_{I} ($K_{\text{II}} = K_{\text{III}} = 0$) вычисляется по формуле (5.110).

Осесимметрическая система параллельных дискообразных трещин. Рассмотрим неограниченное тело и отнесем его к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$. Считаем, что такое тело ослаблено осесимметричной системой n параллельных круговых в плане трещин радиусами r_k ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$), центры которых лежат на оси Oz и имеют координаты $(0, h_k)$. Пусть на поверхностях каждой из трещин действует самоуравновешивающаяся система внешних усилий $f_k(r)$ согласно граничным условиям:

$$\sigma_k(r, h_k) = -f_k(r) \qquad (r < r_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)]. \qquad (5.118)$$

Определение упругого равновесия такого тела является частным случаем рассмотренной выше задачи. После некоторых преобразований и вычислений система интегральных уравнений (5.114) для рассматриваемой задачи примет следующий вид:

$$\sigma_k(r, h_k) = -\frac{2}{\pi\sqrt{r^2 - r_k^2}} \times$$

$$\times \int_0^{r_k} \frac{\left[f_k(\tau) - \sum\limits_{i=1(\neq k)}^{n} \sigma_i(\tau, h_k)\right]}{(r^2 - \tau^2)(r_k^2 - \tau^2)^{-1/2}} d\tau \qquad (r > r_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

$$(5.119)$$

Для конкретного числа трещин величины $\sigma_i(\tau, h_k)$ определяются через их значения $\sigma_i(\tau, h_i)$ и система интегральных уравнений (5.119) сводится к виду, удобному для решения методом последовательных приближений.

Система трещин с кусочно-гладкими контурами. Рассмотрим неограниченное хрупкое тело, ослабленное системой n плоских трещин s_i с кусочно-гладкими контурами L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (рис. 5.7). размещенных в одной плоскости. Предполагаем, что каждый контур трещин L_i представляет собой выпуклую кусочно-гладкую замкнутую линию, состоящую из

N_l прямолинейных отрезков l_{lj} ($j = 1, 2, \ldots, N_l$) и M_l дуг, являющихся частями окружностей кругов Δ_{lk} ($k = 1, 2, \ldots, M_l$), при этом области трещин s_l полностью содержатся в каждом круге Δ_{lk}.

Введем прямолинейную систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с плоскостью размещения трещин. Пусть на поверхностях каждой из трещин s_k действует нормальное давление $f_k(x, y)$, которое характеризуется силовым параметром P. Задача состоит в определении такого значения силового параметра $P = P_*$, по достижении которого начнется распространение хотя бы одной из трещин.

Задача сводится к нахождению упругого равновесия полупространства $z \geqslant 0$, на границе которого $z = 0$ заданы условия

$$\begin{cases} u_z(x, y, 0) = 0 & ((x, y) \in s), \\ \sigma_z(x, y, 0) = -f_k(x, y) & ((x, y) \in s_k), \\ \tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0 \left((x, y) \in s + \sum\limits_{k=1}^{n} s_k\right), \end{cases} \tag{5.120}$$

где s — часть плоскости $z = 0$ вне областей s_k.

Система интегральных уравнений (5.109) для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\iint\limits_{s_k^0} \frac{\varphi_k(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi d\eta = -\iint\limits_{s_k} \frac{f_k(\xi, \eta) + \sum\limits_{l=1(\neq k)}^{n} \varphi_l(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi d\eta$$



$$(k = 1, 2, \ldots n), \tag{5.121}$$

где s_k^0 — область, дополняющая s_k до полной плоскости.

Нормальные напряжения $\sigma_z \times (x, y, 0)$, действующие в плоскости расположения трещин, выражаются через искомые функции $\varphi_k \times (x, y)$:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x, y). \tag{5.122}$$

Рис. 5.7. Сечение неограниченного тела с трещинами, ограниченными кусочно-гладкими контурами, плоскостью xOy.

Представим каждую из функций $\varphi_k(x, y, 0)$ так:

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} \varphi_{kj}(x, y) & (x, y) \in s_{kj}^0, \\ \varphi_k^l(x, y) & (x, y) \in \Delta_{kl}^0 \end{cases} \tag{5.123}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, M_k; \quad j = 1, 2, \ldots, N_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь Δ_{kl}^0 — область вне круга Δ_{kl}; s_{kj} — область полуплоскости, огра-

ниченная прямой, проходящей через отрезок l_{kj} и включающая область трещины s_k; s_{kj}^0 — область вне s_{kj}.

Используя соотношения (5.123), записываем систему интегральных уравнений (5.121) в виде

$$\iint\limits_{\Delta_{ki}^0} \frac{\varphi_k^{(i)}(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta = -\iint\limits_{\Delta_{ki}^0} \frac{\psi_k^{(i)}(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta,$$

$$\iint\limits_{s_{kj}^0} \frac{\varphi_{kj}(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta = -\iint\limits_{s_{kj}} \frac{\psi_{kj}(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta \tag{5.124}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, M_k;\ j = 1, 2, \ldots, N_k;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\psi_k^{(i)}(x,y) = \begin{cases} f_k(x,y) + \sum\limits_{j=1(\neq k)}^{n} \varphi_j(x,y) & ((x,y)\in s_k), \\ \varphi_k^{(m)}(x,y) & (m \neq i,\ (x,y)\in \Delta_{km}^0) \\ \varphi_{km}(x,y) & (m \neq i,\ (x,y)\in s_{km}^0), \end{cases} \tag{5.125}$$

$$\psi_{kj}(x,y) = \begin{cases} f_k(x,y) + \sum\limits_{i=1(\neq k)}^{n} \varphi_i(x,y) & ((x,y)\in s_k), \\ \varphi_k^{(m)}(x,y) & (m \neq j,\ (x,y)\in \Delta_{km}^0), \\ \varphi_{km}(x,y) & (m \neq j,\ (x,y)\in s_{km}^0). \end{cases}$$

Интегральные уравнения (5.124) сведем к системе двухмерных интегральных уравнений типа уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi_{ki}^{(i)}(x,y) = \iint\limits_{\Delta_{ki}} \psi_k^{(i)}(\xi,\eta)\,K_{ki}^{(1)}(\xi,\eta,x,y)\,d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{kj}(x,y) = \iint\limits_{s_{kj}} \psi_{kj}(\xi,\eta)\,K_{kj}^{(2)}(\xi,\eta,x,y)\,d\xi d\eta \tag{5.126}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, M_k;\ j = 1, 2, \ldots, N_k;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$K_{ki}^{(1)}(\xi,\eta,x,y) = \frac{\sqrt{r_{ki}^2 - (\xi - x_{ki})^2 - (\eta - y_{ki})^2}}{\pi^2\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\sqrt{(x - x_{ki})^2 + (y + y_{ki})^2 - r_{ki}^2}};$$

$$K_{ki}^{(2)}(\xi,\eta,x,y) = \frac{\sqrt{h_{kj} - \xi\cos\alpha_{kj} - \eta\sin\alpha_{kj}}}{\pi^2\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\sqrt{x\cos\alpha_{kj} - y\sin\alpha_{kj} - h_{kj}}};$$

r_{ki} — радиусы кругов Δ_{ki}; α_{kj} — угол между положительным направлением нормали отрезка l_{kj} и осью Ox (положительным направлением нор-

мали считается направление в область s^0_{kj}); x_{kj}, y_{kj} — координаты центра круга Δ_{kj}; h_{kj} — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат O на линию отрезка l_{kj}.

В большинстве случаев систему интегральных уравнений (5.126) можно решить методом последовательных приближений или численными методами.

Предельное равновесие слоя, ослабленного системой равноудаленных внешних круговых трещин. Пусть слой толщиной H, ослабленный системой n осесимметричных внешних круговых в плане параллельных трещин

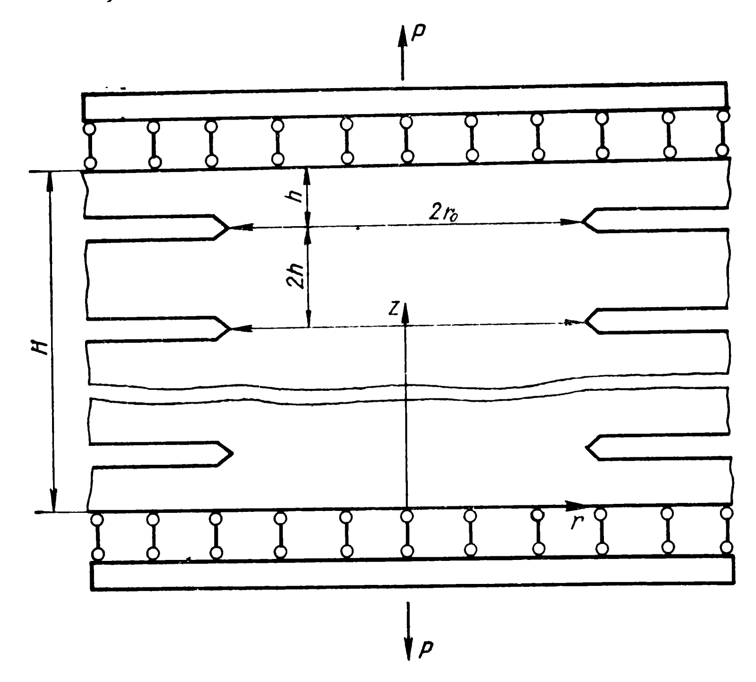


Рис. 5.8. Схема возможного нагружения слоя, ослабленного системой равноудаленных внешних круговых трещин.

радиуса r_0, растягивается усилиями, распределенными на его основаниях так, что нормальные смещения u_z оснований определяются следующим образом:

$$u_z|_{\substack{z=H\\z=0}} = \delta, \qquad (5.127)$$

где δ — постоянная величина, которая определяется из условия равновесия слоя; r, φ, z — цилиндрические координаты. Пусть далее $\mathbf{P}$ — главный вектор усилий, приложенных к основаниям слоя и вызывающих их постоянное смещение (рис. 5.8). Кроме того, будем считать, что трещины удалены одна от другой на расстояние $2h$, а две крайние от поверхностей слоя — на расстояние h. Задача состоит в определении предельного значения главного вектора внешних усилий.

Для решения такой задачи необходимо определить значения упругих напряжений вблизи контуров трещины. Компоненты тензора упругих напряжений в окрестности контуров трещин будем определять, используя следующие особенности задачи. Так как поверхности трещин свободны от внешних усилий и равноудалены одна от другой, а на поверхностях слоя заданы граничные условия (5.127) при отсутствии касательных напряжений, напряженно-деформированные состояния в перешейках трещин будут одинаковы и эквивалентны напряженно-деформированному состоянию в области радиусом $r < r_0$ на поверхности слоя толщины $h = H/2n$ при следующих граничных условиях:

$$u_z(r, 0) = -\delta_1 \quad (r < r_0), \quad \sigma_z(r, 0) = 0 \quad (r > r_0),$$
$$\tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad \tau_{rz}(r, h) = u_z(r, h) = 0, \tag{5.128}$$

где величина δ_1 определяется из условия равновесия

$$2\pi \int_0^{r_0} \sigma_z(r, 0)\, r dr = P, \tag{5.129}$$

где $P = |\mathbf{P}|$.

Представим напряженное состояние в слое толщиной h с граничными условиями (5.128) в виде суммы напряженных состояний

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2, \tag{5.130}$$

где $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ — тензоры напряжений соответственно в полупространствах $z \geqslant 0$ и $z \leqslant h$.

На основании соотношений (5.128) и (5.130) граничные условия для таких полупространств, соответственно для первого и второго, запишутся так:

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0) = -\delta_1 - u_z^{(2)}(r, 0) \quad (r < r_0), \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = -\sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (r > r_0), \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = -\tau_{rz}^{(2)}(r, 0), \end{cases} \tag{5.131}$$

$$\begin{cases} u_z^{(2)}(r, h) = -u_z^{(1)}(r, h), \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, h) = -\tau_{rz}^{(1)}(r, h). \end{cases} \tag{5.132}$$

Определим первое напряженное состояние $\hat{\sigma}_1$ для полупространства $z \geqslant 0$, на границе которого $z = 0$ заданы условия (5.131). Для этого воспользуемся представлением проекций вектора смещений и компонент тензора напряжений в виде (5.95), (5.97). Учитывая интегральное разложение гармонических функций (5.96) и подставляя соотношения (5.95), (5.97) в равенства (5.131), находим

$$\int_0^\infty \{A_1^{(1)}(\xi) + (1 - 2\mu)[A_1^{(1)}(\xi) + A_1^{(2)}(\xi)]\, J_0(\xi r)\, d\xi = \delta_1 + u_z^{(2)}(r, 0) \quad (r < r_0),$$

$$\int_0^\infty \xi A_1^{(1)}(\xi)\, J_0(\xi r)\, d\xi = -\sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (r > r_0), \tag{5.133}$$

$$\int_0^\infty \xi A_1^{(2)}(\xi) J_1(\xi r)\, d\xi = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0),$$

где $A_1^{(1)}(\xi), A_1^{(2)}(\xi)$ — искомые функции, на основании которых и соотношений (5.95) — (5.97) определяется напряженное состояние $\hat{\sigma}_1$; J_0 и J_1 — функции Бесселя.

Аналогично определяется второе напряженное состояние $\hat{\sigma}_2$ для полупространства $z \leqslant h$, на границе которого $z = h$ заданы условия (5.132). В результате ряда преобразований и вычислений получим

$$\int_0^\infty \{2(1-\mu) A_2^{(1)}(\xi) + (1-2\mu) A_2^{(2)}(\xi) - [(h\xi + 2 - 2\mu) A_1^{(1)}(\xi) + \\ + (h\xi + 1 - 2\mu) A_1^{(2)}(\xi)] e^{-h\xi}\} J_0(\xi r)\, d\xi = 0, \quad (5.134)$$

$$\int_0^\infty \xi \{[h\xi A_1^{(1)}(\xi) + (h\xi - 1) A_1^{(2)}(\xi)] e^{-h\xi} + A_2^{(2)}(\xi)\} J_1(\xi r)\, d\xi = 0,$$

где $A_2^{(1)}(\xi)$, $A_2^{(2)}(\xi)$ — искомые функции, с помощью которых определяется напряженное состояние $\hat{\sigma}_2$.

Применяя интегральное преобразование Ханкеля к последнему соотношению (5.133) и равенствам (5.134), а также производя необходимые вычисления, находим

$$A_1^{(2)} = 2h\xi A_1^{(1)} (1 - e^{2h\xi} - 2h\xi)^{-1};$$

$$A_2^{(2)} = h\xi e^{-h\xi} A_1^{(1)} (1 + e^{2h\xi})(1 - e^{2h\xi} - 2h\xi)^{-1}; \quad (5.135)$$

$$A_2^{(1)} = e^{-h\xi} A_1^{(1)} [1 - h\xi - e^{2h\xi}(1 + h\xi)(1 - e^{2h\xi} - 2h\xi)^{-1}].$$

Подставив выражения (5.135) в первые два соотношения (5.133), для определения неизвестной функции $A_{(1)}^{(1)}(\xi)$ получим дуальные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \frac{2 - e^{2h\xi} - e^{-2h\xi}}{1 - e^{2h\xi} - 2h\xi} A_1^{(1)}(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi = \frac{\delta_1}{2(1-\mu)} \quad (r < r_0), \quad (5.136)$$

$$\int_0^\infty 4\xi \frac{h\zeta + \operatorname{sh} \xi h \operatorname{ch} \xi h}{2h\xi + e^{2h\xi} - 1} A_1^{(1)}(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi = 0 \quad (r > r_0).$$

Решение интегральных уравнений (5.136) имеет следующую форму:

$$\frac{2\delta_1 \xi}{1-\mu} \frac{h\xi + \operatorname{sh} \xi h \operatorname{ch} \xi h}{2h\xi + e^{2h\xi} - 1} A_1^{(1)}(\xi) = \int_0^1 \varphi(\tau) \cos \xi\tau\, d\tau, \quad (5.137)$$

где $\varphi(\tau)$ — неизвестная функция, непрерывная вместе со своими производными в замкнутом промежутке $[0, a]$.

При подстановке соотношения (5.137) в уравнения (5.136) второе удовлетворяется тождественно, а первое приводит к уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(\tau) = 2 + \frac{n}{\pi} \int_0^1 \varphi(x) K(x, \tau)\, dx, \tag{5.138}$$

где $K(x, \tau) = 2\varepsilon_n \int_0^\infty \frac{\xi + e^{-\xi} \operatorname{sh} \xi h}{\xi + \operatorname{sh} \xi h \operatorname{ch} \xi h} \cos(n\varepsilon_n \xi\tau) \cos(n\varepsilon_n \xi x)\, d\xi$; $\varepsilon_n = a/H = a/2nh$.

При этом коэффициент интенсивности нормальных напряжений K_I, действующих в перешейках трещин, будет определяться через $\varphi(\tau)$ по

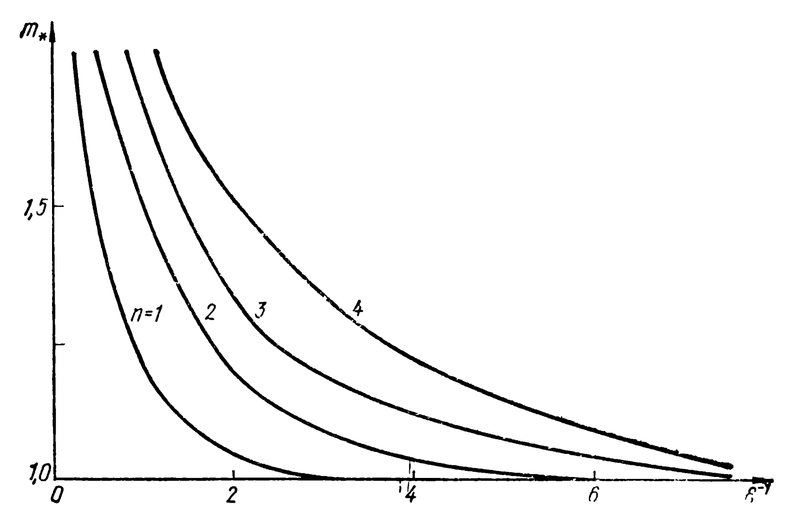


Рис. 5.9. Зависимость параметра разрушающей нагрузки $m_* = p_*/2r_0 \times \sqrt{\pi r_0}\, K_{\mathrm{I}C}$ от размера трещины $\varepsilon = r_0 h^{-1}$ для различного числа n трещин в слое.

формуле

$$K_\mathrm{I} = \frac{P}{2a\sqrt{\pi a m}}, \tag{5.139}$$

где

$$m = \frac{1}{\varphi(1)} \int_0^1 \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{5.139a}$$

Здесь P — то же, что в формуле (5.129).

Подставляя выражение (5.139) в критериальные уравнения (3.37) для определения предельного значения P_* главного вектора внешних усилий, получаем формулу

$$P_* = 2a\sqrt{\pi a m} K_{\mathrm{I}C}. \tag{5.140}$$

Для определения величины m, содержащейся в равенстве (5.140) и вычисляемой по формулам (5.139а), безразмерное интегральное уравнение (5.138) решаем численным методом, приводя его к системе линейных алгебраических уравнений. По этим расчетным данным на рис. 5.9 представлена графически зависимость величины m от толщины слоя H и числа n имеющихся в нем равноудаленных внешних осесимметрических трещин. Из этих графиков следует, что при увеличении числа трещин происходит упрочнение тела по сравнению со случаем одного дефекта такого вида. Увеличение толщины слоя, содержащего такого вида трещины, приводит к разупрочнению тела, а значение предельной нагрузки для неограниченного тела с внешней круговой трещиной является нижней границей прочности тел, содержащих такого вида дефекты и подвергнутых растяжению в направлении, перпендикулярном плоскостям трещин.

5.4. Метод граничных интегральных уравнений в механике разрушения

В последнее время все более широкое распространение в теории упругости получает метод граничных интегральных уравнений [5]. Эффективность метода позволяет применить его и для решения задач механики разрушения. Основное преимущество его по сравнению с другими численными методами состоит в том, что он понижает размерность задачи. Остановимся вкратце на выводе интегральных уравнений основных пространственных задач теории упругости и методах их решения.

Пусть S — некоторая достаточно гладкая замкнутая поверхность, а D^+ и D^- — области, расположенные внутри и вне ее $(D = D^+ + D^-)$. Если однородное изотропное упругое тело занимает конечный объем (D^+), то задача называется внутренней. Если же тело занимает бесконечный объем (D^-), то задача называется внешней. Требуется найти регулярное решение уравнения статики упругого тела

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)\, u_{j,ji} = 0 \tag{5.141}$$

при одном из следующих граничных условий:

$$\mathbf{u}_i\,|_S = \mathbf{u}_i^0 \tag{5.142}$$

или

$$\sigma_{ij}\nu_j = \mathbf{f}_i, \tag{5.143}$$

где индексы i, j означают соответствующие суммирование и дифференцирование смещений $\mathbf{u}_i$; ν_i — компонента внешней к S единичной нормали; $\mathbf{f}_i$ — заданный на границе вектор напряжений; $\mathbf{u}_i^0$ — заданный на границе вектор перемещений. Задачи (5.141), (5.142) называются первой, а (5.141), (5.143) — второй основной задачей теории упругости.

Если в некоторой точке A (y_1, y_2, y_3) бесконечного упругого пространства действует сосредоточенная сила интенсивности $\varphi\,[\varphi_1(q), \varphi_2(q), \varphi_3(q)]$, то перемещение в некоторой другой точке B (x_1, x_2, x_3) будет определяться произведением матрицы Кельвина $\Gamma(p, q)$ на вектор $\varphi(q)$:

$$\mathbf{u}(p) = \Gamma(p, q)\,\varphi(q), \tag{5.144}$$

где $\Gamma_{ij}(p, q) = \dfrac{1}{4\pi(\lambda + 2G)\,G}\left[(\lambda + G)\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\dfrac{\partial r}{\partial x_j} + (\lambda + 3\mu)\,\delta_{ij}\right]\dfrac{1}{r(p, q)}$; $r(p, q)$ — расстояние между точками p и q.

Пусть теперь на поверхности S заданы усилия $\varphi(q)$, тогда перемещения в некоторой точке p будут

$$u_p = V(p) = \int_S \Gamma(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q, \tag{5.145}$$

где $V(p)$ называется обобщенным упругим потенциалом простого слоя. Он удовлетворяет уравнению (5.141) во всем пространстве, кроме точек поверхности S. Чтобы получить напряжения в точке p на площадке с нормалью ν, следует подействовать на потенциал $V(p)$ оператором напряжений T_ν:

$$T_\nu V(p) = \int_S \Gamma_1(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q, \tag{5.146}$$

где Γ_1 имеет вид

$$\Gamma_{1ij} = -\left[m\delta_{ij} + n\,\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2}\right]\frac{\sum\limits_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,\nu_l(p)}{r^3} + $$

$$+ m\left[\nu_i(p)\,\frac{x_j - y_j}{r^3} - \nu_j(p)\,\frac{x_i - y_i}{r^3}\right]$$

$$\left(m = \frac{1}{2\pi}\frac{G}{\lambda + 2G},\quad n = \frac{3}{2\pi}\frac{\lambda + G}{\lambda + 2G}\right). \tag{5.147}$$

Пусть теперь точка p стремится к некоторой граничной точке p_0 изнутри или извне (обозначим пределы изнутри знаком плюс, извне — знаком минус). Если функция $\varphi(p)$ удовлетворяет условию Гельдера, то пределы T-оператора от потенциала простого слоя существуют и равны:

$$\begin{aligned} T^{+}_{\nu(p_0)} V(p_0) &= \int_S T_{\nu(p_0)}\Gamma(p_0, q)\,\varphi(q)\,dS_q + \varphi(p_0), \\ T^{-}_{\nu(p_0)} V(p_0) &= \int_S T_{\nu(p_0)}\Gamma(p_0, q)\,\varphi(q)\,dS_q - \varphi(p_0). \end{aligned} \tag{5.148}$$

Учитывая граничное условие (5.143), приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\varphi(p)$ для задач (5.141)—(5.143)

$$\varphi(p) - \varkappa \int_S \Gamma_1(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = F(p), \tag{5.149}$$

где $\varkappa = -1$, $F = f$ для внутренней задачи и $\varkappa = 1$, $F = -f$ для внешней.

Образуем теперь с помощью сопряженной с матрицей Γ_1 матрицы Γ_2 интеграл

$$W(p) = \int_S \Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q, \tag{5.150}$$

где $\varphi(q)$ — некоторая функция, заданная на поверхности S. Произведение $\Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)$ как функция точки p удовлетворяет уравнению (5.141) во всем пространстве, кроме точек поверхности S. Интеграл W называется обобщенным потенциалом двойного слоя. Если функция $\varphi(p)$ удовлетворяет условию Гельдера, то предельные значения потенциала двойного слоя

существуют и равны

$$W^+(p) = \int_S \Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q - \varphi(p); \qquad (5.151)$$

$$W^-(p) = \int_S \Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q + \varphi(p).$$

Решение первой основной задачи теории упругости будем искать в виде потенциала двойного слоя. Тогда, учитывая граничное условие (5.142), получаем относительно неизвестной функции $\varphi(p)$ интегральное уравнение

$$\varphi(p) - \varkappa_1 \int_S \Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = \Phi_1(p), \qquad (5.152)$$

где $\varkappa_1 = 1$, $\Phi_1 = \Phi$ для внутренней задачи; $\varkappa_1 = 1$, $\Phi_1 = -\Phi$ для внешней.

Уравнения (5.149) и (5.152) — сингулярные интегральные, так как матрицы Γ_1 и Γ_2 имеют особенности второго порядка. Интегралы в них следует понимать в смысле главного значения.

Применяются и иные интегральные уравнения, вывод которых основан на использовании формул Бетти. Приведем их без вывода:

$$u(p) - \varkappa_1 \int_S \Gamma_2(p, q)\,u(q)\,dS_q = \Phi_0(p). \qquad (5.153)$$

Значению $\varkappa_1 = 1$ соответствует вторая внешняя задача, а $\varkappa_1 = -1$ — вторая внутренняя, $\Phi_0(p) = \int_S \Gamma(p, q)\,f(q)\,dS_q$.

Как правило, интегральные уравнения решают численно методом последовательных приближений или методом механических квадратур. В любом случае требуется численно определить сингулярные интегралы. Существуют два основных подхода к решению этого вопроса.

Сведение сингулярных интегралов к регулярным. Выполним тождественное преобразование

$$\int_S \Gamma_2(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = -\varphi(p) + \int_S \Gamma_2(p, q)\,[\varphi(q) - \varphi(p)]\,dS_q,$$
$$\int_S \Gamma_1(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = -\varphi(p) + \int_S [\Gamma_1(p, q)\,\varphi(q) - \Gamma_2(p, q)\,\varphi(p)]\,dS_q. \qquad (5.154)$$

В силу того что функция $\varphi(p)$ удовлетворяет условию Гельдера, а также благодаря структуре ядер Γ_1 и Γ_2 интегралы в правых частях—обычные несобственные интегралы, для вычисления которых можно применить известные кубатурные формулы.

Явное вычисление сингулярных интегралов. Если элементарная область интегрирования—плоский многоугольник, то интегралы могут быть вычислены в явном виде, при этом поверхность тела заменяется полиэдром. В настоящее время применяются и более высокие степени аппроксимации поверхности и плоской функции.

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(p) - \varkappa_1 \int_S K(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = f(p). \qquad (5.155)$$

Метод последовательных приближений заключается в следующем. Решение уравнения представим в виде ряда по степеням $\varkappa_1$:

$$\varphi(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \varkappa_1^m \psi_m(p). \tag{5.156}$$

Подставляя ряд (5.156) в (5.155), приходим к рекуррентным соотношениям

$$\psi_0 = f, \quad \psi_n(p) = \int_S K(p, q)\, \psi_{n-1}(q)\, dS_q \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.157}$$

Ряд (5.156) представляет собой разложение резольвенты интегрального уравнения по параметру $\varkappa_1$ около точки $\varkappa_1 = 0$ и будет сходящимся до первой особой точки этой функции. Из спектральных свойств уравнений следует, что при $\varkappa_1 = 1$ (первая внутренняя и вторая внешняя задачи) ряд (5.156) будет расходящимся, так как $\varkappa_1 = -1$ является полюсом резольвенты. В этом случае решение можно представить, например, в виде следующего сходящегося ряда:

$$\varphi(p) = 0{,}5\psi_0 + 0{,}5(\psi_0 + \psi_1) + 0{,}5(\psi_1 + \psi_2) + \ldots \tag{5.158}$$

Остановимся на второй внутренней задаче. Решение уравнения посредством резольвенты запишем в виде

$$\varphi(p) = f(p) + \varkappa_1 \int_S R(p, q, \varkappa_1)\, f(q)\, dS_q. \tag{5.159}$$

Резольвента имеет вид

$$R(p, q, \varkappa_1) = \frac{\sum_{k=1}^{6} b^{(k)}(p)\, \chi^{(k)}(q)}{\varkappa_1 + 1} + A(p, q, \varkappa_1), \tag{5.160}$$

где $b^{(k)}$ и $\chi^{(k)}$ — совокупность линейно независимых собственных функций исходного уравнения и сопряженного с ним; A — матрица, голоморфная по параметру $\varkappa_1$ в круге радиуса больше единицы.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения на спектре имеют вид

$$\int_S \chi^{(k)}(p)\, f(p)\, dS_p = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6). \tag{5.161}$$

Перепишем решение (5.159) в развернутом виде

$$\varphi(p) = f(p) + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + 1} \sum_{k=1}^{6} b^{(k)}(p) \int_S \chi^{(k)}(q)\, f(q)\, dS_q + \\ + \varkappa_1 \int_S A(p, q, \varkappa_1)\, f(q)\, dS_q. \tag{5.162}$$

Согласно условиям разрешимости исходной задачи первый интеграл в правой части (5.162) пропадает, так как условие (5.161) означает условие уравновешенности внешних сил, приложенных к телу.

При численной реализации метода погрешность расчетной схемы может привести к нарушению условий ортогональности, и ряд (5.156) разойдется. В этом случае можно поступить, например, так. На каждом шаге итерации произвести корректировку функций ψ_m таким образом, чтобы условие ортогональности (5.161) выполнялось при любой расчетной схеме

$$\psi_n(p) = \psi_n(p) - \sum_{i=1}^{6} \psi_{1i}(p) \int_S \psi_{1i}(q)\, \psi_n(q)\, dS_q, \tag{5.163}$$

где ψ_{1i} — собственные функции союзного уравнения, взятые в ортонормированном виде.

Одна из возможных схем, реализующих метод последовательных приближений, следующая. Поверхность тела разбивается криволинейной сеткой на малые элементы (рис. 5.10). Точки пересечения линий разбиения называются основными (p), а точки, взятые в центрах тяжести элементов,— опорными (q). На первом шаге из граничного условия находится значение

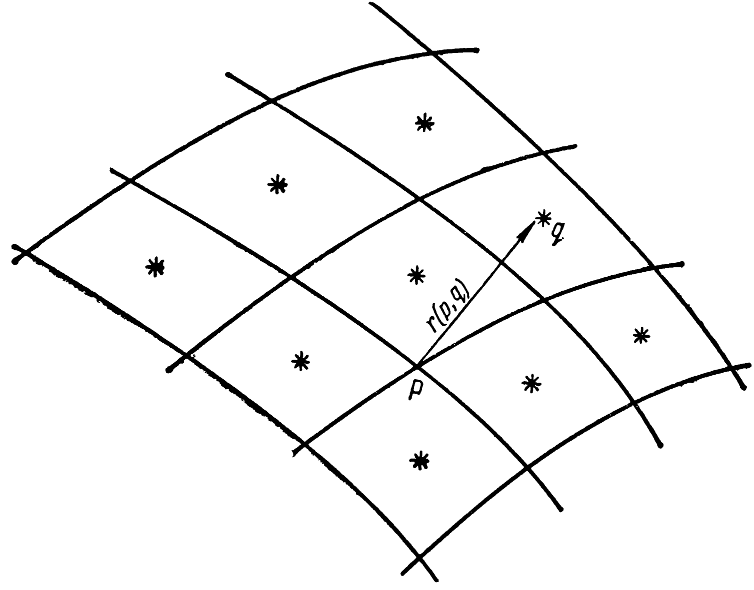


Рис. 5.10. Схема разбиения поверхности тела сеткой малых элементов.

функции как в основных, так и в опорных точках путем использования какой-либо кубатурной формулы для вычисления несобственного интеграла. После этого ψ_1 в опорных точках находится интерполяцией по ее значениям в близлежащих основных точках и так далее. Вычислив таким образом необходимое количество функций ψ_n, можно построить ряд плотностей.

Перемещения и напряжения в области находятся интегрированием известных теперь функций по поверхности, причем интегрирование можно производить в той же сетке разбиения поверхности, при которой решалось интегральное уравнение. Для нахождения перемещений и напряжений в точках, расположенных близко к поверхности, следует ввести вторичную

дискретизацию части поверхности, отстоящей от них на расстоянии, меньшем диаметра элементов разбиения. Значение плотности при этом в дополнительных точках находится интерполяцией. Напряжения на границе можно определить экстраполированием из области, вычислив их значения в нескольких точках, расположенных, например, на нормали к поверхности на различном от нее расстоянии. В случае второй основной задачи напряжения на границе можно определить, дифференцируя численно значения перемещений, рассчитанных на границе. Если использовать краевое условие, то при этом не требуется вычисления перемещений в области.

При решении интегрального уравнения методом механических квадратур задача сводится к решению системы $3N$ линейных алгебраических уравнений (N — число элементов, на которое разбивается поверхность)

$$[A_{ij}]\{X_j\} = \{Y_j\}. \tag{5.164}$$

Решение такой системы производится с помощью стандартных матричных преобразований.

Метод механических квадратур хуже метода последовательных приближений, поскольку для второй внутренней задачи при его использовании получается вырожденная система, для которой требуется разработка специальных методов решения. Кроме того, вопрос о сходимости метода механических квадратур остается открытым, тогда как сходимость метода последовательных приближений доказана.

В настоящее время в областях, ограниченных гладкими поверхностями, применяется метод потенциала. Но аппарат плоской задачи теории упругости нельзя использовать для решения пространственных задач. В этом случае пригоден метод потенциала двойного слоя, который сводится к решению функционального уравнения. Однако если тело отличается от полного пространства (конечных размеров), такое функциональное уравнение трудно разрешимо. Для полупространства строится уравнение, исходя из решения Миндлина для сосредоточенной силы в полупространстве, при этом на границе полупространства граничные условия выполняются точно.

Для плоской задачи в случае наличия одной прямолинейной трещины с помощью функции Грина можно построить интегральное уравнение, записанное лишь по внешней границе тела. В табл. 5.1 приведены результаты решения задач о растяжении прямоугольной пластины с различно расположенными в ней трещинами разными методами. Видно, что метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) обеспечивает точность, сравнимую с методом коллокаций. В табл. 5.2 приведено уравнение результатов расчета этих задач МГИУ и методом конечных элементов (МКЭ) (ис-

Таблица 5.1. **Сравнение различных методов определения K_{I} и K_{II}**

Тип трещины	$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$		$K_{\mathrm{II}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$	
	МГИУ	метод коллокаций	МГИУ	метод коллокаций
Центральная поперечная	1,185	1,187	0,0	0,0
Кривая	2,794	2,828	0,0	0,0
Центральная наклонная	0,712	0,730	0,590	0,600

Таблица 5.2. **Эффективность различных методов определения K_I и K_{II}**

Метод решения	Разбиение (число степеней свободы)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi r_0}}$	Погрешность, %	Время работы центрального процессора, с
		Пластина с центральной поперечной трещиной		
МГИУ	48	1,1865	+0,02	65
	30	1,1845	+0,19	25
	16	1,1815	+0,44	8
	12	1,1767	+0,84	2
	8	1,1673	+1,63	9
МКЭ	546	1,2150	—2,38	9
		Пластина с краевой трещиной		
МГИУ	90	2,818	0,35	127
	50	2,794	1,20	41
	26	2,779	1,70	12
	20	2,776	1,80	6
МКЭ	546	2,845	0,60	11
		Пластина с центральной трещиной, наклоненной под углом 45°		
МГИУ	122	0,7154 (0,5839)	—	120
	80	0,7121 (0,5904)	—	50
	64	0,7106 (0,5921)	—	30
МКЭ	1336	0,7408 (0,5968)	—	50

Примечание. В скобках приведены значения $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi r_0}$.

пользовались сингулярные элементы в концевой области трещины). В МГИУ сопоставимая точность достигается при меньших затратах машинного времени.

В случае, если разрез является частью плоскости симметрии задачи, ставятся смешанные граничные условия: на поверхности разреза — условия для вектора напряжений, а на продолжении его — нулевые касательные напряжения и нулевые нормальные перемещения. В такой постановке решен ряд пространственных модельных задач по определению коэффициента интенсивности напряжений. Интегральное уравнение решалось методом механических квадратур. В табл. 5.3 приведены результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений K_I вдоль контура внутренней эллиптической трещины по раскрытию трещины и по скорости освобождения упругой энергии. Относительная ошибка по всему контуру не превосходит для второго способа 5 %. (Здесь θ — угол, отсчитываемый от большей полуоси, соотношение осей 2 : 1.)

Общий подход, связанный с методом потенциала, неприменим к решению задач для тел с трещинами из-за вырожденности задачи. Для того чтобы решить эту задачу, трещина заменяется полостью конечной ширины (соответствующим образом преобразуются и краевые условия на берегах трещины). Если имеется совокупность полостей, охватывающих трещину и стремящихся в пределе к ее поверхности, то, решая ряд задач, внешних по отношению к полостям, в пределе получаем решение исходной задачи.

Таблица 5.3. Расчет K_I вдоль контура внутренней эллиптической трещины

θ, град	$\frac{K_I'}{K_I}$	$\frac{K_I''}{K_I}$	θ, град	$\frac{K_I'}{K_I}$	$\frac{K_I''}{K_I}$
0	0,92	0,95	60	0,93	0,96
15	0,92	0,96	75	0,93	0,96
30	0,92	0,96	90	0,94	0,97
45	0,92	0,96			

Примечание. K_I' — вычислено по значениям локального перемещения, K_{II}'' — с учетом скорости освобождения упругой энергии. K_I—значение коэффициента интенсивности напряжений, подсчитанное по формуле точного решения задачи.

Это возможно, если справедлив предельный переход. При решении задачи методом потенциала на границе задается плотность потенциала простого слоя, представляющего собой перемещения. При вырождении полости в разрез потенциал простого слоя вырождается в потенциал двойного слоя; при этом значение плотности бесконечно возрастает. Поэтому следует ожидать плохую сходимость метода последовательных приближений, а при решении задачи методом механических квадратур — ухудшение структуры системы линейных алгебраических уравнений.

Будем моделировать разрез полостью конечной ширины $2b$ с радиусом r_0 в конце разреза. Решение такой приближенной задачи вне окрестности кромки перестает зависеть от величины b, т. е. будет практически совпадать с решением исходной задачи. Это обстоятельство и используется далее для определения коэффициента интенсивности напряжений K_I.

Напряжения в теле с разрезом можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = c_1 \left(\frac{r}{l}\right)^{-1/2} f_{1ij}(\theta) + C_2 \left(\frac{r}{l}\right)^{0} f_{2ij}(\theta) + + C_3 \left(\frac{r}{l}\right)^{1/2} f_{3ij}(\theta) + \dots, \tag{5.165}$$

где $C_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$; r, θ — координаты системы, связанной с кромкой (рис. 5.11). Для достаточно точного определения коэффициента K_I с использованием лишь корневой асимптотики напряжений требуется вычисление напряжений в непосредственной близости от кромки, что весьма затруднительно. Однако если учесть большее число членов разложения (5.165), то коэффициент K_I можно определить, не приближаясь близко к кромке разреза. Проиллюстрируем это на примере всестороннего растяжения плоскости с тонким эллиптическим вырезом, имитирующим прямолинейный разрез (см. рис. 5.11). Напряжение на продолжении разреза имеет вид

$$\sigma_y = \frac{(1 + r)\,\sigma}{\sqrt{r^2 + 2rl}}. \tag{5.166}$$

Умножим обе части на $\sqrt{r}$ и разложим по степеням r:

$$\sigma_y \sqrt{r} \approx C_1 + C_2 r. \quad (5.167)$$

где

$$C_1 = \lim_{r \to 0} \sigma_y \sqrt{r}. \quad (5.168)$$

Соотношение (5.167) представляет в координатах $(\sigma_y \sqrt{r}, r)$ прямую линию. Отклонение от истинного значения $\sigma_y \sqrt{r}$ определяется выражением

$$\Delta (r/l) = (\sigma_y^{\text{пр}} - \sigma_y^{\text{точ}}) \sqrt{r} = \left[1 - \frac{(4 + 3r/l)\sqrt{r/2l + 1}}{4(r/l + 1)}\right] 100\,\%, \quad (5.169)$$

где индексы «пр» и «точ» означают приблизительно и точно. Величина $\sigma_y \sqrt{r}$ как функция r хорошо аппроксимируется прямой на достаточно большом расстоянии от кромки:

r/l	0,1	0,3	0,5
Δ, %	0,14	0,05	2,40

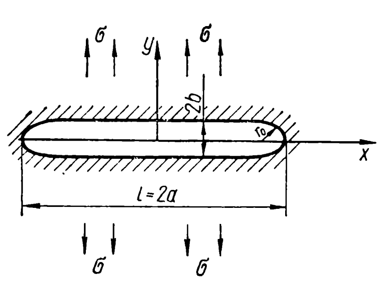


Рис. 5.11. Схема всестороннего растяжения плоскости с тонким эллиптическим вырезом.

Экстраполяция этой прямой в точку $r = 0$ дает значение искомого коэффициента K_{I}. Для сравнения ниже приведены значения относительного отклонения Δ напряжений σ_y, вычисленные по асимптотике (3.25).

r/l	0,02	0,1	0,3
Δ, %	1,5	7,3	21,2

Видно, что коэффициент K_{I} характеризует напряженное состояние в очень малой окрестности кромки.

Приведенный выше анализ напряженного состояния впереди на продолжении разреза позволяет сделать вывод, что коэффициент интенсивности напряжений K_{I} можно найти путем экстраполяции.

Пусть теперь вместо разреза имеется эллиптическая полость с полуосями a и b (рис. 5.11). В этом случае напряжения на продолжении большой полуоси имеют вид

$$\sigma_y = \frac{x(x^2 - a^2 + 2b^2)\sigma}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (5.170)$$

Ниже приведены значения напряжений σ_y для разреза $(\sigma_y^{\text{р}})$ и для эллиптической полости $(\sigma_y^{\text{э}})$ при $b/a = 1/10$:

$r/(2a)$	0,1	0,3	0,5
$\sigma_y^{\text{р}}$	1,829	1,285	1,157
$\sigma_y^{\text{э}}$	1,809	1,281	1,155

При $r > b$ напряжения практически совпадают.

5.5. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время наиболее распространенный численный метод решения задач механики деформированного твердого тела. Широкая популярность МКЭ во многом объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, конечный элемент представляет собой объект, хорошо понятный каждому инженеру. Естественность механической интерпретации МКЭ не только позволяет во многих случаях строить расчетные схемы, исходя из физической постановки задачи, но и способствует обнаружению грубых ошибок на любом этапе вычислительного процесса. Во-вторых, вариационно-разностная природа МКЭ делает возможным строгий математический анализ расчетных моделей, построение надежных оценок точности и сходимости метода.

Общие вопросы применения МКЭ достаточно широко освещены в литературе [6—8]. Основной идеей МКЭ является разбиение области, моделирующей исследуемую деталь или элемент конструкции, на большое число частей-элементов. Связь между элементами осуществляется через некоторое число точек, называемых узлами. Предполагается *, что значения упругих перемещений $\{u\}^{\nu}$ в любой внутренней точке ν-го элемента однозначно определяются через компоненты перемещений узлов $\{q\}^{\nu}$:

$$\{u\}^{\nu} = [N]\,\{q\}^{\nu}, \tag{5.171}$$

где $[N]$ — матрица полиномиальных интерполирующих функций, называемых функциями формы. В зависимости от порядка функций формы конечные элементы делятся на элементы с линейной, квадратичной, кубической и т. д. аппроксимацией перемещений.

Вводя матричный дифференциальный оператор $[B]$, можно получить связь между вектором перемещений в узловых точках и значениями компонент деформаций внутри элемента $\{\varepsilon\}^{\nu}$ в виде

$$\{\varepsilon\}^{\nu} = [B]\,\{q\}^{\nu}. \tag{5.172}$$

Аналогично через матрицу упругости $[D]$ определяются напряжения:

$$\{\sigma\}^{\nu} = [D]\,(\{\varepsilon\}^{\nu} - \{\varepsilon_{\text{терм}}\}), \tag{5.173}$$

где $\{\varepsilon_{\text{терм}}\}$— вектор термических или других начальных деформаций.

С учетом принятых предположений локальное уравнение равновесия для одного элемента принимает вид

$$[K]^{\nu}\,\{q\}^{\nu} = \{f\}, \tag{5.174}$$

где $[K] = \int\limits_{V_{\nu}} [B]^{\text{т}}\,[D]\,[B]\,dV$ — матрица жесткости элемента (индекс «т» указывает на операцию транспонирования); $\{f\}$ — локальный вектор приведенной узловой нагрузки, являющийся суммой $\{f\}=\{p\}+\{h\}$ реальной нагрузки $\{p\}$ и фиктивных $\{h\}$ вследствие наличия начальных (например, температурных) деформаций.

Учет существующих между элементами связей позволяет перейти от начальных матриц и векторов для отдельных элементов к глобальным ве-

---

* Здесь и далее рассматривается вариант МКЭ в форме метода перемещений — наиболее распространенного, но не единственно возможного. О других способах постановки задачи для упругих систем см. [9].

личинам, относящимся ко всей конечноэлементной модели в целом. Тем самым решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений равновесия совокупности конечных элементов

$$[K]\{Q\} = \{F\}, \tag{5.175}$$

где большими буквами обозначены глобальные аналоги локальных величин (см. формулу (5.174)). Результатом решения системы (5.175) является определение величин узловых компонентов упругих перемещений. Компоненты напряжений и деформаций можно определить по формулам (5.172), (5.173).

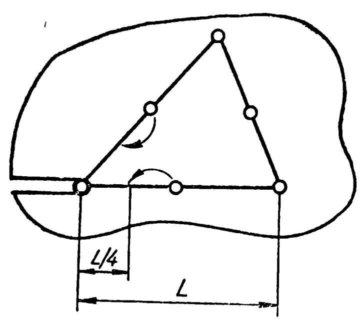


Рис. 5.12. Квадратичный изопараметрический элемент со сдвинутыми промежуточными узлами.

Алгоритм построения системы разрешающих уравнений МКЭ в случае нелинейной задачи аналогичен приведенному выше. При использовании теории течения уравнения (5.175) записывают в форме приращений, решение получают последовательным суммированием на каждом шаге счета.

Уравнения движения в случае динамической задачи для упруговязкопластического материала при использовании МКЭ приводят к виду

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}, \tag{5.176}$$

где $[M]$ — глобальная матрица инерции (матрица масс); $[C]$ — матрица демпфирования [6]; $\{F\}$ — дискретизированная вынуждающая функция задачи, а точкой обозначено дифференцирование по времени. Интегрирование по времени обычно производится по разностной схеме, причем главная сложность — это необходимость избежать численной неустойчивости вычислительного процесса.

МКЭ достаточно широко применяется для решения задач механики разрушения: расчета параметров, контролирующих разрушение для областей различной формы; моделирования процессов разрушения или поведения тел с неподвижной или растущей трещиной в условиях, для которых еще не построены адекватные математические модели; анализа прочности реальных конструкций с точки зрения сопротивления хрупкому разрушению.

Линейная механика разрушения. *Плоская задача.* Специфика решений задач линейной упругости для тел с трещинами — наличие особых точек. Напряжения и деформации в непосредственной близости от вершины острой трещины пропорциональны $r^{-1/2}$, где r — расстояние от данной точки до вершины. Очевидно, что при определении коэффициентов интенсивности напряжений с помощью МКЭ результат будет тем точнее, чем лучше будет смоделировано поле напряжений в окрестности вершины трещины. Поскольку обычные конечные элементы строятся на основе представления поля перемещений с помощью полинома с целыми степенями, то такое моделирование сильно затрудняется.

Простейший, но не самый эффективный способ преодоления этого затруднения — сильное сгущение сетки у вершины трещины. Для повышения точности решения следует также обеспечить плавное возрастание размеров элементов в области с характерным размером, соизмеримым с длиной трещины. Рекоменуется, чтобы размеры простых элементов возраста-

ли не быстрее, чем $1:4:9 \ldots : N^2 \ldots$, а квадратичных — $1:16:81: \ldots$ $\ldots : N^4$.

Сгущение сетки приводит к необходимости решения громоздких систем линейных уравнений, что значительно увеличивает время счета и количество исходных данных. Избежать этого позволяет введение в сетку одного или нескольких специальных элементов, моделирующих сингулярность напряжений. Специальными эти элементы называются потому, что при вычислении матрицы жесткости в них задаются отличные от обычных функции перемещений, которые содержат член, пропорциональный $\sqrt{r}$. Было предложено большое количество различных видов специальных элементов. Многим из них присущи типичные недостатки — несовместность с обычными элементами, неспособность отображать перемещение тела как жесткого целого, необходимость иметь отдельную подпрограмму для вычисления матриц жесткости таких элементов. Однако существуют элементы, лишенные таких недостатков. Моделирования асимптотики можно достигнуть при сдвиге промежуточных узлов квадратичного изопараметрического элемента на четверть длины стороны по направлению к вершине трещины (рис. 5.12). При этом распределение перемещений вдоль сторон элемента, исходящих из вершины трещины, будет задаваться выражением вида

$$u_r = C_1 + C_2\sqrt{r} + C_3 r, \tag{5.177}$$

где r — координата, отсчитываемая от вершины трещины; C_1, C_2 и C_3 — независимые постоянные. Аналогично нетрудно обеспечить сингулярность в изопараметрических элементах более высоких порядков. Для произвольного четырехугольного изопараметрического элемента с числом узлов $4(n-1)$ достаточно $n-2$ узла, лежащих на исходящих из вершины трещины сторонах, разместить на расстояниях, равных $m^2/(n-1)^2$ ($m = 1, 2, \ldots, n-2$) длины стороны.

Сконструированные таким образом сингулярные элементы полностью совместимы с обычными, отражают перемещение тела как жесткого целого, для них справедливы теоремы о сходимости решения к точному, для вычисления матриц жесткости этих сингулярных элементов не требуется каких-либо специальных подпрограмм. Именно эти элементы получили в настоящее время наибольшее распространение.

Определение коэффициентов интенсивности напряжений. Методы вычисления коэффициента интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ для трещин нормального отрыва условно делятся на два класса: прямые (асимптотические) и энергетические. Рассмотрим их на примере симметричной деформации берегов трещины, поскольку обобщение на несимметричный случай для большинства способов достаточно очевидно.

Прямые (асимптотические) методы. В этой группе методов для нахождения коэффициента интенсивности напряжений применяются выражения, дающие распределение напряжений σ_{ij} и перемещений u_i в малой окрестности вершины трещины:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \tag{5.178}$$

$$u_i(r, \theta) = \frac{K_{\rm I}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} F_i(\theta).$$

Здесь r, θ — полярные координаты с началом в вершине трещины; $f_{ij}(\theta)$, $F_i(\theta)$ — известные тригонометрические функции. Если в итоге решения получены надежные значения напряжений и перемещений в точке (r, θ),

близкой к вершине, то K_I можно вычислить как

$$K_I = [\sqrt{2\pi r}/f_{ij}(\theta)]\, \sigma_{ij}(r, \theta) \tag{5.179}$$

или

$$K_I = [(2G/\sqrt{2\pi})/(F_i(\theta)\sqrt{r})]\, u_i(r, \theta).$$

Поскольку напряжения в методе конечных элементов определяются численным дифференцированием перемещений, то формула (5.179) дает бóльшую погрешность. Поэтому почти всегда асимптотические методы основывают на перемещениях и стремятся повысить точность расчета путем экстраполяции.

Зафиксировав направление $\theta = \text{const}$ и рассчитав K_I при различных координатах r, можно получить некоторые значения K_I при $r = 0$. Удобнее всего сделать это экстраполяцией в пределах одного сингулярного элемента при наличии в нем промежуточных узлов. Хорошие результаты дает линейная экстраполяция по координате $r^{1/2}$ в вершину трещины. При этом K_I в случае квадратичного элемента определяется по формуле

$$K_I = 2K_I(L/4) - K_I(L) = [(2G\sqrt{2\pi})/(F_i(\theta)\sqrt{L})] \times \times [4u_i(L/4) - u_i(L)], \tag{5.180}$$

где L — см. рис. 5.12.

При линейной экстраполяции по координате r получаем

$$K_I = (4K_I(L/4) - K_I(L))/3 = [(2G\sqrt{2\pi})/(F_i(\theta)\sqrt{L})] \times \times (8u_i(L/4) - u_i(L))/3. \tag{5.181}$$

Формулы (5.180), (5.181) можно применять и в случае термического воздействия.

Еще один способ повышения точности расчета K_I по перемещениям предполагает, что очертания берегов трещины в окрестностях вершины описываются уравнением эллипса. Тогда величину K_I можно рассчитать по перемещениям u_y узлов на поверхности трещины:

$$K_I = 2G\sqrt{2\pi}\bar{u}_y/[(\varkappa + 1)\sqrt{r(1 - r(2l)^{-1})}]. \tag{5.182}$$

Здесь l — длина краевой или полудлина внутренней трещины; $\varkappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния и $\varkappa = 3 - 4\mu$ для плоской деформации.

Энергетические методы. В энергетических методах для вычисления коэффициента интенсивности напряжений используют его связь с производной потенциальной энергии П по длине трещины l: $K_I^2/E' = -\partial \Pi/\partial l$, где $E' = E$ для плоского напряженного состояния или $E' = E/(1 - \mu^2)$ для плоской деформации.

Очевидно, что самый прямой метод определения потенциальной энергии нагруженного тела состоит в нахождении этой величины в каждом элементе и последующем суммировании. Несмотря на громоздкость, этот способ иногда употребляется. Чаще всего так поступают пользователи крупных универсальных комплексов, в которых поэлементное вычисление энергии деформированного состояния заложено как стандартная операция. Производная $\partial\Pi/\partial l$ при этом определяется численным дифференцированием по результатам двух или более расчетов для ряда последовательных близких значений длины трещины.

Большинство исследователей используют более эффективные варианты энергетического подхода. Далее описываются некоторые из них.

Потенциальную энергию для одного конечного элемента можно представить в виде

$$\Pi = \{q\}^{т} [K] \{q\}/2 - \{q\}^{т} \{f\} + E_{терм}, \tag{5.183}$$

где $E_{терм} = \frac{1}{2} \int\limits_V \{\varepsilon_{терм}\}^{т} [D] \{\varepsilon_{терм}\} dV$; $\varepsilon_{терм}$ — вектор термических или других начальных деформаций; индекс «т» указывает на операцию транспонирования. С учетом уравнений равновесия формула (5.183) принимает следующий вид:

$$\Pi = -\frac{1}{2} \{q\}^{т} \{f\} + E_{терм}. \tag{5.184}$$

Полную потенциальную энергию можно определить суммированием по элементам, которое далее будем обозначать $\sum\limits_e$. Продифференцировав выражение (5.184) по длине трещины, получим

$$\frac{K_I^2}{E'} = \frac{1}{2} \sum_e \left(\left\{ \frac{\partial q}{\partial l} \right\}^{т} \{f\} + \{q\}^{т} \left\{ \frac{\partial f}{\partial l} \right\} \right) - \sum_e \frac{\partial E_{терм}}{\partial l}. \tag{5.185}$$

Для практических целей часто можно считать, что прирост длины трещины не влияет на силовые и термические нагрузки, т. е.

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial l} \right\} = \frac{\partial E_{терм}}{\partial l} = 0. \tag{5.186}$$

Учитывая выражение (5.186) и применяя простейшую разностную формулу, получаем соотношение, положенное в основу метода податливости

$$\frac{K_I^2}{E'} = \frac{1}{2\Delta l} \sum_e (\{q\}_{l+\Delta l} - \{q\}_l)^{т} \{f\}. \tag{5.187}$$

При отсутствии массовых сил компоненты получаемого после суммирования глобального вектора нагрузки отличны от нуля только в узлах того участка границы тела, где задана внешняя нагрузка. Таким образом, определение коэффициента интенсивности напряжений в данном случае сводится к нахождению разности работ внешних сил на граничных перемещениях тела для двух близких значений длины трещины.

Основное применение энергетические методы вообще, а метод податливости в частности, находят при необходимости вычислить значения K_I для большого числа значений длины трещины. В таких случаях отсутствие необходимости изменять сетку конечных элементов (изменение длины трещины имитируется закреплением или освобождением соответствующих узлов (рис. 5.13)), которой нельзя избежать при использовании прямых методов, существенно облегчает решение задачи. К тому же в энергетических методах можно применять более «грубые» сетки с меньшим числом степеней свободы, чем в асимптотических методах.

Дифференцирование соотношения (5.183) дает формулу

$$\frac{K_I^2}{E'} = -\frac{1}{2} \sum_e \{q\}^{т} \left[\frac{\partial K}{\partial l} \right] \{q\} + \sum_e \{q\}^{т} \left\{ \frac{\partial f}{\partial l} \right\} - \sum \frac{\partial E_{терм}}{\partial l}, \tag{5.188}$$

лежащую в основе метода виртуального роста трещины. Такая форма записи выражения для K_I не содержит производных перемещений и, следовательно достаточно только одного решения задачи. Если можно считать, что нагрузка и температура не являются функциями длины трещины, то выражение (5.188) упрощается:

$$\frac{K_I^2}{E'} = -\frac{1}{2}\sum_e \left(\{q\}^T\left(\left[\frac{\partial K}{\partial l}\right]\{q\} - 2\left\{\frac{\partial h}{\partial l}\right\}\right)\right).$$

В этом выражении осталась производная термического вектора, так как в процессе вычислений изменяется геометрия сетки элементов. Для

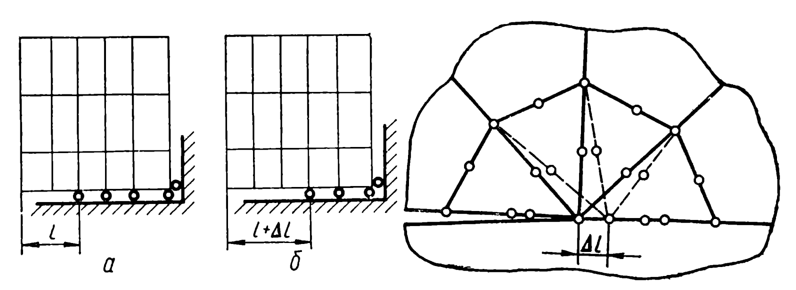


Рис. 5.13. Схема изменения длины трещины:
а — исходная трещина; б — трещина увеличенной длины.

Рис. 5.14. Сдвиг узла в вершине трещины.

отыскания производных узел, находящийся в вершине трещины, смещают на малую величину Δl вдоль линии трещины (рис. 5.14). При этом изменится геометрия элементов, окружающих вершину, и производные матриц и векторов могут быть подсчитаны по приближенной формуле

$$\left[\frac{\partial A}{\partial l}\right] = \frac{[\Delta A]}{\Delta l} = \frac{[A]_{l+\Delta l} - [A]_l}{\Delta l}.$$

С недавнего времени широко привлекается для определения коэффициентов интенсивности J-интеграл:

$$\frac{K_I^2}{E'} = J = \int_\Gamma \left(Wn_x - \sum_{i,j}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)n_j\right)d\Gamma, \qquad (5.189)$$

где Γ — контур, окружающий вершину трещины; W — плотность энергии деформации; n_x, n_j — компоненты внешней нормали к контуру. Существует несколько методов вычисления величины J-интеграла, различающихся выбором относительного расположения контура интегрирования и сетки конечных элементов. Если контур проведен через точки численного интегрирования локальных матриц жесткости, то при вычислении величины J в пределах каждого из элементов можно воспользоваться правилом Гаусса.

Несимметричное нагружение. Большинство практических задач требует рассмотрения двухмерных тел с трещинами, берега которых деформируются несимметрично. Хотя до сих пор не существует единого мнения относительно критерия разрушения в данном случае, оче-

видно, что момент страгивания трещины может быть определен из условия $f(K_I, K_{II})=0$. Следовательно, нахождение K_I и K_{II} является важным этапом прогнозирования трещиностойкости при несимметричном нагружении.

Для решения этой задачи пригодны все методы, описанные выше. В частности, хорошие результаты дает метод виртуального роста трещины. На рис. 5.15 показаны способы изменения геометрии элементов в окрестностях вершины трещины. По величинам изменения потенциальной энер-

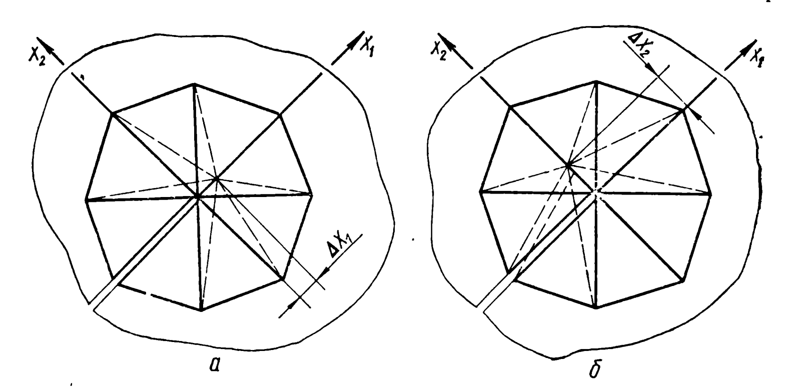


Рис. 5.15. Смещение угла в вершине трещины для определения J_1 (*а*) и J_2 (*б*).

гии $\Delta\Pi_i = (1/2)\{q\}[\Delta K_i]\{q\}$ определяются компоненты потока энергии в вершину трещины:

$$J_1 = -\Delta\Pi_1/\Delta x_1, \quad J_2 = -\Delta\Pi_2/\Delta x_2. \tag{5.190}$$

Теперь величины K_I и K_{II} можно определить (однозначно, если известен знак разности $(K_I - K_{II})$) из выражений

$$J_1 = (1+\mu)(1+\varkappa)(K_I^2 + K_{II}^2)/(4E),$$

$$J_2 = -(1+\mu)(1+\varkappa)K_I K_{II}/(2E),$$

где $\varkappa$ — то же, что в формуле (5.7).

Трехмерные задачи. В трехмерных задачах для прогнозирования разрушения рассчитывают коэффициенты интенсивности напряжений трех типов K_I, K_{II}, K_{III} как функции положения точки на фронте трещины. Основные трудности при этом обусловлены большим объемом перерабатываемой информации, что требует применения мощных вычислительных комплексов и эффективного использования при этом внешней памяти.

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений в трехмерных задачах пригодны все перечисленные выше методы. Обычно рассматриваются ситуации, когда $K_{III} = 0$. Большее распространение в настоящее время имеют энергетические методы, что объясняется возможностью применять сетки с более крупными элементами, чем требуется в асимптотических методах. Наиболее простые виды энергетических методов (прямое вычисление энергии деформированного состояния тела, метод податливости) позволяют получить лишь значения коэффициентов, усредненные по фронту трещины и поэтому малоэффективны. Хорошие результаты

получаются при использовании метода виртуального роста трещины, который дает возможность определить значения коэффициентов интенсивности напряжений непосредственно в отдельном узле, лежащем на фронте трещины. Для этого такой узел можно сместить на некоторые расстояния Δx_1 и Δx_2 (рис. 5.16), а для вычисления компонент потока энергии воспользоваться формулами (5.190).

Решение сложных трехмерных задач с высокой точностью можно проводить поэтапно: вначале исходное напряженно-деформированное состояние тела определяется на грубой сетке элементов, а затем область вблизи фронта трещины представляется мелкой сеткой и решается задача с нагрузкой, найденной из распределения узловых усилий на предыдущем этапе.

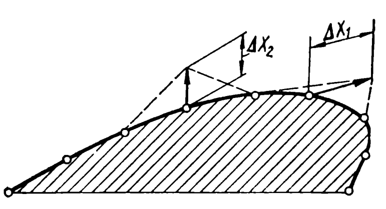


Рис. 5.16. Смещение узлов на контуре трещины для определения J_1 и J_2.

Нелинейная механика разрушения. Методы линейной упругой механики разрушения хорошо обоснованы как теоретически, так и экспериментально и достаточно широко применяются при проектировании ответственных конструкций. С другой стороны, очевидна ограниченность линейной механики разрушения. Реальные металлические тела при разрушении всегда испытывают некоторую пластическую деформацию. В настоящее время ясно, что во многих практически важных случаях упругое решение задач о трещинах недостаточно для корректного их описания.

В отличие от линейной механики разрушения, где основной вопрос — определение коэффициентов интенсивности напряжений — успешно решается с применением МКЭ, нелинейная механика трещин далека от завершения. Поэтому вычислительные методы играют столь существенную роль не только при обосновании конкретных конструкций, но и как инструмент проведения вычислительного эксперимента, служащего для развития представлений о разрушении тел при неупругих деформациях.

В настоящее время практически применяют (не учитывая задач о тонких пластинах) два критерия локального разрушения — J-интеграл Черепанова — Райса и $\delta_К$-критерий, использующий в качестве характеристики разрушения максимальное раскрытие трещины в ее конце. Установлена линейная пропорциональность между величинами раскрытия и J-интеграла. Взаимосвязь эта с учетом конечности деформаций описывается соотношением $\delta = (0{,}58 \ldots 0{,}65)\ J/\sigma_т$, в случае трехмерной задачи $\delta = 0{,}61\ J/\sigma_т$.

Точность решения задач механики разрушения МКЭ существенно повышается при точном моделировании асимптотики параметров напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Г. П. Черепанов, Дж. Хатчинсон, Дж. Райс и Г. Розенгрен показали, что если зависимость между эквивалентными напряжением и деформацией стремится к степенной $\sigma \sim \varepsilon^n$, то асимптотическое поведение полей напряжений и деформаций в малой окрестности вершины трещины имеет вид

$$\sigma_{ij} \sim r^{-\frac{n}{n+1}} \Sigma_{ij}(\theta),$$

$$\varepsilon_{ij} \sim r^{-\frac{1}{n+1}} E_{ij}(\theta),$$

где $\Sigma_{ij}(\theta)$, $E_{ij}(\theta)$ — некоторые функции полярного угла θ. Отсюда

выражение для энергии деформации при $r \to 0$ имеет особенность вида $1/r$. Ее можно смоделировать описанным выше сдвигом углов изопараметрического квадратичного элемента, однако при этом напряжения и деформации будут иметь упругую асимптотику $r^{-1/2}$.

Окружение вершины трещины изопараметрическими квадратичными элементами, у которых промежуточные узлы в вершине трещины имеют возможность свободно перемещаться (рис. 5.17), дает распределение деформаций вдоль линии $\theta = \text{const}$ вида $\varepsilon_{ij} = C_0 r^{-1/2} + C_1 r^{-1} + C_2$. Это позволяет правильно моделировать асимптотику решения у вершины тре-

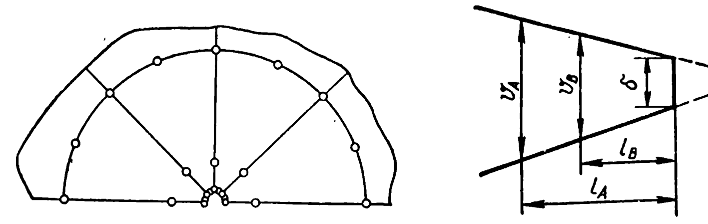


Рис. 5.17. Фрагмент сетки конечных элементов в вершине трещины в упругопластическом теле.

Рис. 5.18. Схема определения раскрытия в вершине трещины.

щины как в упругом теле ($n = 1$), так и в теле из идеально пластичного материала ($n = 0$).

Раскрытие в вершине трещины было предложено в качестве количественной характеристики упругопластического поведения материала в зоне предразрушения значительно раньше, чем инвариантный J-интеграл. Существенное ограничение в использовании этого параметра состоит в том, что трудно разработать процедуру вычисления раскрытия, которая была бы пригодна для широкого класса условий нагружения. Принятое в теории определение раскрытия как скачка перемещений в вершине трещины трудно использовать при аналитическом или численном решении упругопластических задач, согласно которым перемещения на берегах трещины плавно меняются, начиная от нуля в вершине. Обычно о раскрытии в вершине трещины судят по данным экстраполяции перемещения прямолинейного участка берегов трещины на некотором расстоянии от ее вершины. Например, зная перемещения v_A и v_B в двух точках, находящихся на расстоянии соответственно l_A и l_B от вершины трещины (рис. 5.18), можно определить величину δ по формуле

$$\delta = \frac{l_A v_B - l_B v_A}{l_A - l_B} .$$

Методика вычисления J-интеграла в упругопластической задаче аналогична методике, применяемой в случае идеальной упругости с той лишь разницей, что энергия деформации W зависит от истории нагружения. Поэтому при вычислении приращений напряжений следует накапливать тот член интеграла (5.189), в котором присутствует W:

$$J_W = \int_\Gamma W n_x ds = \sum_e \frac{1}{2} \int_\Gamma (\{\sigma_i\} + \{\sigma_{i+1}\})^T (\{\varepsilon_{i+1}\} - \{\varepsilon_i\}) n_x ds.$$

Здесь индексами i, $i+1$ отмечены состояния, соответствующие началу и концу приращения. После завершения итерационного процесса значение интеграла подсчитывают по формуле (5.189) с заменой первого члена накопленной величиной J_W.

Для нахождения J интеграла, как производной потенциальной энергии по длине трещины, можно применить метод смещения узла в вершине трещины. При этом нет практически никаких усложнений по сравнению с расчетом аналогичной величины в упругом случае. Однако трактовка J-интеграла как производной потенциальной энергии по длине трещины — частный случай, справедливый для нелинейной упругости (деформационная теория пластичности).

Неоднократно проводившиеся эксперименты подтвердили независимость величины J-интеграла от контура в рамках не только деформационной теории, но и теории течения. Было также показано, что область неинвариантности ограничена радиусом порядка шести раскрытий.

5.6. Метод граничной интерполяции в задачах теории трещин

Приведенные выше аналитические методы решения задач о предельном равновесии тел с трещинами позволяют в основном решать задачи для изолированных трещин несложной конфигурации, содержащихся в неограниченных телах. В таких случаях, как правило, фигурирует один, максимум два безразмерных параметра, что дает возможность эффективно использовать асимптотические и численные методы. Однако практически важные задачи теории трещин, которые выдвигает перед наукой о прочности твердых тел инженерная практика, в большинстве случаев являются многопараметрическими. Для их решения, хотя бы приближенного, в настоящее время каких-либо универсальных методов нет.

В настоящем параграфе приводится метод приближенного решения многопараметрических задач теории трещин [3, 4, 10], основанный на интерполяционном подходе, который позволяет решать многопараметрические задачи теории трещин, если известны решения их граничных случаев, т. е. соответствующих однопараметрических задач.

Определение коэффициента интенсивности напряжений в телах с трещинами. Рассмотрим хрупкое тело, ослабленное системой m трещин и подвергнутое действию внешних усилий, точки приложения которых достаточно удалены от контуров трещин. Пусть конфигурация тела и геометрическое размещение трещин характеризуются линейными параметрами a_1, a_2, ..., a_n, а геометрическая конфигурация каждой трещины — параметрами b_1, b_2, ..., b_m. Принимаем параметры a_j такими, что при $a_j \to \infty$ ($j = 1, 2, ..., n$) получается неограниченное тело, ослабленное одной трещиной выбранной конфигурации b_i.

В хрупком теле определение предельного равновесия сводится к вычислению коэффициентов интенсивности напряжений $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$, $K_{\rm III}$. Поэтому развиваемый здесь метод заключается в способе эффективного определения коэффициентов интенсивности напряжений для тел с трещинами.

На основании П-теоремы о размерностях величины $K_{\rm I}^{(i)}$, $K_{\rm II}^{(i)}$, $K_{\rm III}^{(i)}$ в точках контура трещины конфигурации b_i можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} K_{\rm I}^{(i)} &= K_{{\rm I}\infty}^{(i)}\Omega_i^{(1)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)}),\\ K_{\rm II}^{(i)} &= K_{{\rm II}\infty}^{(i)}\Omega_i^{(2)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)}),\\ K_{\rm III}^{(i)} &= K_{{\rm III}\infty}^{(i)}\Omega_i^{(3)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)}), \end{aligned}\right\} \qquad (5.191)$$

где $K^{(l)}_{I\infty}$, $K^{(l)}_{II\infty}$, $K^{(l)}_{III\infty}$ — коэффициенты $K^{(l)}_{I}$, $K^{(l)}_{II}$, $K^{(l)}_{III}$ в случае неограниченного тела с трещиной конфигурации b_i при аналогичном нагружении тела; $\lambda^{(i)}_j = b_i/a_j$ — безразмерные параметры; функции $\Omega^{(k)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda_n, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1)$ $(k = 1, 2, 3)$ считаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

Если число параметров $n + m > 2$, то задачу называют многопараметрической, если $n = m = 1$ — однопараметрической.

Решение многопараметрических задач На основании сделанных допущений относительно линейных параметров a_j безразмерные функции

$$\Omega^{(k)}_i(0, \ldots, 0) = 1 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{5.192}$$

Считая, что безразмерные параметры $\lambda^{(i)}_j < 1$, раскладываем функции $\Omega^{(k)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda^{(1)}_n, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1)$ в ряды в окрестности точки $(0, \ldots, 0)$:

$$\Omega^{(s)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda^{(1)}_n, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha^{(s)}_{jk}[\lambda^{(1)}_j]^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{m}\alpha^{(s)}_{ik}[\lambda^{(i)}_1]^k\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{(s)}_k\prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n}[\lambda^{(i)}_1]^{A_{ik}}[\lambda^{(1)}_j]^{A_{jk}} \quad (s=1, 2, 3), \tag{5.193}$$

где $\alpha^{(s)}_{ik}$, $\alpha^{(s)}_{jk}$, $\alpha^{(s)}_k$ — неизвестные коэффициенты; A_{ik}, A_{jk} — натуральные числа.

Учитывая равенства (5.192), а также разложение упомянутых функций по каждому из параметров $\lambda^{(i)}_j$, выражение (5.193) можем записать так:

$$\Omega^{(s)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda^{(1)}_n, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1) = 2 - n - m + \sum_{j=1}^{n}\Omega^{(s)}_i(0, \ldots, \lambda^{(1)}_j, \ldots, 0) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m}\Omega^{(s)}_i(0, \ldots, 0, \ldots, \lambda^{(k)}_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{(s)}_k\prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n}[\lambda^{(i)}_1]^{A_{ik}}[\lambda^{(1)}_j]^{A_{jk}} \quad (s=1, 2, 3). \tag{5.194}$$

Если один из параметров $\lambda^{(1)}_j$ будет бóльшим по сравнению с другими, то, пренебрегая в выражении (5.194) смешанными произведениями этих параметров, функции $\Omega^{(s)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda^{(1)}_n, \ldots, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1)$ определим приближенно по формулам

$$\Omega^{(s)}_i(\lambda^{(1)}_1, \ldots, \lambda^{(1)}_n, \lambda^{(2)}_1, \ldots, \lambda^{(m)}_1) \approx 2 - n - m + \sum_{j=1}^{\infty}\Omega^{(s)}_i(0, \ldots, \lambda^{(1)}_j, \ldots, 0) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m}\Omega_i(0, \ldots, 0, \ldots, \lambda^{(k)}_1) \quad (s = 1, 2, 3). \tag{5.195}$$

Формулы (5.195) достаточно просты для практического использования и дают удовлетворительную точность также в случае, если граничные зна-

чения искомых функций в основном определяются первыми членами их степенного разложения.

Таким образом, на основании соотношений (5.191) и (5.195) коэффициенты интенсивности напряжений K_{I}, K_{II} и K_{III} во многих конкретных случаях могут быть приближенно определены через их граничные значения для соответствующих однопараметрических задач.

Решение однопараметрических задач. Пусть конфигурация тела характеризуется одним линейным параметром a, а размер имеющейся в нем трещины — линейным параметром b. В этом случае задача предельного равновесия тела с трещиной описывается двумя линейными параметрами или одним безразмерным параметром $\Lambda = b/a < 1$ и будет однопараметрической.

Коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности контура трещины записываются в следующем виде:

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma_{\text{н}}\alpha_1, \quad K_{\mathrm{II}} = \tau_{1\text{н}}\alpha_2, \quad K_{\mathrm{III}} = \tau_{2\text{н}}\alpha_3, \tag{5.196}$$

где $\sigma_{\text{н}}$, $\tau_{1\text{н}}$ и $\tau_{2\text{н}}$ — номинальные напряжения, вычисленные для данного случая на основании известных формул сопротивления материалов; α_1, α_2, α_3 — геометрические части коэффициентов, зависящие от формы элемента конструкции и типа напряженного состояния.

Коэффициенты K_{I}, K_{II} и K_{III} вычисляем, обобщая на случай задач теории трещин интерполяционный метод Нейбера. При этом рассматриваем два граничных случая:

а) неограниченное тело с трещиной заданной конфигурации b, когда $\infty \to \Lambda(a \to \infty)$, а коэффициенты определяются формулами

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} = \sigma_{\text{н}}^{(0)}\alpha_1^{(0)}, \quad K_{\mathrm{II}}^{(0)} = \tau_{1\text{н}}^{(0)}\alpha_2^{(0)}, \quad K_{\mathrm{III}} = \tau_{2\text{н}}^{(0)}\alpha_3^{(0)}; \tag{5.197}$$

б) тело конфигурации a с трещиной, размер которой приближается к размеру поперечного сечения тела ($\Lambda \to 1$), а коэффициенты $K_{\mathrm{I}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{II}}^{(1)}$ и $K_{\mathrm{III}}^{(1)}$ вычисляются по формулам

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} = \sigma_{\text{н}}^{(1)}\alpha_1^{(1)}, \quad K_{\mathrm{II}}^{(1)} = \tau_{1\text{н}}^{(1)}\alpha_2^{(1)}, \quad K_{\mathrm{III}}^{(1)} = \tau_{2\text{н}}^{(1)}\alpha_3^{(1)}. \tag{5.198}$$

Аналогично Нейберу геометрические части величин K_{I}, K_{II} и K_{III} для произвольного значения параметра Λ определяем так:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1^{(0)}\alpha_1^{(1)}}{\sqrt{(\alpha_1^{(0)})^2 + (\alpha_1^{(1)})^2}}; \qquad \alpha_2 = \frac{\alpha_2^{(0)}\alpha_2^{(1)}}{\sqrt{(\alpha_2^{(0)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2}};$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_3^{(0)}\alpha_3^{(1)}}{\sqrt{(\alpha_3^{(0)})^2 + (\alpha_3^{(1)})^2}}. \tag{5.199}$$

При этом номинальные напряжения $\sigma_{\text{н}}$ и $\tau_{l\text{н}}$ ($l = 1, 2$) вычисляются по интерполяционным формулам

$$\begin{gathered} \sigma_{\text{н}}^m = (\sigma_{\text{н}}^{(0)})^m + (\sigma_{\text{н}}^{(1)})^m - (\sigma_{\text{н}}^{(1)})_{\Lambda=0}^m, \\ \tau_{1\text{н}}^m = (\tau_{1\text{н}}^{(0)})^m + (\tau_{1\text{н}}^{(1)})^m - (\tau_{1\text{н}}^{(1)})_{\Lambda=0}^m, \\ \tau_{2\text{н}}^m = (\tau_{2\text{н}}^{(0)})^m + (\tau_{2\text{н}}^{(1)})^m - (\tau_{2\text{н}}^{(1)})_{\Lambda=0}^m. \end{gathered} \tag{5.200}$$

Наилучшее приближение, как показывают экспериментальные данные, при $m = 0{,}5$.

Таким образом, если известны величины $\alpha_1^{(l)}$, $\alpha_2^{(l)}$, $\alpha_3^{(l)}$, $\sigma_н^{(l)}$ и $\tau_{/н}^{(l)}$ для соответствующих граничных случаев, то решение задачи дается формулами (5.196), (5.199) и (5.200).

Апробация метода. 1. Рассмотрим неограниченную пластину (рис. 5.19, *а*), растягиваемую в неограниченно удаленных точках равномерно распределенными усилиями интенсивностью σ, которая ослаблена периодической системой прямолинейных трещин длиной $2l$, расположенных вдоль прямой под углом θ к направлению действия внешних усилий на расстоянии $2(h - l)$ одна от другой. Задача определения коэффициентов K_I, K_{II} будет однопараметрической с параметром $\Lambda = lh^{-1} < 1$. Решаем ее на основании предложенного выше приближенного подхода. Для этого исследуем граничные случаи такой задачи при $\Lambda \to 0$ и $\Lambda \to 1$. Случай $\Lambda \to 0$ соответствует задаче о растяжении усилиями σ неограниченной пластины с прямолинейной трещиной длиной $2l$, расположенной под углом θ к направлению действия усилий σ (рис. 5.19, *б*). Используя результаты работы [11], а также соотношения (5.197), для вычисления значений $\sigma_н^{(0)}$, $\tau_{1н}^{(0)}$, $\alpha_1^{(0)}$ и $\alpha_2^{(0)}$ получаем

$$\sigma_н^{(0)} = \sigma \sin^2\theta; \qquad \tau_н^{(0)} = \sigma \sin\theta\cos\theta; \qquad \alpha_1^{(0)} = \alpha_2^{(0)} = \sqrt{\pi l}. \tag{5.201}$$

Случай $\Lambda \to 1$ соответствует задаче о растяжении внешними усилиями с модулем главного вектора $P = 2\sigma h$ неограниченной пластины, состоящей из двух полуплоскостей, которые соединены по перешейку длиной $2(h - l)$ (рис. 5.19, *в*). При этом считается, что линия трещины направлена под углом θ к направлению действия главного вектора $\mathbf{P}$ внешних усилий. На основании результатов работы [11], а также соотношений (5.198) получим

$$\sigma_н^{(1)} = \sigma(1-\Lambda)^{-1}\sin^2\theta; \qquad \tau_н^{(1)} = \sigma(1-\Lambda)^{-1}\sin\theta\cos\theta;$$
$$\alpha_1^{(1)} = 2\pi^{-1/2}\sqrt{h-l}; \qquad \alpha_2^{(1)} = 2\pi^{-1/2}\sqrt{h-l}. \tag{5.202}$$

Используя соотношения (5.196), (5.199), (5.202) и производя необходимые преобразования, находим

$$K_I = \sigma\sqrt{l}\sin^2\theta f_1(\Lambda), \quad K_{II} = \sigma\sqrt{l}\sin\theta\cos\theta f_1(\Lambda), \tag{5.203}$$

где

$$f_1(\Lambda) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-\Lambda)[4+(\pi^2-4)\Lambda]}}. \tag{5.204}$$

Найденное соотношение (5.204) определяет приближенно функцию $f_1(\Lambda)$. Точное выражение для этой функции получено в работе [12]:

$$f_1(\Lambda) = \sqrt{2\Lambda^{-1}\operatorname{tg}(2^{-1}\pi\Lambda)}. \tag{5.205}$$

На рис. 5.20 графически изображены зависимости, построенные по формулам (5.204) (кривая *1*) и (5.205) (кривая *2*). Расхождение значений, вычисленных по этим формулам, не превышает 5 %. Это подтверждает эффективность данного метода и достаточную точность полученных с его помощью результатов.

2. Рассмотрим прямоугольную пластину размером $2c \times 2b$, которая ослаблена центральной трещиной длиной $2a$ и подвергнута растяжению

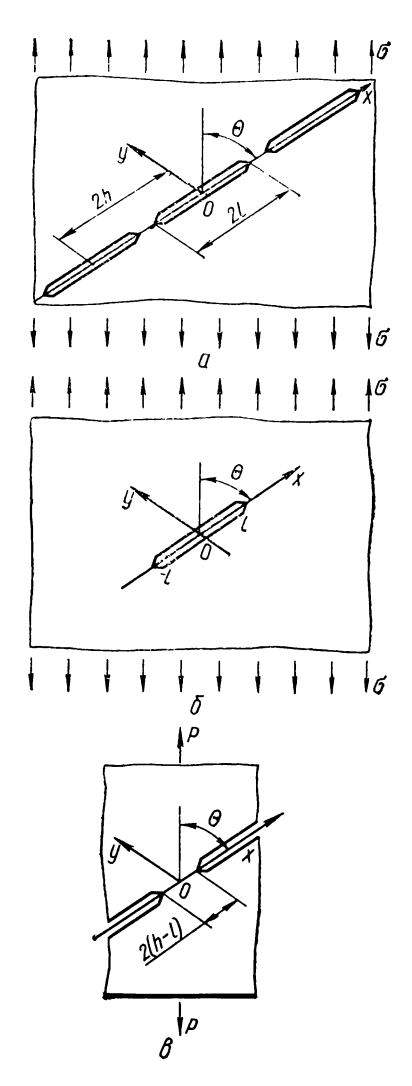


Рис. 5.19. Силовая схема растяжения неограниченной пластины с периодической системой прямолинейных трещин (*а*) и ее граничные случаи одна трещина (*б*) и две полубесконечные трещины (*в*).

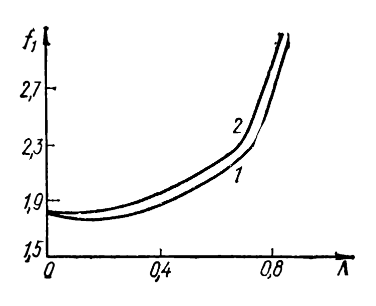


Рис. 5.20. Графическая зависимость $f_1(\Lambda)$:

1 — приближенная; *2* — точная.

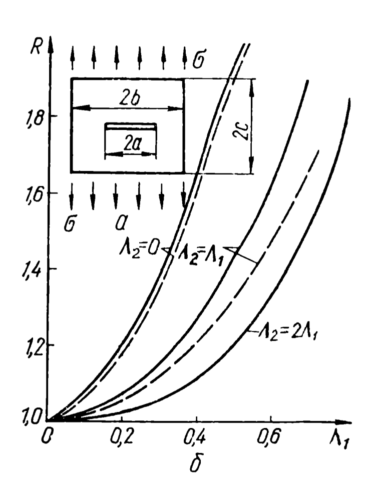


Рис. 5.21. Схема нагружения прямоугольной пластины, ослабленной трещиной (*а*), и зависимость коэффициента интенсивности напряжений от размера трещины (*б*).

внешними равномерно распределенными усилиями σ (рис. 5.21, *а*). Необходимо определить величину K_I ($K_{II} = 0$)

Представим коэффициент K_I согласно формуле (5.191) в следующем виде:

$$K_I = \sigma \sqrt{a\pi^{-1}}\,\Omega(\Lambda_1, \Lambda_2) \quad (\Lambda_1 = ab^{-1},\ \Lambda_2 = ac^{-1}). \tag{5.206}$$

На основании предложенного здесь подхода, а также соотношений (5.195) коэффициент K_I можно вычислить приближенно из такого равенства:

$$K_I = \sigma \sqrt{a\pi^{-1}}\,[\Omega(\Lambda_1, 0) + \Omega(0, \Lambda_2) - 1]. \tag{5.207}$$

Здесь $\Omega(\Lambda_1, 0)$, $\Omega(0, \Lambda_2)$ — безразмерные функции, определяемые из задач о предельном равновесии полосы неограниченной длины и конечной ширины, ослабленной трещиной, соответственно параллельной и перпендикулярной ее кромкам.

Используя результаты работы [6] и вычисляя значения $\Omega(\Lambda_1, 0)$, $\Omega(0, \Lambda_2)$, на основании формулы (5.207) приближенно определяем коэффициент K_I. По этим данным на рис. 5.21, *б* построены графики (сплошные линии) изменения величины $R = K_I\sigma^{-1}(2\pi a)^{-1/2}$ в зависимости от Λ_1 и Λ_2. Штриховыми линиями представлены аналогичные зависимости, полученные на основании точного решения этой задачи [13]. Из сравнения этих графиков следует, что ошибка приближенного решения не превышает 14 % при $0 \leqslant \Lambda \leqslant 0{,}7$.

Нелинейные задачи теории трещин. Кроме характеристик K_I, K_{II}, K_{III} для практической реализации критериев механики разрушения (см. гл. 3) необходимо знать величины δ_I, δ_{II}, δ_{III}, определение которых затруднено в связи с необходимостью решения соответствующих упругопластических задач. Для их преодоления предложены расчетные модели, с помощью которых решение упругопластических задач для тел с трещинами сводится к соответствующим граничным задачам теории упругости. Так, в δ_K-модели пластическая зона длины d_1 на продолжении трещины, содержащейся в тонкой пластине (см. рис. 3.13), моделируется трещиной отрыва, на берегах которой действуют нормальные напряжения σ_0, определяющие пластические свойства материала. Если материал пластины упругопластический без упрочнения, то $\sigma_0 = \sigma_{0,2}$. В случае упрочняющегося материала величина σ_0 определяется соотношением (3.17). В рамках такого моделирования реального материала сформулируем интерполяционный метод приближенного определения раскрытия трещины в ее тупиковой части δ_1.

Формулировка метода. Рассмотрим упругопластическое тело шириной $2L$ с трещиной длины $2l$ (рис. 5.22), на продолжении которой возникает пластическая зона протяженностью $d_1 = L - l$. Введем безразмерный параметр $\Lambda = d_1/(L - l)$, характеризующий пластическую заполненность рабочего сечения тела. Возможны два граничных случая. Если $\Lambda \to 0$, то $d_1 \ll (L - l)$, и в рабочем сечении тела реализуется квазихрупкое разрушение, а раскрытие вершины трещины δ_0 определяется формулой

$$\delta_0 = K_I^2/\sigma_0 E. \tag{5.208}$$

Если $\Lambda \to 1$, то при наличии в перешейке трещины значительной пластичности формула (5.208) уже некорректна и раскрытие δ_1 ищем следующим образом.

Для трещины произвольной длины $\Lambda = l/L$ $(0 < \Lambda < 1)$ строим интерполяционную формулу

$$\frac{1}{\delta_1^n} = \frac{1}{\delta_{11}^n} + \frac{1}{\delta_{01}^n} - \frac{1}{\delta_{11}^n}\bigg|_{\Lambda=0}, \tag{5.209}$$

где δ_{11} — раскрытие трещины большого размера $(\Lambda \to 1)$; δ_{01} — раскрытие малой трещины $(\Lambda \to 0)$. Равенство (5.209) выполняется в точности для обоих граничных случаев $\Lambda \to 0$ и $\Lambda \to 1$ при произвольном значении параметра интерполяции n, которое выбираем, сравнивая величину δ_1, вычисленную по формуле (5.209) для среднего участка промежутка $\Lambda < 1$, с полученной экспериментально для какой-либо длины трещины Λ или конкретных силовых схем. Наилучшее совпадение результатов обеспечивается при $n = 2$. Параметры раскрытия в вершине трещины бесконечных тел с малыми и большими трещинами δ_{i1} $(i = 0, 1)$ для ряда конкретных задач известны, задача отыскания δ_1 сводится к простым алгебраическим вычислениям.

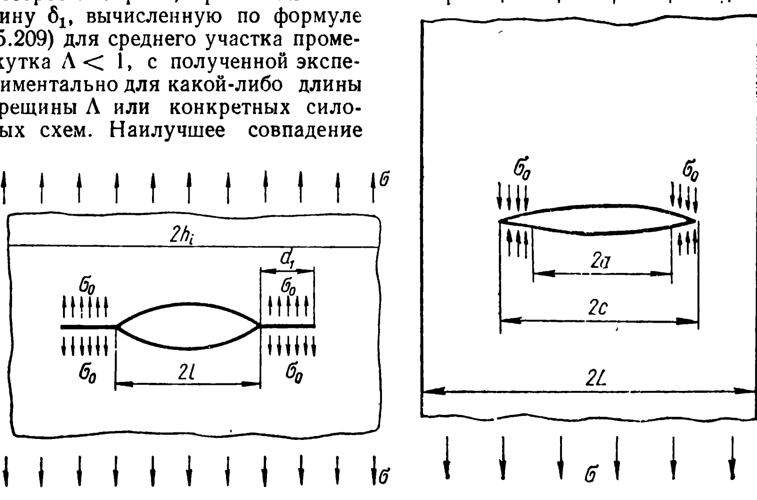


Рис. 5.22. Схема упругопластического тела с трещиной.

Рис. 5.23. Схема растяжения полосы с центральной трещиной.

Зная характеристики δ_0 и δ_1, раскрытие трещины δ_1 для тела конечных размеров с произвольной трещиной и пластической зоной определяем из интерполяционного соотношения

$$\frac{1}{\delta_1^m} = \frac{1}{\delta_0^m} - \frac{1}{\delta_0^m}\bigg|_{\eta=\eta^*} + \frac{1}{\delta_1^m}, \tag{5.210}$$

где $\eta = \sigma/\sigma_0$; σ — интенсивность приложенных усилий. При $\Lambda > 0$ раскрытие δ_1 сохраняет конечное значение, и каждой длине трещины соответствует условие полного течения перешейка трещины $\eta = \eta^*$. Как показало сравнение с численными результатами [12], наилучшее приближение обеспечивается при $m = 2$.

С помощью предложенного интерполяционного подхода вычислено раскрытие трещины в ее вершине для ряда встречающихся силовых схем при наличии в перешейке трещины произвольной пластической зоны,

Апробация метода. 1. Найдем раскрытие трещины δ_I в бесконечной полосе шириной $2L$ с трещиной длины $2l$ (рис. 5.23), растягиваемой на бесконечности усилиями интенсивности σ. Возле вершины трещины возникают полосы пластичности длиной $d_1 = c - l$.

В результате определения граничных случаев задачи установлено, что

$$\delta_0 = \sigma^2 L F^2(\Lambda)/\sigma_0 E, \qquad (5.211)$$

где $F(\Lambda) = 1{,}7725\sqrt{\Lambda}/\sqrt{(1-\Lambda)(1+1{,}4673\Lambda)}$;

$$\delta_{01} = (8\sigma_0 l)/(\pi E)\ln(L/l); \qquad (5.212)$$

$$\delta_{11} = 5{,}5452(1-\Lambda)L\sigma_0/(\pi E). \qquad (5.213)$$

Разделим выражения (5.211)—(5.213) на одинаковый множитель $4L\sigma_0/\pi E$. Подстановка соотношений (5.212), (5.213) в интерполяционное соотношение (5.209) дает

$$\delta_I^* = [3{,}8437\Lambda(1-\Lambda)\ln 1/\Lambda]/[7{,}6872(2\Lambda-\Lambda^2)\Lambda^2\ln^2 1/\Lambda + 3{,}6933(1-\Lambda^2)]^{1/2}, \qquad (5.214)$$

где $\delta_I^* = \delta_I\pi E/4L\sigma_0$. На рис. 5.24 представлена графическая зависимость δ_I^* от η для ряда значений относительной длины трещины Λ. Здесь же для сопоставления – приведена аналогичная зависимость (штриховая линия), полученная методом конечных элементов [14]. Хорошая корреляция обеих зависимостей подтверждает корректность интерполяционного показателя степени $n = 2$.

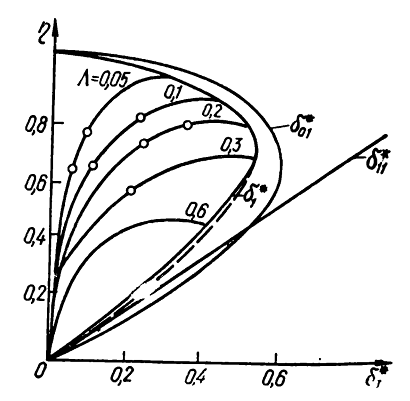


Рис. 5.24. Зависимость раскрытия центральной трещины от параметра нагрузки полосы.

Разделив величину δ_0, определяемую по выражению (5.211), на множитель $4L\sigma_0/(\pi E)$, получим

$$\delta_0^* = 0{,}7854\eta^2 F^2(\Lambda). \qquad (5.215)$$

Раскрытие трещины в ее тупиковой части для рассматриваемой силовой схемы, рассчитанное по формулам (5.210), (5.214) и (5.215), в общем случае таково

$$\delta_I = \frac{3{,}0188\Lambda\eta^2(1-\Lambda)^3F^4(\Lambda)\ln(1/\Lambda)L\sigma_0}{[7{,}6872(2-\Lambda)\Lambda^3\ln^2 1/\Lambda + 3{,}6933(1-\Lambda^2)]^{1/2}E} \times$$

$$\times\left\{\frac{9{,}1134F^4(\Lambda)\Lambda^2(1-\Lambda)^2\ln^2(1/\Lambda)[(1-\Lambda)^4-\eta^4]}{7{,}6872(2-\Lambda)\Lambda^3\ln^2 1/\Lambda + 3{,}6933(1-\Lambda)^2} + \right.$$

$$\left. + 0{,}3804\eta^4(1-\Lambda)^4F^8(\Lambda)\right\}^{-1/2}. \qquad (5.216)$$

Безразмерная часть раскрытия трещины

$$\delta^* = [\pi E/(4L\sigma_0)]\, \delta,$$

где δ может быть δ_1, δ_0 и др., подсчитана на ЭВМ для ряда значений параметров η, Λ (рис. 5.24, сплошные линии) Обнаружена хорошая корреляция между приведенными результатами и установленными численным методом (точки на рис. 5.24).

2. Бесконечная полоса ширины $2L$, ослабленная двумя боковыми трещинами с перешейком $2a$ (рис. 5.25), растягивается на бесконечности уси-

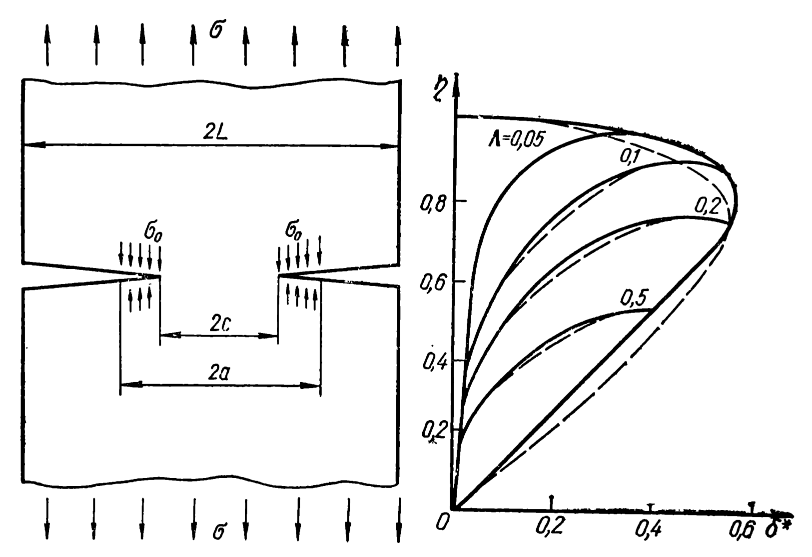


Рис. 5.25. Схема растяжения полосы с боковыми трещинами.

Рис. 5.26 Зависимость раскрытия краевой трещины от параметра нагрузки полосы.

лиями интенсивности σ. Около вершин трещин возникают полосы пластичности длины $d_1 = a - c$. Определим раскрытие между берегами трещины в ее тупиковой части.

Если длина полос пластичности стремится к нулю ($\zeta = (a - c)\, a^{-1} \to 0$), т. е. материал квазихрупкий, раскрытие трещины оценивается по формуле (5.208), что эквивалентно вычислению коэффициента K_I. Коэффициент K_I находится методом граничной интерполяции. Указанная силовая схема соответствует случаю однопараметрической задачи и, согласно [3], коэффициент K_I равен

$$K_I = \sigma \sqrt{L} F(\Lambda), \tag{5.217}$$

где $F(\Lambda) = 1{,}9851 \sqrt{\Lambda}/[(1 - \Lambda)(1 + 2{,}0948\Lambda)]^{1/2}$. Следовательно,

$$\delta_0 = \sigma^2 L F^2(\Lambda)/(\sigma_0 E). \tag{5.218}$$

Зависимость (5.218) описывает раскрытие трещины при малой пластической зоне ($\eta \to 0$).

Для определения величины δ_1 необходимо располагать значениями δ_{01} и δ_{11}.

В случае малых трещин при обширной пластической зоне [15]

$$\delta_{01} = [4\sigma_0 L/(\pi E)]\,(-1{,}617\Lambda + 1{,}8133\Lambda^2 - 3{,}3615\Lambda \ln \Lambda). \quad (5.219)$$

Если трещины большие ($\Lambda \to 0$), параметр δ_{11} вычисляется из задачи о растяжении плоскости с двумя полубесконечными трещинами вне перешейка $2a$ [16]:

$$\delta_{11} = [4\sigma_0 L/(\pi E)] \ln 4\,(1 - \Lambda). \quad (5.220)$$

Подстановка формул (5.219) и (5.220) в интерполяционное соотношение (5.209) дает раскрытие трещины, когда пластическая зона занимает весь перешеек:

$$\delta_1^* = [\pi E/(4\sigma_0 L)]\,\delta_1. \quad (5.221)$$

Если подставить выражения (5.218) и (5.221) в соотношение (5.210), получается раскрытие δ_1 в вершине трещины при произвольных параметрах Λ и η (из-за громоздкости формулы для δ_1^* и δ_1^* здесь не выписываются). Сопоставление результатов, полученных предложенным методом и методом конечных элементов [14], показало хорошую корреляцию между ними (рис. 5.26, соответственно сплошные и штриховые линии).

Рассмотренные примеры свидетельствуют об эффективности и правомерности предложенных интерполяционных подходов к определению коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытия трещины δ_1 в ее вершине для тел конечных размеров.

ГЛАВА 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Часто вблизи неоднородностей в теле динамические напряжения превышают соответствующие статические. Это происходит в том случае, когда распространяющееся механическое возмущение встречает полость. Такой «выброс» динамического напряжения особенно четко выражен при наличии полости, которая содержит острый угол. В случае трещины интенсивность поля напряжений в окрестности ее конца может очень существенно изменяться под воздействием динамических нагрузок. Ввиду такого «динамического» усиления нагрузки возможны случаи, когда при постепенном приложении некоторой системы нагрузок не происходит разрушения тела с трещиной, а при внезапном (динамическом) приложении той же системы нагрузок трещина будет распространяться. Влияние динамических эффектов на поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины становится существенным также при очень быстром ее распространении. Примерами значительных динамических эффектов, порожденных явлением разрушения, служат землетрясения, хрупкое разрушение стекла, которое часто носит взрывной характер.

Необходимость учета инерционных эффектов при расчете конструкций и сооружений с трещинами приводит к рассмотрению следующих основных задач динамической механики разрушения.

1. Определение зависимости коэффициентов интенсивности напряжений (или других характеристик) от времени для неподвижной трещины под действием импульсных нагрузок.

2. Определение зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от частоты гармонической нагрузки, действующей на тело с неподвижной трещиной.

3. Определение зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от времени и скорости распространения трещины.

Решение динамических задач механики разрушения в силу их чрезвычайной сложности стало возможным только в последнее время, благодаря развитию вычислительной техники. При решении поставленных выше задач применяются как численные, так и аналитические методы в сочетании (в некоторых случаях) с результатами соответствующих экспериментов. Аналитические методы применяются, как правило, для плоских конструкций (бесконечная плоскость с полубесконечной или конечной трещиной, полоса с полубесконечной или конечной трещиной, а также пространство с круговой в плане трещиной). Аналитические решения задач динамической механики разрушения в случае трещин нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов позволяют сделать важнейшие качественные выводы о процессах, предшествующих хрупкому разрушению при динамическом нагружении, и о распространении фронта разрушения.

В то же время при решении конкретных динамических задач механики

разрушения, выдвигаемых практикой, возникает необходимость определения коэффициентов интенсивности напряжений в телах конечных размеров с трещинами. Как правило, для этого привлекаются различные численные методы и строятся численные алгоритмы решения указанных выше задач.

При численном решении второго типа задач в случае тела конечных размеров коэффициенты интенсивности напряжений определяются при помощи форм и частот свободных колебаний, которые сильно зависят от конфигурации и длины дефекта. В связи с этим можно считать, что к динамической механике разрушения относятся исследования влияния трещин на формы и частоты свободных колебаний (такие исследования важны и для диагностики дефектов неразрушающими методами контроля). К динамической механике разрушения относятся также разнообразные задачи ветвления и определение траекторий движущихся трещин, которые здесь не рассматриваются.

Наиболее существенные результаты в динамической механике разрушения получены в рамках линеаризованной теории, в которой предполагается, что зона проявления нелинейных эффектов мала по сравнению с длиной трещины, а поле напряжений вокруг пластической области описывается асимптотическими формулами, полученными из решения линейной теории упругости. Это поле напряжений сингулярно, главный член его разложения по степеням расстояния от конца трещин r, как и в статике, имеет вид $K_{Iд}/\sqrt{r}$. Угловое распределение напряжений и перемещений в окрестности вершины стационарной трещины одинаково при статическом и динамическом нагружениях, а влияние инерционного эффекта заключается в том, что коэффициент интенсивности напряжений становится зависящим от времени. Кроме того, спустя некоторый период времени после приложения нагрузки характер зависимости коэффициентов интенсивности напряжений и импульсных нагрузок от времени идентичен. Однако в течение этого периода времени коэффициент интенсивности напряжений достигает своего пикового значения, иногда значительно превышающего статическое (аналогичный вывод можно сделать и в случае гармонического нагружения тела с трещиной).

Для решения указанных выше задач применяются различные математические методы: интегральные преобразования Фурье (для плоских задач), Ханкеля (для осесимметрических задач) и Лапласа (для ударных нагрузок); аппарат дуальных интегральных уравнений и интегральных уравнений Фредгольма второго рода; сингулярные интегральные уравнения типа Коши первого и второго родов; метод Шмидта.

Ниже при помощи указанных методов рассматриваются задачи дифракции упругих волн на трещинах при различных видах нагрузки и геометрии [1—29].

6.1. Метод Винера—Хопфа в задачах дифракции упругих волн на трещинах

При помощи метода Винера — Хопфа исследуем проблему дифракции упругих волн на полубесконечном прямолинейном разрезе, свободном от внешних нагрузок * [3—5]. Сначала решим задачу для стационарного

* В случае плоской деформации стационарная задача рассмотрена в [4], а в случае продольного сдвига решение этой задачи (точнее, математически эквивалентной ей оптической задачи о дифракции волны на экране) было получено Зоммерфельдом [5]. Однако решение [4] не имеет физического смысла, так как при $r \to 0$ оно в смещениях имеет особенность $r^{-3/2}$.

(гармонические нагрузки) случая, используя затем это решение для решения задачи при ударных нагрузках.

Уравнения плоской теории упругости имеют вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \tag{6.1}$$

Здесь $\Phi(x, y, t)$ и $\Psi(x, y, t)$ — потенциалы продольной и поперечной волн соответственно.

Для решения задачи будем пользоваться следующими соотношениями теории упругости:

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{yy} = \frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}, \tag{6.2}$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{xy} = \frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Так как мы рассматриваем стационарный волновой процесс в плоскости xy (т. е. считаем, что зависимость от времени всех переменных физических величин выражается множителем $e^{-i\omega t}$, где ω — частота), то уравнения (6.1) перепишутся в виде

$$\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_2^2\Psi = 0, \tag{6.3}$$

где k_1 и k_2 — волновые числа.

Пусть монохроматическая волна сжатия или растяжения с максимальным напряжением σ падает на полубесконечный разрез вдоль отрицательной полуоси x под прямым углом (рис. 6.1). Для простоты выкладок задачу считаем симметричной относительно оси Ox. Упругие потенциалы падающей волны записываются в виде

$$\Phi_0 = \frac{\sigma_1}{Gk_2^2}e^{ik_2 y}, \quad \Psi_0 = 0 \quad (y = 0). \tag{6.4}$$

При нулевых начальных условиях граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) \quad (x < 0),$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (x > 0). \tag{6.5}$$

Кроме начальных и граничных условий (6.5) решение уравнений (6.3) должно еще удовлетворять условиям на «ребре» и Зоммерфельда.

Используя метод интегральных преобразований, получаем следующее решение уравнения (6.3):

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 + \Phi_1(x, y),$$

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(k_2^2 - 2\xi^2)R(\xi)\exp\left[i\left(\xi x + \sqrt{k_1^2 - \xi^2}\,y\right)\right]d\xi, \tag{6.6}$$

$$\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \sqrt{k_1^2 - \xi^2} R(\xi) \exp[i(\xi x + \sqrt{k_2^2 - \xi^2} y)]\, d\xi.$$

Здесь $R(\xi)$ — искомая функция; функция $\sqrt{k^2 - \xi^2}$ аналитична в комплексной плоскости ξ с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -k)$ и (k, ∞). Подразумевается, что ветвь этой функции действительна и положительна при $-k < \xi < k$, т. е. положительно мни-

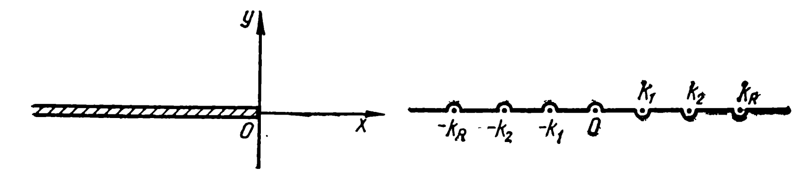


Рис. 6.1. Схема плоскости с полубесконечной трещиной.

Рис. 6.2. Контур интегрирования плоскости с прямолинейной трещиной.

мая на верхнем берегу левого и на нижнем берегу правого разрезов. Контур интегрирования в выражении (6.6) показан на рис. 6.2.

Уравнения (6.6) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6.3), условиям излучения Зоммерфельда и граничному условию $\tau_{x,y}(x, 0) = 0$.

Используя уравнения (6.2) и (6.6), можно записать

$$\frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) A(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \qquad u_y(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) B(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

где $A(\xi) = \frac{(2\xi^2 - k_2^2)^2}{4} + \xi^2 \sqrt{(k_1^2 - \xi^2)(k_2^2 - \xi^2)}$; $B(\xi) = -\frac{i}{2} k_2^2 \times \times \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$. Отсюда, используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} A(\xi) R(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(x, 0)}{2G} e^{-i\xi x} d\xi = W^+(\xi) + W^-(\xi), \\ B(\xi) R(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_y(x, 0) e^{-i\xi x} d\xi = V^+(\xi) + V^-(\xi), \end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$W^+(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sigma_{yy}(x, 0)}{2G} e^{-i\xi x} d\xi; \qquad W^-(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(x, 0)}{2G} \times$$

$$\times e^{-i\xi x} d\xi; \qquad V^+(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} u_y(x, 0) e^{-i\xi x} d\xi;$$

$$V^{-}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} u_y(x, 0)\, e^{-i\xi x} d\xi.$$

Искомые функции $W^{-}(\xi)$ и $W^{+}(\xi)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскостях комплексной переменной ξ. Граница, разделяющая эти полуплоскости, проходит так, как показано на рис. 6.2 (в частности, точки $\xi = 0$, $\xi = -k_1$ и $\xi = -k_2$ принадлежат нижней полуплоскости, а точки $\xi = k_1$ и $\xi = k_2$ — верхней).

Оставшиеся неудовлетворенными граничные условия (6.5) запишем в виде

$$\frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{\sigma}{2G} \; (x < 0), \quad u_y(x, 0) = -i \frac{k_1 \sigma}{G k_2} \; (x > 0). \tag{6.8}$$

Подставляя эти значения в $W^{+}(\xi)$ и $V^{-}(\xi)$, находим

$$W^{+}(\xi) = -\frac{i\sigma}{4\pi G \xi}, \quad V^{-}(\xi) = \frac{i k_1 \sigma}{2\pi G k_2^2 \xi^2}. \tag{6.9}$$

При вычислении бралась конечая часть расходящегося интеграла, как это обычно делается в теории волн [2].

Подставляя найденные функции в соотношения (6.7), исключая из них $R(\xi)$ и обозначая через $F(\xi)$ функцию

$$F(\xi) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left[\xi^2 + \frac{2(\xi^2 - k_2^2)^2}{4\sqrt{(k_1^2 - \xi^2)(k_2^2 - \xi^2)}} \right],$$

приходим к следующей краевой задаче Римана:

$$\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}\, F(\xi)\, V^{+}(\xi) - W^{-}(\xi) = -\frac{i\sigma}{4\pi G \xi} + \frac{k_1 \sigma}{2\pi G k_2^2 \xi^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}\, F(\xi). \tag{6.10}$$

Функции $F(\xi)$ и $\sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ представим в виде произведений

$$F(\xi) = F^{+}(\xi)\, F^{-}(\xi), \quad \sqrt{k_2^2 - \xi^2} = \sqrt{k_2 + \xi}\, \sqrt{k_2 - \xi}. \tag{6.11}$$

Здесь $F_1^{+}(\xi)$ и $F_2^{-}(\xi)$ —функции аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях ξ. Согласно выбору ветви функции $\sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ и контура, разделяющего верхнюю и нижнюю полуплоскости ξ (см. рис. 6.2), $\sqrt{k_2 + \xi}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0$, $-k_2 > \xi > -\infty$), а $\sqrt{k_2 - \xi}$ — в нижней (разрез вдоль $y = 0$, $\infty > \xi > k_2$).

С использованием формулы [4]

$$F^{\pm}(\xi) = \frac{k_R \pm \xi}{k_2 \pm \xi} \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \operatorname{arctg} \frac{(2z^2 - k_2^2)^2}{4z^2 \sqrt{(z^2 - k_1^2)(z^2 - k_2^2)}} \frac{d\xi}{z - \xi}\right], \tag{6.12}$$

где $k_R = \omega/c_R$, и с учетом соотношений (6.11) и (6.12) уравнение (6.10) запишется в виде

$$\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\sqrt{k_2+\xi}\,F^+(\xi)\left[iV^+(\xi)-\frac{k_1\sigma}{2\pi Gk_2^2\xi}\right]=\frac{W^-(\xi)}{F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}}-$$

$$-\frac{i\sigma}{F^-(\xi)\,4\pi G\xi\sqrt{k_2-\xi}}.$$

Так как второй член в правой части этого уравнения имеет полюс $\xi = 0$, а точка $\xi=0$, согласно рис. 6.2, принадлежит нижней полуплоскости, то преобразуем этот член следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi G\xi F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}}=\frac{1}{4\pi G\xi F^-(0)\sqrt{k_2}}+$$

$$+\frac{F^-(0)\sqrt{k_2}-F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}}{4\pi G\xi F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}\,F^-(0)\sqrt{k_2}}.$$

Здесь значение функции $F^-(\xi)$ в точке $\xi = 0$ определяется выражением

$$F^-(0)=F^+(0)=\frac{c_1\sqrt{c_1}}{\sqrt{2c_2(c_1^2-c_2^2)}}.$$

Учитывая это преобразование, уравнение Винера — Хопфа можно записать в такой форме:

$$\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\sqrt{k_2+\xi}\,F^+(\xi)\left[iV^+(\xi)-\frac{k_1\sigma}{2\pi Gk_2^2\xi}\right]+$$

$$+\frac{i\sigma}{4\pi G\xi F^-(0)\sqrt{k_2}}=\frac{W^-(\xi)}{F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}}-$$

$$-\frac{i\sigma\left[F^-(0)\sqrt{k_2}-F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}\right]}{4\pi G\xi F^-(\xi)\sqrt{k_2-\xi}\,F^-(0)\sqrt{k_2}}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости ξ, а правая — аналитическую в нижней полуплоскости ξ. Согласно принципу непрерывного продолжения левая и правая части этого уравнения — аналитическое продолжение друг друга. Для выяснения поведения определенной таким образом функции в бесконечно удаленной точке воспользуемся следующим соотношением [2]: если при $-1 < \delta < 0$

$$\sigma(x) = Ax^{\delta}\begin{pmatrix} x\to+0 \\ x\to\infty \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

то

$$W(\xi) = A\Gamma(\delta+1)\,\xi^{-\delta-1}\begin{pmatrix} \xi\to\infty \\ \xi\to 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $W(\xi)=\int\limits_0^\infty \sigma(x)\,e^{-i\xi x}dx$; $\Gamma(\delta+1)$ — гамма-функция. В этих формулах нужно брать либо верхние, либо нижние предельные переходы.

Согласно условиям на ребре и соотношению (6.13) аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости ξ. Таким образом, получаем

$$V^{+}(\xi) = \frac{k_1\sigma}{2\pi G k_2^2 i\xi} - \frac{\sigma}{4\pi G F^{-}(0)\sqrt{k_2}\,(1-k_1^2/k_2^2)\,\xi\sqrt{k_2+\xi}\,F^{+}(\xi)};$$

$$W^{-}(\xi) = \frac{i\sigma}{4\pi G\xi}\left[1 - \frac{F^{-}(\xi)\sqrt{k_2-\xi}}{F^{-}(0)\sqrt{k_2}}\right].$$

При помощи преобразования Фурье определяем напряжение на продолжении разреза и смещение его берегов, соответствующих исходной задаче:

$$\left.\begin{aligned} u_y(x,0) &= -\frac{ik_1\sigma}{Gk_2^2}x - \frac{\sigma}{4\pi G\sqrt{k_2}\,F^{-}(0)\,(1-k_1^2/k_2^2)}\times\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}d\xi}{\xi\sqrt{k_2+\xi}\,F^{+}(\xi)};\\ \sigma_{yy}(x,0) &= \sigma - \frac{i\sigma}{2\pi F^{-}(0)\sqrt{k_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi}\sqrt{k_2-\xi}\,F^{-}(\xi)\,e^{i\xi x}d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Теперь определим коэффициент интенсивности напряжений $K_{\text{Iд}}$, представляющий наибольший интерес для приложений. При $\xi \to \infty$

$$W^{-}(\xi) = \frac{\sigma}{4\pi G F^{-}(0)\sqrt{k_2}}\,\xi^{-1/2},$$

а при $x \to +0$ $\sigma_{yy} = K_{\text{Iд}}/\sqrt{2\pi x}$, отсюда с учетом опускавшегося ранее экспоненциального множителя

$$K_{\text{Iд}} = (1+i)\,\sigma\,\frac{\sqrt{2c_2(c_1^2-c_2^2)}}{c_1\sqrt{c_1}}\sqrt{\frac{c_2}{\omega}}\,e^{-i\omega t}. \quad (6.15)$$

Эта формула годится не только для полубесконечных разрезов, но также и для конечных трещин при наличии пограничного слоя, т. е. когда $\omega \gg c_1/l$ (l — длина трещины).

Для решения динамических задач о воздействии произвольных ударных (импульсных) нагрузок, например ударных волн, на неподвижные разрезы применим следующий метод. Ударный импульс $\sigma(t)$, действующий на упругое тело, представляет собой «пакет» монохроматических волн, которому соответствует комплексная спектральная функция

$$\bar{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t)\,e^{i\omega t}dt. \quad (6.16)$$

Ширина спектра $\Delta\omega$ и длительность импульса Δt связаны соотношением неопределенностей, аналогичным принципу Гейзенберга в квантовой меха-

нике: $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$. Следовательно, чем более «размазан» импульс $\sigma(t)$, тем более компактен спектр, и наоборот.

Величина $\bar{\sigma}(\omega)\,d\omega/\sqrt{2\pi}$ представляет собой амплитуду монохроматической волны $\exp(-i\omega t)$ в этом «пакете». Она также создает коэффициент интенсивности напряжений $\bar{K}_{I\text{д}}(\omega)\,d\omega \exp(i\omega t)$ на фронте трещины. При этом коэффициент $\bar{K}_{I\text{д}}(\omega)$, соответствующий монохроматической волне с частотой ω, определяется из решения задачи об установившихся колебаниях, рассмотренной выше. Отсюда, применяя принцип суперпозиции, находим коэффициент интенсивности напряжений $K_{I\text{д}}(t)$ в вершине трещины при произвольной зависимости нагрузки от времени

$$K_{I\text{д}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_{I\text{д}}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (6.17)$$

Аналогично можно найти и другие величины.

Рассмотрим, например, задачу о воздействии произвольных ударных нагрузок на полубесконечную щель, расположенную вдоль $y = 0$, $x < 0$, используя при этом полученное выше точное решение этой задачи в случае установившихся колебаний. Применяя формулы (6.15) и (6.17), получаем

$$K_{I\text{д}}(t) = (1+i)\,\frac{\sqrt{2c_2(c_1^2 - c_2^2)}}{c_1\sqrt{2\pi c_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{c_2}{\omega}}\; \bar{\sigma}_{yy}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (6.18)$$

В уравнении (6.18) функция $\bar{\sigma}_{yy}(\omega)$ определяется заданным импульсом $\sigma_{yy}(t)$ посредством формулы (6.16), которую можно еще более упростить, если рассматривать конкретный вид импульса напряжений.

Например, пусть импульс напряжений $\sigma_{yy}(t)$ имеет прямоугольную форму

$$\sigma_{yy}(t) = \begin{cases} 0, & (0 > t > t_0), \\ \sigma_0 & (0 < t < t_0), \end{cases}$$

где σ_0 и t_0 — постоянные.

На основании соотношения (6.16) спектральная функция этого импульса запишется в виде

$$\bar{\sigma}_{yy}(\omega) = \frac{\sigma_0}{i\omega\sqrt{2\pi}}\,(e^{i\omega t} - 1).$$

Подставляя это значение в формулу (6.18) и вычисляя интеграл, находим

$$K_{I\text{д}}(t) = \frac{4\sigma_0 c_2}{c_1\sqrt{\pi c_1}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2}\; \operatorname{Re}\left(\sqrt{t} - \sqrt{t - t_0}\right). \qquad (6.19)$$

Следовательно при $t < t_0$ коэффициент интенсивности напряжений прямо пропорционален $\sqrt{t}$, а при $t > t_0$ прямо пропорционален $\sqrt{t} - \sqrt{t - t_0}$.

Рассмотрим случай, когда в бесконечной упругой плоскости, подвергнутой однородному растяжению напряжением σ_0, мгновенно возникает полубесконечный разрез. Это можно рассматривать как частный случай уже рассмотренного при $t_0 \to \infty$. На основании выражения (6.19) получаем

$$K_{I\text{д}}(t) = \frac{4\sigma_0 c_2 \sqrt{t}}{c_1\sqrt{\pi c_1}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2}.$$

Метод Винера — Хопфа можно применять и к решению задач о конечных трещинах, но при этом процесс решения значительно усложняется. В частности, в работе [7] приведено решение задачи о падении наклонной продольной волны на конечную трещину. Это решение корректно от момента прихода волны в вершину трещины в течение периода времени, необходимого отраженной волне для того, чтобы достичь противоположной вершины, отразиться и вновь вернуться, т. е. в течение времени прохождения волной двух трещин (решение «первого порядка»). Для решения динамических задач для конечных трещин более перспективны методы сведения их к интегральным уравнениям Фредгольма и Коши.

6.2. Применение метода дуальных интегральных уравнений для исследования дифракции неустановившихся упругих волн на трещинах конечной длины

Проиллюстрируем применение метода дуальных интегральных уравнений (с последующим их сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода) на примере задачи о взаимодействии неустановившихся упругих волн с конечной трещиной [8].

Рассмотрим упругую неограниченную плоскость, содержащую сквозную линейную трещину, ориентированную, как показано на рис. 6.3. Считается, что к поверхностям трещины мгновенно прикладываются одинаковые нормальные усилия. Для математической простоты функция нагрузки разделяется на пространственную и временную, где пространственная функция четная по x. Симметрия условий дает тогда возможность решения задачи только в верхней полуплоскости. Полученные ниже результаты также применимы и к задаче о внезапном разрушении пластины вследствие удара. Это возможно потому, что случай мгновенного возникновения трещины в предварительно нагруженной плоскости математически эквивалентен задаче о мгновенном приложении усилий к поверхности трещины.

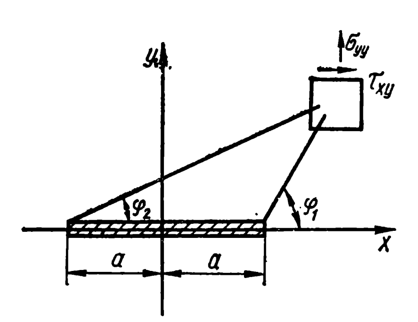


Рис. 6.3. Схема неограниченной плоскости с прямолинейной трещиной.

Для нулевых начальных условий распределение напряжений и смещений вследствие внезапного приложения к берегам трещины нормальных усилий может быть найдено из решения уравнений (6.1) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\sigma q(x) f(t) \quad (|x| < a),$$
$$\tau(x, 0, t) = 0 \quad (|x| < \infty), \qquad (6.20)$$
$$u_y(x, 0, t) = 0 \quad (|x| > a).$$

Из условий Зоммерфельда можно заключить, что дополнительным требованием для перемещений на бесконечности будет

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} [u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)] = 0.$$

Параметр σ — постоянная величина с размерностью напряжения, а $q(x)$ — четная функция.

Для решения системы дифференциальных уравнений (6.1) применим к ним интегральное преобразование Лапласа, которое определяется соотношениями [1]

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau, \quad f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int \bar{f}(p)\, e^{p\tau} dp, \tag{6.21}$$

где второй интеграл рассматривается по контуру Бромвича [1]. С учетом нулевых граничных условий и соотношений (6.21) уравнения (6.1) запишутся

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{p^2}{c_1^2}\bar{\Phi}, \quad \Delta\bar{\Psi} = \frac{p^2}{c_2^2}\bar{\Psi}, \tag{6.22}$$

где p — параметр интегрального преобразования Лапласа. Для сведения этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям применим к ним косинус- и синус-преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^\infty f(x) \cos \xi x dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(\xi) \cos \xi x d\xi,$$

$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^\infty f(x) \sin \xi x dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(\xi) \sin \xi x d\xi.$$

Применение этих преобразований будет зависеть от того, четная или нечетная по x рассматриваемая функция.

Из рассмотрения свойств симметрии граничных условий можем показать, что для этого случая

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(-x, y, t), \quad \Psi(x, y, t) = -\Psi(-x, y, t)$$

и решение можно рассматривать в первом квадранте плоскости xy. Тогда, применяя к первому из уравнений (6.22) косинус-преобразование, а ко второму синус-преобразование Фурье, получаем

$$\frac{d^2\tilde{\bar{\Phi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right)\tilde{\bar{\Phi}} = 0, \quad \frac{d^2\tilde{\bar{\Psi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)\tilde{\bar{\Psi}} = 0.$$

Их решение, удовлетворяющее условию регулярности на бесконечности, выбираем в виде

$$\tilde{\bar{\Phi}} = \frac{\pi}{2} A(\xi, p)\, e^{-\gamma_1 y}, \quad \tilde{\bar{\Psi}} = \frac{\pi}{2} B(\xi, p)\, e^{-\gamma_2 y} \tag{6.23}$$

при условии, что комплексная ξ-плоскость разрезана так, что

$$\gamma_i = \sqrt{\xi^2 + p^2/c_i^2} \geqslant 0 \quad (-\infty < \xi < \infty, \quad i = 1, 2).$$

Применив к уравнениям (6.23) обратные преобразования Фурье, получим

$$\overline{\Phi}(x, y, p) = \int_0^\infty A(\xi, p)\, e^{-\gamma_1 y} \cos \xi x d\xi,$$
$$\overline{\Psi}(x, y, p) = \int_0^\infty B(\xi, p)\, e^{-\gamma_2 y} \sin \xi x d\xi. \qquad (6.24)$$

Используя соотношения (6.24) и преобразованные по Лапласу уравнения (6.2) и (6.20), выводим зависимость между искомыми функциями $A(\xi, p)$ и $B(\xi, p)$:

$$\xi\gamma_1 A(\xi, p) - \frac{2\xi^2 + n^2}{2} B(\xi, p) = 0 \quad (n = p/c_2).$$

Если ввести в рассмотрение новую функцию $D(\xi, p)$, то можно записать

$$A(\xi, p) = \frac{2\xi^2 + n^2}{2\gamma_1} D(\xi, p), \quad B(\xi, p) = \xi D(\xi, p). \qquad (6.25)$$

С учетом этого уравнения (6.24) перепишутся в виде

$$\overline{\Phi}(x, y, p) = \int_0^\infty \frac{\xi^2}{\gamma_1}\left(1 + \frac{1}{2\xi^2 n^2}\right) D(\xi, p)\, e^{-\gamma_1 y} \cos \xi x d\xi,$$
$$\overline{\Psi}(x, y, p) = \int_0^\infty \xi D(\xi, p)\, e^{-\gamma_2 y} \sin \xi x d\xi. \qquad (6.26)$$

Комбинируя уравнения (6.26) и (6.2), а также первое и третье из граничных условий (6.20), сводим решение задачи к решению дуальных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty g(\xi n)\, D(\xi, p) \cos(\xi x)\, \xi d\xi = \frac{\sigma q(x)\, \overline{f}(p)}{Gp^2} \quad (x < a), \qquad (6.27)$$

$$\int_0^\infty D(\xi, p) \cos \xi x d\xi = 0 \quad (x > a),$$

где

$$g(k) = 2k^2\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{k}\right)^2\right]^{1/2}\left\{\left(1 + \frac{1}{2k^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + \frac{\varepsilon_c^2}{k^2}\right)^{1/2}\right\}$$

(здесь $k = \xi n$; $\varepsilon_c = \dfrac{c_1}{c_2}$).

Следуя работе [9], дуальные интегральные уравнения (6.27) приведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого проинтегрируем первое из уравнений (6.27) по x в диапазоне $(0, x)$:

$$\int_0^\infty g(\xi, n) D(\xi, p) \sin \xi x d\xi = \frac{\sigma Q(x) \bar{f}(p)}{Gp^2} \quad (x < a);$$

$$\int_0^\infty D(\xi, p) \cos \xi x d\xi = 0 \quad (x > a), \qquad Q(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau. \tag{6.28}$$

Доопределим второе из уравнений (6.28) на всю числовую ось $0 \leqslant x \leqslant \infty$

$$h(x, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D(\xi, p) \cos \xi x d\xi.$$

Функция $h(x, p)$ — трансформанта Лапласа от перемещений при $x = 0$. Учитывая это ($h(x, p) = 0$ при $x > a$) и используя теорему обращения Фурье, получаем

$$D(\xi, p) = \int_0^a h(x, p) \cos \xi x dx. \tag{6.29}$$

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что функция $h(x, p)$ должна обладать свойством асимптотического поведения перемещений в вершине трещины. А так как в окрестности вершины трещины перемещения пропорциональны квадратному корню из расстояния от конца трещины, то можно записать

$$h(x, p) = \int_x^a \frac{\varphi(\tau, p) \tau d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (x < a). \tag{6.30}$$

Подставляя это выражение в равенство (6.29), получаем

$$D(\xi, p) = \frac{\pi}{2} \int_0^a \varphi(\tau, p) J_0(\xi\tau) d\tau, \tag{6.31}$$

где J_0 — функция Бесселя. При таком представлении искомой функции $D(\xi, p)$ второе из уравнений (6.28) удовлетворяется автоматически. Первое из этих уравнений преобразуем в интегральное уравнение Абеля для функции $\varphi(\tau, p)$, для чего введем новую функцию $W(\xi) = (1 - \varepsilon_c^2) - g(\xi)$. После этого первое из уравнений (6.28) запишется в виде

$$(1 - \varepsilon_c^2) \int_0^a \left[\varphi(\tau, p) \tau \int_0^\infty J_0(\xi\tau) \sin \xi x d\xi \right] d\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma Q(x) f(p)}{Gp^2} +$$
$$+ \int_0^a \left[\varphi(\tau, p) \tau \int_0^\infty W(\xi n) J_0(\xi\tau) \sin \xi x d\xi \right] d\tau.$$

С использованием разрывных интегралов Вебера — Шафтхейтлина послед-

нее соотношение запишется в виде

$$(1-\varepsilon_c^2)\int\limits_0^x \frac{\varphi(\tau, p)\,\tau d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sigma Q(x)\,\bar{f}(p)}{Gp^2} +$$

$$+\int\limits_0^a \left[\varphi(\tau, p)\,\tau \int\limits_0^\infty W(\alpha n)\,J_0(\alpha\tau)\sin(\alpha x)\,\alpha d\alpha\right] d\tau \quad (x < a).$$

Или, обращая это уравнение, получаем

$$(1-\varepsilon_c^2)\,\varphi(\tau, p) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\left\{\frac{2}{\pi}\,\frac{\sigma q(x)\,\bar{f}(p)}{Gp^2} +\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^a \left[\varphi(\xi, p)\,\xi \int\limits_0^\infty W(\alpha n)\,J_0(\alpha\xi)\cos(\alpha x)\,\alpha d\alpha\right] d\xi\right\} dx \ (\tau < a). \qquad (6.32)$$

Введем безразмерные переменные $v = \tau/a$, $s = \xi a$, $z = x/a$ и определим величины $k = n/a$, $\Lambda(v, k) = \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon_c^2)\,\frac{Gp^2\sqrt{v}\varphi(va, p)}{\sigma f(p)}$. Теперь уравнение (6.32) можно записать в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\Lambda(v, k) - \int\limits_0^1 \Lambda(\eta, k)\,K(v, \eta)\,d\eta = \frac{2}{\pi}\sqrt{v}\int\limits_0^v \frac{q(z)\,dz}{\sqrt{v^2-z^2}} \qquad (6.33)$$

$$(0 \leqslant v \leqslant 1),$$

ядро которого симметрично по v и η:

$$K(v, \eta) = \frac{\sqrt{v\eta}}{1-\varepsilon_c^2}\int\limits_0^\infty sW(sk)\,J_0(sv)\,J_0(s\eta)\,ds, \qquad (6.34)$$

$$(0 \leqslant v \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1).$$

Подынтегральная функция в (6.34) на бесконечности ведет себя, как s^{-2}, поэтому для быстрой сходимости бесконечного интеграла (6.34) введем в рассмотрение функцию

$$d(n) = W(n) + \frac{H}{n^2+E_c^2},$$

где, для того чтобы $d(n)$ имела порядок n^{-5} для больших n, n и $W(n)$ выбираются (на основании разложения в ряд по степеням n функции $W(n)$) следующим образом:

$$H = \frac{1}{4}(3\varepsilon_c^4 - 4\varepsilon_c^2 + 3), \qquad E_c^2 = \frac{1}{8H}(5\varepsilon_c^6 - 6\varepsilon_c^4 + 2\varepsilon_c^2 + 1).$$

Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{H^{\cdot}}{(sk)^2+E_c^2} J_0(sv) J_0(\eta s)\,ds = \frac{H^{\cdot}}{k^2} J_0\left(\frac{E_c v}{k}\right) \times$$

$$\times K_0\left(\frac{E_c \eta}{k}\right) \quad (0 < v < \eta),$$

то выражение для ядра (6.34) интегрального уравнения Фредгольма становится

$$K(v, \eta) = \frac{\sqrt{v\eta}}{1-\varepsilon^2}\left[-\frac{H^{\cdot}}{k^2} I_0\left(\frac{vE_c}{k}\right) K_0\left(\frac{vE_c}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty sd(sk) J_0(sv) J_0(s\eta)\,ds\right] \quad (0 < v < \eta),$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов.

Для вычисления ядра (6.34) можно использовать другой подход, основанный на применении теории функций комплексного переменного. При этом интеграл (6.34) от осциллирующих функций и по полубесконечному интервалу представляется в виде суммы интегралов по конечным отрезкам от неосциллирующих функций.

Используя соотношения (6.31), искомую функцию $D(\xi, p)$ можно записать через решение интегрального уравнения Фредгольма (6.33) в виде

$$D(\xi, p) = \frac{\sigma a^2 \bar{f}(s)}{(1-\varepsilon^2)\, G\bar{p}^2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\Lambda(\xi, k)}{\sqrt{\xi}}\right] J_0(\xi a\eta)\, \xi d\xi\right\}.$$

Если это выражение проинтегрировать по частям, то

$$D(\xi, p) = \frac{\sigma a^2 f(s)}{(1-\varepsilon)^2\, Gp^2}\left\{\Lambda(1, k) J_1(\xi a) - \int_0^1 \frac{d}{d\eta}\left[\frac{\Lambda(\eta, k)}{\sqrt{\eta}}\right] J_1(\xi a\eta)\, d\eta\right\}. \tag{6.35}$$

На практике наибольший интерес представляет та часть решения, которая описывает сингулярное поведение напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. Некоторые авторы [8] при нахождении такого поля напряжений пользуются методом обращения Каньяра — де Хупа. Однако этот метод трудоемок. Более легкий путь — непосредственное выделение коэффициента при сингулярности (коэффициента интенсивности напряжений) из интегральных представлений поля напряжений.

Согласно [10], только первый член в уравнении (6.35) характеризует сингулярное поле напряжений. Интегральное выражение в $D(\xi, p)$ определяет регулярную часть поля напряжений в вершине трещины. Трансформанты компонентов напряжения, согласно [10], можно записать в таком виде:

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, y, p) = \sigma a \Lambda(1, k)\int_0^\infty (sy-1) J_1(sa)\cos(sx)\, e^{-sy} ds + O(1),$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, y, p) = \sigma a \Lambda(1, k) \int_0^\infty (sy + 1) J_1(sa) \cos(sx) e^{-sy} ds + O(1), \quad (6.36)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(x, y, p) = \sigma a \Lambda(1, k) \int_0^\infty sy J_1(sa) \sin(sx) e^{-sy} ds + O(1),$$

где $O(1)$ — величины, ограниченные при $x \to a$. Используя выражения (6.36), соотношения

$$\int_0^\infty J_0(sa) \cos(sx) e^{-sy} ds = (r_1 r_2)^{-1/2} \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2), \quad (6.37)$$

$$\int_0^\infty s \cos(sx) J_0(sa) e^{-sy} ds = -r (r_1 r_2)^{-3/2} \cos\left[\varphi - \frac{3}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

(полярные координаты (r, φ), (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2) показаны на рис. 6.3) и обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\sigma_{xx}(x, y, t) = \frac{K_{\text{I}_\text{д}}(t)}{\sqrt{2r_1}} \cos \frac{\varphi_1}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{3\varphi_1}{2}\right) + O(1), \quad (6.38)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, t) = \frac{K_{\text{I}_\text{д}}(t)}{\sqrt{2r_1}} \cos \frac{\varphi_1}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{3\varphi_1}{2}\right) + O(1),$$

$$\tau_{xy}(x, y, t) = \frac{K_{\text{I}_\text{д}}(t)}{\sqrt{2r_1}} \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{3\varphi_1}{2} + O(1),$$

где

$$K_{\text{I}_\text{д}}(t) = \sigma \sqrt{a}\, m(t);$$

$$m(t) = L^{-1} [\bar{f}(p) \Lambda(1, k)]; \quad (6.39)$$

L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа. Из соотношений (6.38) видно, что угловое распределение напряжений в окрестности вершины стационарной трещины одинаково при статическом и динамическом нагружениях. Отличие состоит лишь в том, что коэффициент интенсивности напряжений зависит от времени. Этот коэффициент $K_{\text{I}_\text{д}}(t)$ посредством функции $m(t)$ зависит и от функции $\Lambda(1, k)$. Численное обращение трансформанты Лапласа дает возможность вычисления $m(t)$, а следовательно, и $K_{\text{I}_\text{д}}(t)$.

Задача численного обращения интегрального преобразования Лапласа — некорректная задача математической физики. Существует несколько способов численного обращения. Рассмотрим наиболее распространенный при решении динамических задач теории трещин способ [11].

Исходя из выражений (6.39) можно записать

$$\Psi(p) = \bar{f}(p) \Lambda(1, n) = \int_0^\infty m(t) e^{-pt} dt. \quad (6.40)$$

Пусть функция $\Psi(p)$ вычислена в точках $p = (1 + n)\,\delta$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где δ — некоторый положительный параметр. Преобразуем полубесконечный интервал в уравнении (6.40) в конечный $[-1, 1]$. Для этого сделаем замену переменной: $x = 2e^{-\delta t} - 1$, и тогда

$$V(x) = m[t'(x)] = m\left(-\frac{1}{\delta}\ln\frac{x+1}{2}\right).$$

С учетом сделанной замены уравнение (6.40) запишется

$$\Psi[(1+n)\,\delta] = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}(1+x)^n V(x)\,dx. \tag{6.41}$$

В то же время разложение функции $V(x)$ в ряд по полиномам Лежандра, которые ортогональны на интервале $[-1, 1]$, можно записать в виде

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(x), \tag{6.42}$$

где полиномы Лежандра определяются следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^n(1+x)^n].$$

Если воспользоваться условием ортогональности для полиномов Лежандра и подставить выражение (6.42) в (6.41), то получим

$$\Psi[(1+n)\,\delta] = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}C_k \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.43}$$

Уравнения (6.43) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_k, по которым можно определить функцию $m(t)$:

$$m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k P_k(2e^{-\delta t} - 1), \tag{6.44}$$

где N—порядок усеченной системы уравнений (6.43). Положительный параметр δ служит как бы шкалой времени и при реальных расчетах, как правило, изменяется в пределах $0{,}2 < \delta < 0{,}5$. Конкретные вычисления показывают, что уже при $N > 8$ результаты расчетов неустойчивы.

Иногда при численном преобразовании Лапласа удобен следующий метод. После анализа численного решения интегрального уравнения (6.33) для различных k трансформанту динамического коэффициента интенсивности напряжений в пространстве преобразования Лапласа можно аппроксимировать следующим выражением:

$$\overline{K}_{\text{Iд}}(k) = \sigma\sqrt{\bar{a}}\,q_1\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1 + q_2} + q_3\ln\frac{q_4^2 + k^2}{k^2}\right].$$

Неизвестные постоянные q_1, q_2, q_3, q_4 находятся методом наименьших

квадратов. После обращения $\overline{K}_{\rm I}(k)$ получим

$$K_{\rm I д}(t') = \sigma\sqrt{a}q_1\left[1 - e^{-q_2 t'} + q_3\frac{1-\cos q_4 t}{t}\right],$$

где t' — безразмерное время: $t' = c_2 t/a$ (здесь a — полудлина трещины).

Некоторые авторы [12] при численном обращении преобразования Лапласа используют метод Беллмана [13], суть которого состоит в том, что искомая функция находится из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} W_i x_i^{j/\beta} m(t_i) = \beta^{-1}\Psi(j/\beta) \quad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

где $W_i = \int\limits_{-1}^{1}\frac{P_N(1-2x)\,dx}{(x-x_i)P_N'(1-2x_i)}$; x_i — i-й корень полинома $P_N(1-2x)$; β — положительная постоянная, являющаяся «шкалой» времени; $t_i = -\beta\ln x_i$.

Конкретные численные значения W_i и x_i можно найти в [12].

На рис. 6.4 динамический коэффициент интенсивности напряжений $K_{\rm I д}(t')$, нормализованный относительно соответствующего статического значения, представлен как функция безразмерного времени $t' = c_2 t/a$. При расчетах использовалось значение отношения скорости поперечных волн c_2 к скорости продольных волн, равное 0,542. Коэффициент интенсивности напряжений достигает максимума, большего, чем статическое значение, и впоследствии колеблется около статической величины с убывающей амплитудой.

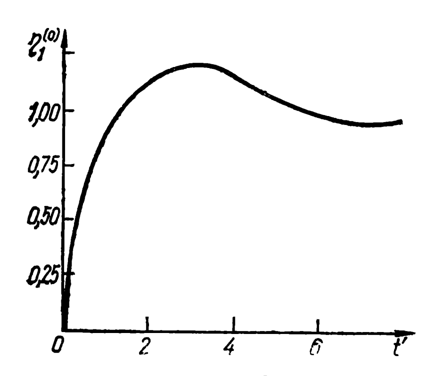


Рис. 6.4. Зависимость $\eta_1^0 = K_{\rm I д}(t')/\sigma\times\times\sqrt{a}$ от безразмерного времени $t' = = c_2 t/a$ для плоскости с трещиной при ее ударном растяжении.

Коэффициент интенсивности напряжений $K_{\rm I д}$, измеренный путем раскрытия трещины с использованием оптической интерференционной методики и высокоскоростной фотографии, достигает максимума приблизительно через 10^{-5} с после приложения нагрузки. Тот же порядок получается и при использовании приведенных здесь аналитических вычислений.

Если нестационарные нагрузки приложить к поверхности трещины, то в ее вершинах образуются центры двух цилиндрических волн. Пока эти волны не начнут взаимодействовать, решение задачи может описываться решением для полубесконечной трещины (6.19), т. е. для этого периода времени $K_{\rm I д} \sim \sqrt{t}$. Фронт волны напряжения теряет свое подобие после начала взаимодействия двух цилиндрических волн, хотя в окрестности вершины трещины особенность типа квадратного корня и угловое распределение поля напряжений остаются неизменными. В течение такого периода

максимального взаимодействия этих двух волн динамический коэффициент интенсивности напряжений и достигает своего максимального значения. Через некоторое время, например, $c_2 t > 2a$, фронт волн сливается в одну расходящуюся волну, окружающую всю трещину. В этот период времени различие между статическим и динамическим коэффициентами интенсивности напряжений незначительно (в случае импульсного нагружения).

Метод сведения граничной задачи для трещины к решению дуальных интегральных уравнений применим и в осесимметричном случае, только вместо тригонометрических функций в ядрах дуальных уравнений будут цилиндрические. Сведение этих дуальных уравнений к Фредгольмовским аналогично плоскому случаю. Такими методами решено много задач динамической механики разрушения: ударное нагружение бесконечного цилиндра, ослабленного соосной дисковидной круглой трещиной [15]; неустановившаяся реакция конечной трещины, выходящей под прямым углом на поверхности полуплоскости, при ударных нагрузках [16]. Дуальные интегральные уравнения применены также к различным динамическим задачам [17]. Однако использование их эффективно для одиночной трещины. Для двух и более трещин (кольцевая трещина) задача уже приводит к решению n-х интегральных уравнений, которое даже при двух линиях раздела граничных условий довольно сложное. Поэтому полученные n-е интегральные уравнения более удобно решать с помощью сингулярных интегральных уравнений типа Коши.

6.3. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах о дифракции гармонических упругих волн на системах прямолинейных коллинеарных трещин в пластинах

На примере задачи о дифракции упругих гармонических волн на двух равных колинеарных трещинах проиллюстрируем применение сингулярных интегральных уравнений к решению тройных интегральных уравнений. Указанный подход можно распространить на случай n-х интегральных уравнений. Сведение дуальных интегральных уравнений к сингулярному интегральному с ядром типа Коши приведено в работах [18, 19].

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, расположенную таким образом, что трещины занимают область $-b < x < -a$; $a < x < b$; $-\infty < z < \infty$, $y = 0$. Продольная гармоническая волна (в дальнейшем множитель $e^{-i\omega t}$ будет опущен) падает на поверхности трещины. Если предположить, что геометрическая часть нагрузки, прикладываемой к поверхности трещины, будет четной по x, то аналогично прежней задаче можно рассматривать задачи только в верхнем правом квадранте. На основании этого граничные условия задачи можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma(x) \quad (a < x < b),\\ \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty),\\ u_y(x, 0) = 0 \quad (0 < x < a,\ b < x < \infty).\end{gathered} \tag{6.45}$$

Не уменьшая общности, в дальнейшем будем считать, что $\sigma(x) = \sigma = \text{const}$. Решение волновых уравнений (6.3) выбираем в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty A(\xi, \omega)\, e^{-\gamma_1 y} \cos \xi x d\xi, \tag{6.46}$$

$$\Psi(x, y) = \int_0^\infty B(\xi, \omega)\, e^{-\gamma_2 y} \sin \xi x d\xi,$$

где $\gamma_i^2 = \xi^2 - k_i^2$ $(i = 1, 2)$. Выражения (6.46) справедливы в поле рассеянных волн, если выполняются следующие условия: u_x и u_y обращаются в нуль на бесконечно большом расстоянии от трещин и на бесконечности нет других волн, кроме уходящих. Следовательно, в верхнем полупространстве $y \gg 0$ на γ_1 и γ_2 наложены ограничения

$$\operatorname{Re}(\gamma_i) > 0, \quad \operatorname{Im}(\gamma_i) < 0 \quad (i = 1, 2). \tag{6.47}$$

Решения волновых уравнений (6.46) после использования соотношений (6.2) и второго из условий (6.45) запишутся в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty \frac{2\xi^2 - k_2^2}{2\gamma_1} c(\xi, \omega)\, e^{-\gamma_1 y} \cos \xi x d\xi,$$
$$\Psi(x, y) = \int_0^\infty \xi c(\xi, \omega)\, e^{-\gamma_2 y} \sin \xi x d\xi. \tag{6.48}$$

Использование оставшихся граничных условий (6.45) приводит к тройным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty c(\xi, \omega) \cos \xi x d\xi = 0 \quad (0 < x < a,\ b < x < \infty),$$
$$\int_0^\infty \frac{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2\gamma_1\gamma_2}{2\gamma_1} c(\xi, \omega) \cos \xi x d\xi = \frac{\sigma}{G} \quad (a < x < b). \tag{6.49}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$u_y(x, 0) = \int_0^\infty c(\xi, \omega) \cos \xi x d\xi. \tag{6.50}$$

Продифференцируем последнее уравнение по x: $\varphi(x, \omega) = -\frac{\partial u_y(x, 0)}{\partial x} = \int_0^\infty \xi c(\xi, \omega) \sin \xi x d\xi$. Используя это соотношение и формулу обратного преобразования Фурье, получаем

$$c(\xi, \omega) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau, \omega) \sin \xi \tau d\tau. \tag{6.51}$$

В дальнейшем, при решении тройных интегральных уравнений (6.49),

нужны будут следующие интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi x \sin \xi \tau}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2} H(\tau - y), \tag{6.52}$$

$$\int_0^\infty \sin \xi x \sin \xi \tau d\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-\tau} + \frac{1}{x+\tau}\right). \tag{6.53}$$

Принимая во внимание соотношения (6.51) и (6.52), нетрудно показать, что первое из соотношений (6.49) удовлетворяется автоматически, если

$$\int_a^b \varphi(\tau, \omega) d\tau = 0. \tag{6.54}$$

Использовав второе из уравнений (6.49), а также соотношения (6.51) и (6.53), получим сингулярное интегральное уравнение типа Коши первого рода

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(\tau, \omega)}{\tau - x} d\tau + \int_a^b \varphi(\tau, \omega) K^*(x, \tau) d\tau = \frac{\sigma}{G(1+\varepsilon_c^2)}, \tag{6.55}$$

где

$$K^*(x, \tau) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{x+\tau} + 2\pi \int_0^\infty F(\xi, \omega) \cos \xi x \sin \xi \tau d\xi\right];$$

$$F(\xi, \omega) = \frac{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2\gamma_1\gamma_2}{2\xi\gamma_1(1-\varepsilon_c^2)} - 1; \qquad \varepsilon_c = \frac{c_1}{c_2}.$$

Если перейти в уравнениях (6.54) и (6.55) к безразмерным величинам

$$\varphi(\tau, \omega) = \frac{\sigma\Phi(\tau', \omega)}{G(1-\varepsilon_c^2)}, \quad \frac{\tau}{b} = \frac{1-\upsilon}{2}\tau' + \frac{1+\upsilon}{2},$$

$$\frac{x}{b} = \frac{1-\upsilon}{2}s + \frac{1+\upsilon}{2}, \qquad \upsilon = \frac{a}{b},$$

то они запишутся в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\Phi(\tau', \omega)}{\tau - s} d\tau' + \int_{-1}^1 \Phi(\tau', \omega) K(\tau', s) d\tau' = 1 \quad (-1 \leqslant s \leqslant 1), \tag{6.56}$$

$$\int_{-1}^1 \Phi(\tau', \omega) d\tau' = 0, \qquad K(s, \tau') = \frac{1-\upsilon}{2} K^*(x, \tau).$$

Так как искомая функция $\Phi(\tau', \omega)$ на концах отрезка имеет особенности типа квадратного корня, то представим ее в виде

$$\Phi(\tau', \omega) = [1 - (\tau')^2]^{-1/2} G(\tau', \omega), \tag{6.57}$$

где функция $G(\tau', \omega)$ ограничена на концах отрезка $(-1, 1)$.

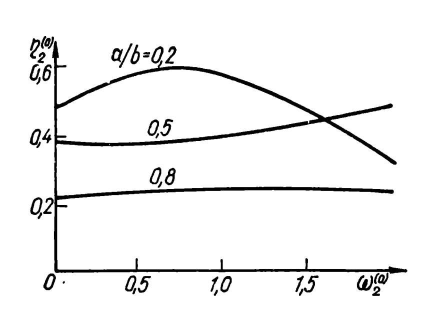
При численном решении интегрального уравнения (6.56) воспользуемся методикой [20], согласно которой уравнения (6.56) преобразуются в систему бесконечных регулярных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(\tau_i'\omega)\left[\frac{1}{\tau_i'-s_j}+\pi K(s_j,\tau_j')\right]=1 \quad (j=1,2,\ldots,N-1),$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(\tau_i',\omega)=0, \tag{6.58}$$

где $\tau_i' = \cos\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right)$; $s_j = \cos\frac{\pi j}{N}$.

Динамические коэффициенты интенсивности напряжений можно определить, решив уравнения (6.58). С ис-



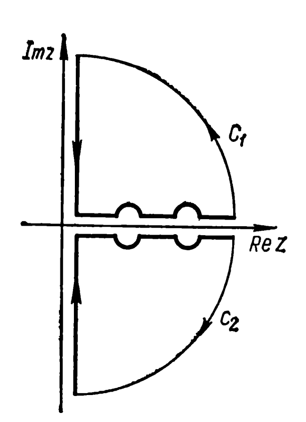


Рис. 6.5. Зависимость $\eta_2^{(0)} = K_{\text{I}дA}(t)/\sqrt{b}\sigma$ от безразмерной части $\omega_2^{(0)} = c_1 b/\omega$ при гармонических колебаниях плоскости с двумя трещинами.

Рис. 6.6. Контур интегрирования для ядра интегрального уравнения.

пользованием уравнений (6.2), (6.48) и (6.51) нетрудно показать, что

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{\sigma}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(\tau',\omega)}{\tau'-s}\,d\tau' + O(1). \tag{6.59}$$

Если учесть соотношение (6.57) и теорию интегралов типа Коши, то найдем

$$K_{\text{I}дA} = \sqrt{\frac{1-\upsilon}{2}}\,\sigma\sqrt{b}G(-1,\omega), \quad K_{\text{I}дB} = -\sqrt{\frac{1-\upsilon}{2}}\,\sigma\sqrt{b}G(1,\omega), \tag{6.60}$$

где $K_{\text{I}дA}$ и $K_{\text{I}дB}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для вершин трещины A и B соответственно.

Величины $G(-1,\omega)$ и $G(1,\omega)$ находим, решая уравнения (6.58) следу-

ющим образом:

$$G(\pm 1, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} U_{2i-2} \left[\left(\frac{1 \pm \tau_i'}{2} \right)^{1/2} \right] G(\tau_i'', \omega), \qquad (6.61)$$

где $U_i(x)$ — полиномы Чебышева второго рода.

Результаты численного решения данной задачи для $K_{\text{I}дA}$ приведены на рис. 6.5

В случае низкочастотных гармонических колебаний можно получить приближенные значения $K_{\text{I}дA}$ и $K_{\text{I}дB}$. Для этого перепишем уравнение (6.51) в виде

$$\xi c(\xi) = \int_{\upsilon}^{1} \varphi(\tau^2, \omega) \sin \xi\tau d\tau. \qquad (6.62)$$

Тогда, используя (6.52) и (6.53), уравнения (6.49) запишем в следующем виде:

$$\int_{\upsilon}^{1} \int_{0}^{\infty} \varphi(\tau^2, \omega) \sin \xi\tau \cos \xi x d\xi = \frac{\sigma}{Gk_2^2 (1 - \varepsilon_c^2)} +$$

$$+ \int_{\upsilon}^{1} \int_{0}^{\infty} \varphi(\tau^2, \omega) \left[1 + \frac{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \gamma_1 \gamma_2}{2k_2^2 \xi \gamma_1} \right] \sin \xi\tau \sin x\xi d\xi d\tau \quad (\upsilon < x < 1),$$

$$\int_{\upsilon}^{1} \varphi(\tau^2, \omega) d\tau = 0. \qquad (6.63)$$

Если использовав соотношения

$$\frac{\sin \xi x \sin \xi\tau}{\xi} = \frac{\pi}{2} \sqrt{x\tau} J_{\frac{1}{2}}(\xi x) J_{\frac{1}{2}}(\xi\tau),$$

$$J_{\frac{1}{2}}(\xi x) = \left(\frac{2\xi}{\pi x} \right)^{1/2} \int_{0}^{x} \frac{\eta J_0(\xi\eta)}{\sqrt{x^2 - \eta^2}} d\eta,$$

сделать несложные преобразования, то уравнения (6.63) запишутся в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\int_{\upsilon}^{1} \frac{\tau\varphi(\tau^2, \omega)}{\tau^2 - x^2} d\tau = \frac{\sigma}{Gk_2^2 (1 - \varepsilon_c^2)} +$$

$$+ \frac{d}{dx} \int_{\upsilon}^{1} \varphi(\tau^2, \omega) \int_{0}^{x} \int_{0}^{\tau} \frac{uvL(u, v)}{\sqrt{(x^2 - v^2)(x^2 - u^2)}} du dv d\tau, \quad (\upsilon \leqslant x \leqslant 1), \qquad (6.64)$$

где $L(u, v) = \int_{0}^{\infty} \left[\xi + \frac{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \gamma_1 \gamma_2}{2k_2^2 (1 - \varepsilon_c^2) \gamma_1} \right] J_0(\xi u) J_0(\xi v) d\xi.$

Искомую функцию $\varphi(\tau^2, \omega)$ определим из равенства (6.64) и второго уравнения (6.63), для чего с помощью контурного интегрирования разложим $L(u, v)$ по степеням параметра k_2.

Рассмотрим следующий интеграл функции комплексного переменного

$$I(u, v) = \int_{k_2}^{\infty} zL_1(z, \gamma_1, \gamma_2) J_0(zu) J_0(zv)\, dz,$$

где

$$L_1(z, \gamma_1, \gamma_2) = 1 + \frac{(2z^2 - k_2^2)^2 - 4z^2\gamma_1\gamma_2}{2zk_2^2(1 - \varepsilon_c^2)\gamma_1}.$$

Для того чтобы вычислить его, введем в рассмотрение

$$I_1(u, v) = \oint_{C_1} zL_1(z, \gamma_1, -\gamma_2) J_0(zu) H_0^{(1)}(zv)\, dz \quad (v > u),$$

$$I_2(u, v) = \oint_{C_2} zL_1(z, \gamma_1, \gamma_2) J_0(zu) J_0(zu) H_0^{(2)}(zv)\, dz \quad (v > u),$$

где контуры интегрирования C_1 и C_2 показаны на рис. 6.6. Если исследовать функцию $L(z, \gamma_1\ \gamma_2)$ вдоль путей интегрирования, то, использовав лемму Жордана, можно записать

$$I(u, v) = -\frac{1}{2}\int_0^{k_1} z\,[L_1(z, i\gamma_1', i\gamma_2'), H_0^{(1)}(zv) + L_1(z_1 - i\gamma_1', i\gamma_2') \times$$

$$\times H_0^{(2)}(zv)]\, J_0(uz)\, dz - \frac{1}{2}\int_{k_1}^{k_2} z\,[L_1(z, \gamma_1, i\gamma_2') H_0^{(1)}(zv) +$$

$$+ L_1(z, \gamma_1 - i\gamma_2) H_0^{(2)}(zv)]\, J_0(uz)\, dz \quad (v > u),$$

где $\gamma_i' = \sqrt{k_i^2 - z^2}$ $(i = 1, 2)$.

Учитывая вышеизложенное, функцию $L(u, v)$ можно представить в виде

$$L(u, v) = \frac{2ik_2^2\varepsilon_c^4}{1 - \varepsilon_c^2}\int_0^1 \left\{\frac{(2\xi^2 - 1)^2}{4\sqrt{1 - \xi^2}} J_0(\xi k_1 u) H_0^{(1)}(\xi k_1 v) + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^2\sqrt{1 - \xi^2}}{\varepsilon_c^4} J_0(\xi k_2 u) H_0^{(1)}(\xi k_2 v)\right\} d\xi \quad (v > u). \tag{6.65}$$

Если $v < u$, то в уравнении (6.65) параметры u и v следует поменять местами. При таком представлении функции $L(u, v)$ ее легко можно выразить так:

$$L(u, v) = -[q_1 k_2^2 \ln k_2 + (q_2 + q_1 \ln v)\, k_2^2 + 0\,(k_2^2 \ln k_2)] \quad (v > u), \tag{6.66}$$

где

$$q_1 = \frac{3\varepsilon_c^4 - 4\varepsilon_c^2 + 3}{4(1-\varepsilon_c^2)}; \quad q_2 = \frac{3\varepsilon_c^4 - 4\varepsilon_c^2 + 2}{4(1-\varepsilon_c^2)} \ln \varepsilon_c + \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\gamma_Э}{\pi} - i\right) q_1 -$$

$$- \frac{\ln 2}{4(1-\varepsilon_c^2)} (11\varepsilon_c^4 - 12\varepsilon_c^2 + 5) + \frac{4}{\pi} [N_2 (1+\varepsilon_c^2) + \varepsilon_c^2 N_0];$$

$$N_{2n} = \int_0^1 z^{2n} \sqrt{1 - z^2} \ln z dz \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$\gamma_Э$ — постоянная Эйлера. В частности, при $n = 0$ и $n = 2$ $N_0 = -\frac{\pi}{8} \times$ $\times (1 + \ln 4)$, $N_2 = \frac{\pi}{64}(1 - 4\ln 2)$. Искомую функцию $\varphi(\tau^2, \omega)$ представим в виде

$$\varphi(\tau^2, \omega) = \frac{1}{k_2^2} [\varphi_0(\tau^2, \omega) + (k_2^2 \ln k_2)\varphi_1(\tau^2, \omega) +$$

$$+ k_2^2 \varphi_2(\tau^2, \omega) + k_2^4 (\ln k_2)^2 \varphi_3(\tau^2, \omega) + O(k_2^4 \ln k_2)]. \tag{6.67}$$

Подставим теперь разложение для функции $L(u, v)$ (6.66) в уравнение (6.64). Тогда с учетом выражений (6.67) для функций $\varphi_0(\tau^2, \omega)$, $\varphi_1(\tau^2, \omega)$, $\varphi_2(\tau^2, \omega)$ и $\varphi_3(\tau^2, \omega)$ получаются следующие интегральные уравнения:

$$\int_v^1 \frac{\tau\varphi_0(\tau^2, \omega)}{\tau^2 - x^2} d\tau = \frac{\sigma}{G(1-\varepsilon_c^2)} \quad (v \leqslant x \leqslant 1), \quad \int_v^1 \varphi_0(\tau^2, \omega) d\tau = 0, \tag{6.68}$$

$$\int_v^1 \frac{\tau\varphi_1(\tau^2, \omega)}{\tau^2 - x^2} d\tau = -q_1 \int_v^1 \tau\varphi_0(\tau^2, \omega) d\tau \quad (v \leqslant x \leqslant 1), \quad \int_v^1 \varphi_1(\tau^2, \omega) d\tau = 0. \tag{6.69}$$

$$\int_v^1 \frac{\tau\varphi_2(\tau^2, \omega)}{\tau^2 - x^2} d\tau = -q_1 \frac{d}{dx} \int_v^1 \varphi_0(\tau^2, \omega) \int_0^x \int_0^\tau \frac{uv \begin{Bmatrix} \ln v, & v > u \\ \ln u, & v < u \end{Bmatrix}}{\sqrt{(x^2 - v^2)(x^2 - u^2)}} \times$$

$$\times dv du d\tau - q_2 \int_v^1 \tau\varphi_0(\tau^2, \omega) d\tau \quad (v \leqslant x \leqslant 1), \int_v \varphi_2(\tau^2, \omega) d\tau = 0, \tag{6.70}$$

$$\int_v^1 \frac{\tau\varphi_3(\tau^2, \omega)}{\tau^2 - x^2} d\tau = -q_1 \int_v^1 \tau\varphi_1(\tau^2, \omega) d\tau \quad (v \leqslant x \leqslant 1),$$

$$\int_v^1 \varphi_3(\tau^2, \omega) d\tau = 0. \tag{6.71}$$

Для решения такой цепочки сингулярных интегральных уравнений воспользуемся результатами работы [21]. Решения сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{\upsilon}^{1} \frac{\tau\Psi(\tau^2)}{\tau^2 - x^2} d\tau = \frac{\pi}{2} f(x) \quad (\upsilon \leqslant x \leqslant 1),$$

которое удовлетворяет условию $\int_{\upsilon}^{1} \Psi(\tau^2)\, d\tau = 0$, можно представить в виде

$$\Psi(\tau^2) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\tau^2 - \upsilon^2}{1 - \tau^2}} \int_{\nu}^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2 - \upsilon^2}} \frac{xf(x)}{x^2 - \tau^2} dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi F \sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)}} \int_{\upsilon}^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2 - \upsilon^2}}\, xf(x) \int_{\upsilon}^{1} \sqrt{\frac{\tau^2 - \upsilon^2}{1 - \tau^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{x^2 - \tau^2} d\tau dx,$$

где $F = F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - \upsilon^2}\right)$ — эллиптический интеграл первого рода.

На основании вышеизложенного решение интегральных уравнений (6.68)—(6.71) следующее:

$$\varphi_0(\tau^2, \omega) = \frac{P(\tau^2 - E_J/F)}{\sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)}}, \quad P = \frac{4\sigma}{\pi G(1 - \varepsilon_c^2)},$$

$$\varphi_1(\tau^2, \omega) = \frac{q_1 P}{2} \frac{(1 + \upsilon^2 - 2E_J/F)(\tau^2 - E_J/F)}{\sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)}},$$

$$\varphi_2(\tau^2, \omega) = P\,[d_0(\tau^2 - E_J/F) - (q_1/2)\Big\{(\tau^2 - \upsilon^2)(\tau^2 - 0{,}5 +$$

$$+ 0{,}5\,\upsilon^2) - \frac{E_J/F(\upsilon^2 + 1)}{6} + \left(\frac{\upsilon^4}{2} - \frac{\upsilon^2}{6}\right)\Big\}\Big] / \sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)} -$$

$$- Pq_1\Big[(\tau^2 - E_J/F)(1 - E_J/F) + \tau^2(\tau^2 - \upsilon^2)\Big\{(1/F)\, \Pi\Big(\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1 - \upsilon^2}{1 - \tau}, \sqrt{1 - \upsilon^2}\Big) - 1\Big\} - (1 - \upsilon^2)\, I/F^2\Big] / \sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)}, \tag{6.72}$$

$$\varphi_3(\tau^2, \omega) = \frac{q_1^2 P}{4} (1 + \upsilon^2 - 2E_J/F)^2 \frac{\tau^2 - E_J/F}{\sqrt{(\tau^2 - \upsilon^2)(1 - \tau^2)}},$$

$$\Pi(\varphi, n^2, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{(1 - n^2 \sin^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}\, d\theta,$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\,(\sin^2\varphi + \upsilon^2 \cos^2\varphi)^{1/2}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sec^2\varphi, \sqrt{1-\upsilon^2}\right) - F\right] d\varphi,$$

$$d_0 = \frac{q_2}{2}(1 + \upsilon^2 - 2E_J/F) - \frac{q_1}{2}\left[(1+\upsilon^2)\log\frac{1-\upsilon^2}{e} - \right.$$

$$\left. - \frac{2E_J}{F}\log\frac{\sqrt{1-\upsilon^2}}{e}\right].$$

Функция $\varphi(\tau^2, \omega)$ полностью определяется через соотношения (6.72). Зная функцию $\varphi(\tau^2, \omega)$, после некоторых преобразований можно найти динамические коэффициенты интенсивности напряжений:

$$K_{\text{I}дA} = \frac{\sigma\sqrt{b}}{\sqrt{\upsilon(1-\upsilon^2)}}\left\{\left(\frac{E_J}{F} - \upsilon^2\right) - \frac{q_1}{2}\left(1 + \upsilon^2 - \frac{2E_J}{F}\right)\left(\frac{E_J}{F} - \right.\right.$$

$$\left. - \upsilon^2\right) k_2^2 \ln k_2 + \left[d_0\left(\frac{E_J}{F} - \upsilon^2\right) - \frac{q_1}{2}\left(\frac{E_J}{6F}(1+\upsilon^2) + \frac{\upsilon^2}{6} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\upsilon^2}{4}\right) - q_1\left\{\left(\frac{E_J}{F} - \upsilon^2\right)\left(1 - \frac{E_J}{F}\right)\frac{I}{F^2}\right\}\right] k_2^2 + \frac{q_1^2}{4}\left(1 + \upsilon^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{2E_J}{F}\right)^2\left(\frac{E_J}{F} - \upsilon^2\right)(k_2^2 \ln k_2)^4 + O(k_2^4 \ln k_2)\right\};$$

$$K_{\text{I}дB} = \frac{\sigma\sqrt{b}}{\sqrt{1-\upsilon^2}}\left\{\left(1 - \frac{E_J}{F}\right) - q_1\left(1 + \upsilon^2 - \frac{2E_J}{F}\right)\left(1 - \frac{E_J}{F}\right) k_2^2 \times \right.$$

$$\times \ln k_2 + \left[d_0\left(1 - \frac{E_J}{F}\right) - \frac{q_1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\upsilon^2}{6} - \frac{E_J}{6F}(1+\upsilon^2)\right\} - \right.$$

$$\left. - q_1\left\{\left(1 - \frac{E_J}{F}\right)^2 - (1-\upsilon^2)\left(1 + \frac{I}{F^2}\right)\right\}\right] k_2^2 + \frac{q_1}{4}\left(1 + \upsilon^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{2E_J}{F}\right)^2\left(1 - \frac{E_J}{F}\right)(k_2^2 \ln k_2)^2 + O(k_2^4 \ln k_2)\right\}.$$

(6.73)

В том случае, когда $\upsilon \to 0$, две прямолинейные трещины сливаются и преобразуются в одну Сделав предельный переход в выражениях (6.73) при $\upsilon \to 0$, получим формулу, которая определяет коэффициент интенсивности напряжений в вершине одиночной трещины

$$K_{\text{I}дB} = \sigma\sqrt{b}\left[1 - \frac{q_1^2}{2}\ln k_2 - \frac{q_2}{2}k_2^2 + \frac{q_1^2}{4}(k_2^2 \ln k_2)\right] + O(k_2^4 \ln k_2).$$

(6.74)

Формула (6.74) полностью совпадает с аналогичной формулой работы [22], которая получена с помощью приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Из уравнений (6.73) легко можно найти решение статической задачи о растяжении плоскости, ослабленной двумя одинаковыми прямолинейными трещинами. Устремив величину ω к нулю, получим

$$K_{IA} = \frac{\sigma}{\sqrt{a(b^2 - a^2)}} \left(b^2 \frac{E_J}{F} - a^2 \right), \quad K_{IB} = \frac{\sigma b^2}{\sqrt{b(b^2 - a^2)}} \left(1 - \frac{E_J}{F} \right).$$

Этот результат совпадает с уже известным результатом [21].

Решение задач о дисковидных трещинах (осесимметричные задачи) также можно сводить к решению сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши.

6.4. Решение осесимметричных динамических задач механики разрушения с помощью метода сингулярных интегральных уравнений

Для осесимметричных кольцевых трещин или штампов, т. е., когда граница разделяется на три части, постановка задачи приводит к решению тройных интегральных уравнений относительно одной неизвестной функции, которые могут быть сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Но ядра этих уравнений принимают очень сложный вид, что затрудняет численное или приближенное решение указанных уравнений Недостаток указанного подхода — то, что наиболее интересующие практиков физические величины (например, коэффициент интенсивности напряжений) трудно выразить через решение полученного уравнения. Если приводить тройные интегральные уравнения к сингулярному интегральному, то эти трудности исчезают. Используя идею работы [23], покажем, как можно свести тройные интегральные уравнения к одному сингулярному. Причем решение тройных интегральных уравнений будет дано для двух случаев: а) растяжение тела, ослабленного кольцевой трещиной; б) кручение тела.

Тройные интегральные уравнения, которые описывают динамическое растяжение тела, содержащего кольцевую трещину, записываются в виде (например, [24])

$$\int_0^\infty A(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi = 0 \qquad (0 < r < a,\ b < r < \infty),$$

$$\int_0^\infty \xi F(\xi) A(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi = f_1(r) \qquad (a < r < b), \tag{6.75}$$

где $A(\xi)$ — искомая функция; $J_0(\xi)$ — функция Бесселя первого рода; $f_1(r)$ — функция, зависящая от усилий, прикладываемых к берегам трещины; a и b — внутренний и внешний радиусы кольцевой трещины; $F(\xi)$ — функция, которая зависит от геометрических параметров задачи

Первое из уравнений (6.75) можно интерпретировать как смещение $u_z(r, 0)$ на продолжении плоскости трещины. Продолжим это уравнение на

весь диапазон $0 < r < \infty$

$$u_z(r, 0) = \int_0^\infty A(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi.$$

Дифференцируя указанное соотношение по r и применяя после этого формулу обратного преобразования Ханкеля, имеем

$$A(\xi) = -\int_a^b \tau\varphi(\tau) J_1(\xi\tau)\, d\tau, \tag{6.76}$$

где $\varphi(\tau) = \frac{\partial}{\partial r} u_z(r, 0)$.

В дальнейшем для расчета будут нужны интегралы

$$H_{ij}(r, \tau) = \int_0^\infty J_i(r\xi) J_j(\xi\tau)\, d\xi \quad (i, j = 0, 1).$$

Если использовать значения этих интегралов, то можно записать

$$H_{00}(r, \tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} K\left(\frac{\tau}{r}\right) & (\tau < r), \\ \frac{2}{\pi\tau} K\left(\frac{r}{\tau}\right) & (\tau > r), \end{cases} \qquad H_{01}(r, \tau) = \begin{cases} 0 & (\tau < r), \\ \frac{1}{\tau} & (\tau > r), \end{cases}$$

$$H_{10}(r, \tau) = \begin{cases} 0 & (\tau > r), \\ \frac{1}{2} & (\tau < r), \end{cases} \tag{6.77}$$

$$H_{11}(r, \tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\tau}\left[K\left(\frac{\tau}{2}\right) - E_J\left(\frac{\tau}{r}\right)\right] & (\tau < r), \\ \frac{2}{\pi r}\left[K\left(\frac{r}{\tau}\right) - E_J\left(\frac{r}{\tau}\right)\right] & (t > r). \end{cases}$$

Используя соотношения (6.77), нетрудно убедиться, что первые два уравнения (6.75) будут удовлетворяться автоматически, если функиця $\varphi(\tau)$ подчиняется условию

$$\int_a^b \varphi(\tau)\, d\tau = 0.$$

Физическая природа функции $F(\xi)$ такова что

$$\lim_{\xi \to \infty} F(\xi) = q_1 + O(\xi^{-2}). \tag{6.78}$$

Тогда, используя выражения (6.75), (6.76) и (6.78), можно записать

$$q_1 \int_a^b \tau\varphi(\tau) \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) J_1(\xi\tau)\, d\xi d\tau + \int_a^b \tau\varphi(\tau) \int_0^\infty \xi [F(\xi) -$$

$$- q_1] J_1(\xi r) J_0(\xi r)\, d\xi d\tau = f_1(r). \qquad (6.79)$$

Первый из интегралов в соотношении (6.79) при $r \to \tau$ имеет две особенности (типа Коши и логарифмическую), которые выделим при помощи соотношений (6.77). После несложных преобразований получим сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{r-\tau} + \frac{1}{2r} \ln \left| \frac{2(r-\tau)}{b-a} \right| \right] \varphi(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_a^b [K_{11}(r, \tau) + K_{12}(r, \tau)]\, \varphi(\tau)\, d\tau = -\frac{f(r)}{q_1}, \qquad (6.80)$$

где

$$\frac{\pi}{q_1} K_{11}(r, \tau) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2K\left(\frac{\tau}{r}\right)}{r} - \dfrac{E_J\left(\frac{\tau}{r}\right)}{r+\tau} - \dfrac{E_J\left(\frac{\tau}{r}\right) - 1}{r-\tau} + \dfrac{1}{2r} \ln \left| \dfrac{2(r-\tau)}{b-a} \right| & (\tau < r), \\ \dfrac{E_J\left(\frac{r}{\tau}\right)}{r+\tau} - \dfrac{E_J\left(\frac{r}{\tau} - 1\right)}{r-\tau} + \dfrac{1}{2r} \ln \left| \dfrac{2(r-\tau)}{b-a} \right| & (\tau > r), \end{cases} \qquad (6.81)$$

$$K_{12}(r, \tau) = \frac{\tau}{q_1} \int_0^\infty \xi [F(\xi) - q_1] J_0(\xi r) J_1(\xi\tau)\, d\xi.$$

Через решение уравнения (6.80) легко можно выразить все компоненты напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины.

Рассмотрим частный случай уравнений (6.80), когда эти тройные интегральные уравнения вырождаются в дуальные, т. е. $a = 0$. Для этого нужно распространить определение неизвестной функции $\varphi(\tau)$ и ядер (6.81) на область $-\infty < r < 0$, $-\infty < \tau < 0$.

Применение метода сингулярных интегральных уравнений к осесимметрическим задачам о кручении проиллюстрируем на задаче об импульсном нагружении бесконечного тела, ослабленного кольцевой трещиной [12]. Рассмотрим бесконечное однородное упругое тело, ослабленное плоской кольцевой трещиной. Цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ выбираем так, чтобы плоскость трещины находилась в координатной плоскости $z = 0$, а внутренний и внешний радиусы соответственно были равны a и b.

Компоненты вектора перемещения вдоль осей r, φ и z обозначим через u_r, u_φ, u_z соответственно. При кручении $u_r = u_z = 0$, $u_\varphi = u_\varphi(r, z, t)$. Соответствующее после напряжений имеет вид

$$\tau_{r\varphi}(r, z, t) = G\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)$$

$$\tau_{\varphi z}(r, z, t) = G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}.$$

Все остальные компоненты напряжений обращаются в нуль. В данном случае уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}. \tag{6.82}$$

Уравнения (6.82) должны удовлетворять нулевым начальным условиям и следующим граничным условиям:

$$\tau_{\varphi z}(r, 0, t) = -\tau_0 H_0(t)/b \quad (a < r < b), \tag{6.83}$$

$$u_\varphi(r, 0, t) = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant a,\ b < r), \tag{6.84}$$

где постоянная τ_0 имеет размерность напряжений; $H_0(t)$ — единичная функция Хевисайда. При решении задачи следует также учитывать, что $u_\varphi \to 0$ при $(r^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$. Вследствие симметрии граничных условий относительно плоскости $z = 0$ будем решать задачу только в верхнем полупространстве $z \geqslant 0$.

Для решения поставленной таким образом задачи воспользуемся преобразованием Лапласа по времени. Применив к уравнению (6.82) интегральное преобразование Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \overline{u_\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{u_\varphi}}{\partial r} - \frac{\overline{u_\varphi}}{r^2} + \frac{\partial^2 \overline{u_\varphi}}{\partial z^2} = n^2\overline{u_\varphi}, \tag{6.85}$$

где $\overline{u}_\varphi$ — трансформанта Лапласа от u_φ; $n^2 = p^2/c_2^2$; p — параметр интегрального преобразования Лапласа.

Решение уравнения (6.85), удовлетворяющее условию Зоммерфельда, выбираем в виде

$$\overline{u}_\varphi = \int_0^\infty \xi A(\xi, p)\, e^{-\beta z} J_1(\xi r)\, d\xi, \tag{6.86}$$

где $A(\xi, p)$ — искомая функция; $J_1(\xi r)$ — функция Бесселя первого рода; $\beta = \sqrt{\xi^2 + n^2}$.

После применения к граничным условиям (6.83) и (6.84) преобразования Лапласа они запишутся в виде

$$\begin{gathered} \overline{\tau}_{\varphi z}(r, 0, t) = -\tau_0 r/(bp) \quad (a < r < b), \\ \overline{u}_\varphi(r, 0, t) = 0 \quad (0 < r < a,\ b < r). \end{gathered} \tag{6.87}$$

Используя уравнения (6.82), (6.86) и (6.87), сводим решение задачи к решению тройных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \xi^2 A(\xi, p) J_1(\xi, r)\, d\xi = \int_0^\infty \xi g(\xi, p) A(\xi, p) J_1(\xi r)\, d\xi + \\ + (\tau_0/Gp)(r/b) \quad (a < r < b), \\ \int_0^\infty \xi A(\xi, p) J_1(\xi r)\, d\xi = 0 \quad (0 < r < a,\ b < r), \end{gathered} \tag{6.88}$$

где $g(\xi, p) = \xi - \beta$.

Для того чтобы решить эти уравнения введем вспомогательную функцию, определяемую через смещения точек поверхности трещины

$$
\begin{aligned}
& r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\bar{u}_{\varphi}\right) = \varphi(r, p) \quad (a < r < b), \\
& r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\bar{u}_{\varphi}\right) = 0 \quad (0 < r < a,\ b < r).
\end{aligned} \tag{6.89}
$$

С помощью этой функции искомая функция A (ξ, p) представляется в виде

$$
\xi A(\xi, p) = -\int_a^b \tau\varphi(\tau, p) J_2(\xi\tau)\, d\tau. \tag{6.90}
$$

При таком представлении функции A (ξ, p) второе из уравнений (6.88) удовлетворяется автоматически, если на функцию φ (τ, p) наложить условие

$$
\int_a^b \frac{1}{\tau}\varphi(\tau, p)\, d\tau = 0. \tag{6.91}
$$

Подстановка выражения (6.90) в первое из уравнений (6.88) приводит к сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$
\int_a^b \tau\varphi(\tau, p)\left[R_0(r, \tau) + R_1(r, \tau)\right] d\tau = -\frac{\tau_0 r}{Gpb} \quad (a < r < b), \tag{6.92}
$$

где

$$
R_0(r, \tau) = \int_0^\infty \xi J_1(\xi, r) J_2(\xi\tau)\, d\xi; \tag{6.93}
$$

$$
R_1(r, \tau) = -\int_0^\infty g(\xi, p) J_1(\xi, r) J_2(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{6.94}
$$

Использовав соотношения (6.77), уравнение (6.93) можно записать в виде

$$
R_0(r, \tau) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi r^2}\left[K\left(\dfrac{\tau}{r}\right) - E_J\left(\dfrac{\tau}{2}\right)\right] + \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{E_J(\tau/r)}{\tau^2 - r^2} \quad (\tau < r), \\ \dfrac{4}{\pi r\tau}\left[K\left(\dfrac{\tau}{r}\right) - E_J\left(\dfrac{r}{\tau}\right)\right] + \dfrac{2}{\pi r\tau}\left[\dfrac{\tau^2}{\tau^2 - r^2} E_J\left(\dfrac{r}{\tau}\right) - \right. \\ \left. - K\left(\dfrac{r}{\tau}\right)\right] \quad (\tau > r). \end{cases} \tag{6.95}
$$

Исследуем полученные ядра (6.94) и (6.95). Ядро R_0 (r, τ), содержащее логарифмическую особенность и особенность типа Коши, после выделения их может быть записано в следующем виде:

$$
R_0(r, \tau) = \frac{1}{\pi\tau^2}\left[\frac{r}{\tau - r} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{2(\tau - r)}{b - a}\right| + M_0(r, \tau)\right], \tag{6.96}
$$

где

$$M_0(r,\tau)=\left(\frac{r}{\tau+r}-\frac{2\tau}{r}\right)E_J\left(\frac{r}{\tau}\right)+\frac{r}{\tau-r}\left[E_J\left(\frac{r}{\tau}\right)-1\right]+$$
$$+\frac{2\tau}{r}K\left(\frac{r}{\tau}\right)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{2(\tau-r)}{b-a}\right|\quad(\tau>r),$$
(6.97)
$$M_0(r,\tau)=\left[\frac{r^2}{\tau(\tau+r)}-2\right]E_J\left(\frac{\tau}{r}\right)+\frac{r}{\tau-r}\left[\frac{r}{\tau}E_J\left(\frac{\tau}{r}\right)-1\right]+$$
$$+4K\left(\frac{\tau}{r}\right)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{2(\tau-r)}{b-a}\right|\quad(\tau<r).$$

Ядро $R_1(r,\tau)$ — плохо сходящийся интеграл. Чтобы представить его в виде интегралов, которые легко вычисляются, рассмотрим такие контурные интегралы:

$$I_{C_1}=$$
$$=\oint_{C_1}L(\beta,z)\,J_2(z,\tau)\,\varkappa_1^{(1)}(r,z)\,dz\quad(\tau<r),$$
(6.98)
$$I_{C_2}=$$
$$=\oint_{C_2}L(\beta,z)\,J_2(z,\tau)\,\varkappa_1^{(2)}(r,z)\,dz\quad(\tau<r),$$

где $L(\beta,z)=z-\beta=z-\sqrt{z^2+n^2}$; контуры C_1 и C_2 определены на рис. 6.7. Интегралы (6.98) удовлетворяют на неограниченно расширяющихся четвертях окружностей условиям леммы Жордана. Поэтому можно записать

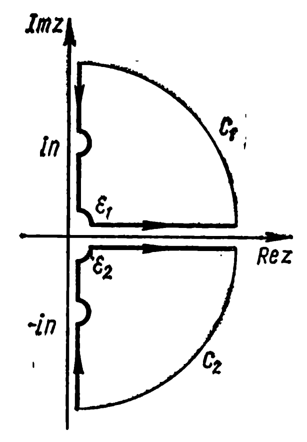


Рис. 6.7. Контур интегрирования в (6.98).

$$I_{C_1}=\int_0^\infty(\xi-\rho)\,J_2(\xi\tau)\,H_1^{(1)}(\xi r)\,d\xi+I_{\varepsilon_1}+\int_\infty^n\{(i\xi-i\nu')\times$$
$$\times J_2(i\xi\tau)\,H_1^{(1)}(i\xi r)\,i\}\,d\xi+\int_n^0(i\xi-\nu)\,J_2(i\xi\tau)\,H_1^{(1)}(i\xi r)\,i\,d\xi,$$
(6.99)
$$I_{C_2}=\int_0^\infty(\xi-\beta)\,J_2(\xi\tau)\,H_1^{(2)}(\xi r)\,d\xi+I_{\varepsilon_2}-i\int_{-\infty}^{-n}\{(-i\xi+i\nu')\times$$
$$\times J_2(-i\xi\tau)\,H_1^{(2)}(-i\xi r)\}\,d\xi+i\int_{-n}^0(i\xi+\nu)\,J_2(-i\xi\tau)\,H_1^{(2)}(-i\xi r)\,d\xi,$$

где I_{L_1} и I_{L_2} — интегралы по контурам ε_1 и ε_2 (см. рис. 6. 7); $\nu = \sqrt{n^2 - \xi^2}$; $\nu' = \sqrt{\xi^2 - n^2}$. При $\tau < r$ также можно выписать соотношения, подобные (6.99). Поскольку $I_{C_1} + I_{G_2} = 0$, то ядро $R_1(r, \tau)$ может быть записано в виде

$$R_1(r, \tau) = -\frac{2}{\pi}\left[\int_0^n \xi K_2(\xi\tau) I_1(\xi r)\, d\xi + \int_n^\infty \{(\xi - \nu') K_2(\xi\tau) I_1(\xi r)\}\, d\xi\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(I_{\varepsilon_1} + I_{\varepsilon_2}) \quad (r < \tau), \tag{6.100}$$

$$R_1(r, \tau) = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^n \xi K_1(\xi r) I_2(\xi\tau)\, d\xi + \int_n^\infty \{(\xi - \nu') I_2(\xi\tau) K_1(\xi r)\}\, d\xi\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(I_{\varepsilon_1} + I_{\varepsilon_2}) \quad (r > \tau).$$

При $k > \tau$ $I_{\varepsilon_1} + I_{\varepsilon_2} = 0$, а при $r < \tau$

$$I_{\varepsilon_1} = \lim_{r_1 \to 0} \int_{\pi/2}^{0} L(\beta, r_1 e^{i\theta}) H_2^{(1)}(\tau r_1 e^{i\theta}) J_1(r r_1 e^{i\theta})\, i r_1 e^{i\theta} d\theta = \frac{nr}{\tau^2},$$

$$I_{\varepsilon_2} = \lim_{r_2 \to 0} \int_{\pi/2}^{0} L(\beta, r_2 e^{i\theta}) H_2^{(2)}(\tau r_2 e^{i\theta}) J_1(r r_2 e^{i\theta})\, i r_2 e^{i\theta} d\theta = \frac{nr}{\tau^2}.$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$R = \frac{r}{b} = \frac{1 - \upsilon}{s} + \frac{1 + \upsilon}{s}, \quad S = \frac{\tau}{b} = \frac{1 - \upsilon}{2}\tau' + \frac{1 + \upsilon}{2}, \tag{6.101}$$

$$\upsilon = \frac{a}{b}, \quad k = nb, \quad \Phi(\tau, k) = \frac{S\varphi(\tau, p)\,\tau_0}{G}.$$

Тогда интегральные уравнения (6.92) и условие (6.91) с учетом выражений (6.96) и (6.101) запишутся в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\tau' - s} - \frac{3(1 - \upsilon)}{4R}\ln|\tau' - s| + K(s, \tau')\right]\Phi(\tau', n)\, d\tau' = -1$$

$$(-1 \leqslant s \leqslant 1), \tag{6.102}$$

$$\int_{-1}^{1}\Phi(\tau', n)\, d\tau' = 0,$$

где ядро $K(s, \tau')$ — непрерывная функция в области $-1 \leqslant s,\ \tau' \leqslant 1$ и представляется в виде

$$K(s, \tau') = \frac{1 - \upsilon}{2R}\left[M_0(r, \tau) + S^2 M_1(s, \tau')\right], \tag{6.103}$$

$$M_1(s,\tau') =$$

$$= \begin{cases} -2k^2 \int\limits_0^\infty [\xi - \upsilon H(\xi-1)]\, I_1(\xi kR)\, K_2(\xi kS)\, d\xi + \dfrac{\pi kR}{S^2} & (s<\tau'), \\ 2k^2 \int\limits_0^\infty [\xi - \upsilon H(\xi-1)]\, I_2(\xi kS)\, K_1(\xi kR)\, d\xi & (s>\tau'). \end{cases}$$

Интегральное уравнение (6.102) будем решать методом, предложенным в работе [19]. Для этого искомую функцию запишем в виде

$$\Phi(\tau', k) = \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(\tau')\right) [1-(\tau')^2]^{-1/2}, \qquad (6.104)$$

где $T_n(\tau')$ — полиномы Чебышева первого рода; A_n — неизвестные константы. Если подставить функцию (6.104) во второе уравнение (6.102), то получим, что $A_0 = 0$. Подстановка же (6.104) в первое уравнение (6.102) приводит к следующей системе алгебраических уравнений, относительно неизвестных A_n ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{kn} + \alpha_{kn} + \beta_{kn}) A_n = -\delta_{1k}, \qquad (6.105)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \\ &\alpha_{kn} = \frac{3(1-\upsilon)}{2n\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{R} T_n(s)\, u_{k-1}(s)\, (1-s^2)^{1/2} ds, \\ &\beta_{kn} = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} u_{k-1}(s)\, (1-s^2)^{1/2} ds \int\limits_{-1}^{1} T_n(\tau')\, K(s,\tau')\, [1-(\tau')]^{1/2} d\tau'. \end{aligned}\right\} \qquad (6.106)$$

Здесь $u_{k-1}(s)$ — полиномы Чебышева второго рода. Интегралы в формулах (6.106) легко вычислить с помощью квадратурных формул Гаусса—Чебышева

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \quad \left(x_i = \cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \sin^2\frac{i\pi}{N+1} f(x_i) \quad \left(x_i = \cos\frac{\pi i}{N+1}\right).$$

Для определения поля динамических напряжений в окрестности вершины трещины надо применить обратное преобразование Лапласа к вы-

ражениям $\bar{\tau}_{r\varphi}(r, z, p)$ и $\bar{\tau}_{\varphi z}(r, z, p)$, получаемым подстановкой решения (6.86) в уравнение (6.82). Сингулярные напряжения получаются в результате разложения при больших ξ подынтегральных функций в интегралах для $\bar{\tau}_{r\varphi}(r, z, p)$ и $\bar{\tau}_{\varphi z}(r, z, p)$. Используя теорему о поведении интегралов Коши вблизи концов контура интегрирования при выполнении

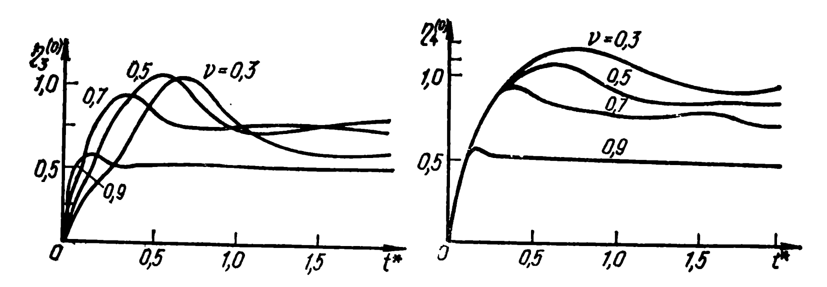


Рис. 6.8. Зависимость $\eta_3^{(0)} = K_{III\text{д}A}/K_{III}$ от $t^* = c_2t/a$ при $f(t) = H(t)$.

Рис. 6.9. Зависимость $\eta_4^0 = K_{III\text{д}B}/K_{III}$ от t^*.

обратного преобразования Лапласа, определяем динамические сингулярные напряжения в окрестности вершины трещины:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{r\varphi}(r, z, t) &= \frac{K_{III\text{д}A}(t^*)}{\sqrt{2\pi r_A}}\cos\frac{\theta_A}{2} + \frac{K_{III\text{д}B}(t^*)}{\sqrt{2\pi r_B}}\sin\frac{\theta_B}{2},\\ \tau_{\varphi z}(r, z, t) &= \frac{K_{III\text{д}A}(t^*)}{\sqrt{2\pi r_A}}\sin\frac{\theta_A}{2} + \frac{K_{III\text{д}B}(t^*)}{\sqrt{2\pi r_B}}\cos\frac{\theta_B}{2},\end{aligned}\right\} \quad (6.107)$$

где $K_{III\text{д}A}(t^*)$ и $K_{III\text{д}B}(t^*)$ — динамические коэффициенты интенсивности напряжений для внутреннего и внешнего контуров трещины соответственно, которые определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned}K_{III\text{д}A}(t^*) &= \lim_{r\to a-}\sqrt{2\pi(a-r)}\,\sigma_{\varphi z}(r, 0, t^*) = \frac{\tau_0\sqrt{b}}{2i\sqrt{2\pi}}\,\upsilon\sqrt{1-\upsilon^2}\times\\ &\times\int\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n e^{-pt^*}dp,\\ K_{III\text{д}B}(t)^* &= \lim_{r\to b+}\sqrt{2\pi(r-b)}\,\sigma_{\varphi z}(r, 0, t^*) =\\ &= -\frac{\tau_0\sqrt{b(1-\upsilon^2)}}{2i\sqrt{2\pi}}\int\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-pt^*}dp.\end{aligned}\right\} \quad (6.108)$$

Здесь $t^* = c_2t/b$ — безразмерное время; r_A, θ_A и r_B, θ_B — полярные ко-

ординаты с началом во внутренней и внешней вершинах трещины соответственно:

$$r_A = \sqrt{(r-a)^2+z^2};\ \theta_A = \operatorname{arctg}\frac{z}{r-a};\qquad r_B = \sqrt{(r-b)^2+z^2};$$

$$\theta_B = \operatorname{arctg}\frac{z}{r-a}.$$

Интегралы в выражениях (6.108) рассматриваются по контуру Бромвича. На рис. 6.8 и 6.9 показаны графические зависимости величин $\eta_3^0 = K_{III дA}/K_{III}$ и $\eta_4^0 = K_{III дB}/K_{III}$ от безразмерного времени t^* при $v = 0{,}3, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}9$ ($K_{III} = (^4/_3\pi)\,\tau_0\sqrt{b}$ — статический аналог задачи при $v = 0$). Анализ численного решения (при всех v) показывает, что динамический коэффициент интенсивности напряжений увеличивается, достигая при некотором значении безразмерного времени t^* максимума, и потом колеблется около статического значения со все уменьшающейся амплитудой.

Аналогично, как и для случая продольных волн, интегральное уравнение (6.102) и ядра (6.103) можно записать и для случая, когда $a = 0$.

Все представленные выше методы применимы для плоских и осесимметрических задач. Метод, представленный ниже, можно применять как для двух- [20], так и для трехмерных задач [25].

6.5. Метод двухмерных интегральных преобразований Фурье в трехмерных динамических задачах теории трещин

Пусть $Oxyz$ прямоугольная декартова система координат. Трещина бесконечной длины и конечной ширины размещена, как показано на рис. 6.10. Координаты x, y, z, представленные на рис. 6.10, нормированы к полуширине трещины. Так как поля напряжений и перемещений зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$ (здесь ω — частота колебаний), то в дальнейшем будем его опускать. Граничные условия исследуемой задачи можно записать в виде [25]

$$\frac{1}{2G}\sigma_{zz}(x, y, 0) = -P(x, y)\ (|x| < 1, |y| < \infty),$$
$$u_z(x, y, 0) = 0\quad (|x| > 1,\ |y| < \infty),$$
$$\sigma_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0$$
$$(|x| < \infty,\ |y| < \infty). \tag{6.109}$$

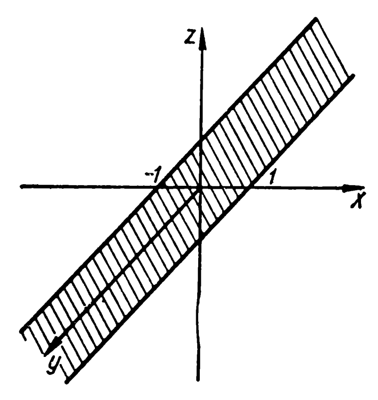


Рис. 6.10. Схематическое изображение сечения плоскостью пространства с полосообразной трещиной.

Трехмерные уравнения Ляме для гармонических колебаний записываются в виде

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \rho\omega^2 u_i, \tag{6.110}$$

где $i, j = x, y, z$, а суммирование ведется по немому индексу. Напряжения в теле определяются через решение (6.110) в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{6.111}$$

где $i, j, k = x, y, z$.

Для решения поставленной задачи используем двухмерное экспоненциальное преобразование Фурье, которое определяется соотношениями

$$\begin{gathered} \bar{\bar{f}}(\xi, \eta, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy, \\ f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{f}}(\xi, \eta, z)\, e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{gathered} \tag{6.112}$$

Применим соотношения (6.112) к уравнению (6.110):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha_1^2 \xi^2 - \eta^2 + \beta^2\omega^2 \right) \bar{\bar{u}}_x - i\xi (\alpha_1^2 - 1) \frac{d\bar{\bar{u}}_z}{dz} - \xi\eta (\alpha_1^2 - 1) \bar{\bar{u}}_y = 0, \\ &- i\xi (\alpha_1^2 - 1) \frac{d\bar{\bar{u}}_x}{dz} + \left(\alpha_1^2 \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 - \eta^2 + \beta^2\omega^2 \right) \bar{\bar{u}}_z - i\eta (\alpha_1^2 - 1) \frac{d\bar{\bar{u}}_y}{dz} = 0, \\ &- \xi\eta (\alpha_1^2 - 1) \bar{\bar{u}}_x - i\eta (\alpha_1^2 - 1) \frac{d\bar{\bar{u}}_z}{dz} + \\ &+ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 - \alpha_1^2 \eta^2 + \beta^2\omega^2 \right) \bar{\bar{u}}_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.113}$$

где $\alpha_1^2 = (\lambda + 2G)/G$; $\beta^2 = \rho/G$.

После некоторых преобразований уравнения (6.113) перепишутся в виде

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - n_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - n_2^2 \right) \bar{\bar{u}}_i = 0 \quad (i = x, y, z), \tag{6.114}$$

где $n_1^2 = \xi^2 + \eta^2 - \frac{\beta^2\omega^2}{\alpha_1^2}$; $n_2^2 = \xi^2 + \eta^2 - \beta^2\omega^2$. Значения n_1 и n_2 — точки ветвления функций $\bar{\bar{u}}_x(\xi, \eta, z)$, $\bar{u}_y(\xi, \eta, z)$ и $\bar{\bar{u}}_z(\xi, \eta, z)$.

Исходя из симметрии граничных условий (6.109) относительно плос-

кости $z=0$. решение уравнений (6.114) запишем в виде

$$\bar{\bar{u}}_x(\xi, \eta, z) = A_1(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + B_1(\xi, \eta) e^{-n_2 z},$$
$$\bar{\bar{u}}_y(\xi, \eta, z) = A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + B_2(\xi, \eta) e^{-n_2 z}, \qquad (6.115)$$
$$\bar{\bar{u}}_z(\xi, \eta, z) = A_3(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + B_3(\xi, \eta) e^{-n_2 z}.$$

Подставим уравнения (6.115) в (6.113):

$$A_1(\xi, \eta) = i\xi A_2(\xi\eta)/n_1,$$
$$A_3(\xi, \eta) = i\eta A_2(\xi\eta)/n_1,$$
$$B_2(\xi, \eta) = -i[\xi B_1(\xi, \eta) + \eta B_3(\xi, \eta)]/n_2$$

и запишем их решение в виде

$$\bar{\bar{u}}_x(\xi, \eta, z) = \frac{i\xi}{n_1} A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + B_1(\xi, \eta) e^{-n_2 z},$$
$$\bar{\bar{u}}_y(\xi, \eta, z) = A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + \frac{i}{n_2}[\xi B_1(\xi, \eta) + \eta B_3(\xi, \eta)] e^{-n_2 z}, \qquad (6.116)$$
$$\bar{\bar{u}}_z(\xi, \eta, z) = \frac{i\eta}{n_1} A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} + B_3(\xi, \eta) e^{-n_2 z}.$$

Используя уравнения (6.111) и (6.116), получаем выражения для трансформант напряжений

$$\frac{1}{2G}\bar{\bar{\sigma}}_{zz}(\xi, \eta, z) = \frac{1}{2n_1}[\beta^2\omega^2 - 2(\xi^2 + \eta^2)] A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} +$$
$$+ i[\xi B_1(\xi, \eta) + \eta B_3(\xi, \eta)] e^{-n_2 z},$$
$$\frac{1}{2G}\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(\xi, \eta, z) = -i\xi A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} -$$
$$-\frac{1}{2n_2}[\xi\eta B_3(\xi, \eta) + (n_2^2 + \xi^2) B_1(\xi, \eta)] e^{-n_2 z}, \qquad (6.117)$$
$$\frac{1}{2G}\bar{\bar{\sigma}}_{yz}(\xi, \eta, z) = -i\eta A_2(\xi, \eta) e^{-n_1 z} -$$
$$-\frac{1}{2n_2}[\xi\eta B_1(\xi, \eta) + (n^2 + \eta^2) B_3(\xi, \eta)] e^{-n_2 z}.$$

На основании условий (6.109) можно записать

$$B_1(\xi, \eta) = -\frac{i\xi n_2}{\xi^2 + \eta^2 - \beta^2\omega^2/2} A_2(\xi, \eta),$$
$$B_2(\xi, \eta) = -\frac{i\eta n_2}{\xi^2 + \eta^2 + \beta^2\omega^2/2} A_2(\xi, \eta),$$

исходя из которых

$$A_2(\xi,\eta) = -\frac{2(\xi^2+\eta^2-\beta^2\omega^2/2)}{\beta^2\omega^2}\bar{\bar{u}}_z(\xi,\eta,0). \tag{6.118}$$

Тогда первые два граничных условия (6.109) дают интегральные уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{u}}_z(\xi,\eta,0)K(\xi,\eta)e^{-i\xi x}d\xi = -\bar{P}(x,\eta) \quad (|x|<1),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{u}}_z(\xi,\eta,0)e^{-i\xi x}d\xi = 0 \quad (|x|>1), \tag{6.119}$$

где

$$K(\xi,\eta) = 2\,\frac{(\xi^2+\eta^2-\beta^2\omega^2/2)^2-(\xi^2+\eta^2)n_1n_2}{\beta^2\omega^2 n_1}. \tag{6.120}$$

Пусть функция $P(x, y)$ в условии (6.109) будет четной относительно x. Тогда решение уравнений (6.119) представляется в виде ряда

$$\bar{u}_z(x,\eta,0) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n(\eta)P_{2n-2}^{(1/2,1/2)}(x)\sqrt{1-x^2} \quad (|x|<1),$$

$$\bar{u}_z(x,\eta,0) = 0 \quad (|x|>1), \tag{6.121}$$

где $a_n(\xi)$ — неизвестные коэффициенты; $P_n^{(1/2,1/2)}(x)$ — полиномы Якоби. Применим к ряду (6.121) интегральное преобразование Фурье по x

$$\bar{\bar{u}}_z(\xi,\eta,0) = 2\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(\eta)\frac{\Gamma(2n-0{,}5)}{(2n-2)!}\frac{1}{\xi}J_{2n-1}(\xi), \tag{6.122}$$

где $\Gamma(n)$ и $J(\xi)$ — гамма-функция и функция Бесселя первого рода соответственно.

Проинтегрируем первое из уравнений (6.119) по x и после подстановки в него выражения (6.122) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\eta)\frac{2i(-1)^n\Gamma(2n-0{,}5)}{\sqrt{\pi}(2n-2)!}\int_0^{\infty}\frac{1}{\xi^2}J_{2n-1}(\xi)K(\xi,\eta)\sin\xi x\,d\xi =$$

$$= \int_0^x P(x,\eta)\,dx \quad (|x|<1). \tag{6.123}$$

Коэффициенты $a_n(\eta)$ могут быть найдены из уравнения (6.123) методом Шмидта [1]. Для этого перепишем его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\eta)E_n(x,\eta) = -u(x,\eta) \quad (|x|<1), \tag{6.124}$$

где $E_n(x, \eta)$ и $u(x, \eta)$ — известные функции.

Система функций $Q_n(x, \eta)$, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_0^1 Q_m(x, \xi) Q_n(x, \xi) dx = N_n \delta_{mn} \quad (6.125)$$

$\left(\text{здесь } N_n = \int_0^1 Q_n(x, \xi) dx; \ \delta_{mn} \text{ — символ Кронекера}\right)$, может быть построена с помощью функций $E_n(x, \xi)$ следующим образом:

$$Q_n(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{in}}{M_{nn}} E_i(x, \xi). \quad (6.126)$$

В последнем уравнении M_{in} определяется как алгебраическое дополнение элемента d_{in} определителя D_n, который имеет вид

$$D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \dots d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} \dots d_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ d_{n1} & d_{n2} \dots d_{nn} \end{vmatrix}$$

а его элементы можно записать как $d_{in} = \int_0^1 E_i(x, \xi) E_n(x, \xi) dx$. Используя записи (6.124) и (6.126) определяем коэффициенты

$$a_n(\eta) = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{M_{nj}}{M_{jj}}, \quad (6.127)$$

где $q_j = -\frac{1}{N_j} \int_0^1 u(x, \eta) Q_j(x, \eta) dx$.

По коэффициентам $a_n(\xi)$ легко найти коэффициенты интенсивности напряжений. Для этого введем полярные координаты

$$x = 1 + r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi \quad (6.128)$$

и рассмотрим поведение напряжений при малых радиусах r. Для таких случаев можно записать

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{xx}\sin^2\varphi + \sigma_{zz}\cos^2\varphi - 2\sigma_{xz}\sin\varphi\cos\varphi. \quad (6.129)$$

Использовав значения (при малых r) интегралов

$$\int_0^\infty \xi J_{2n-1}(\xi) e^{-\xi z}(\cos\xi x + i\sin\xi x) d\xi = \frac{(-1)^n}{(2r)^{3/2}}\left(\sin\frac{3\varphi}{2} + \right.$$

$$\left. + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right) + O(1).$$

$$\int_0^\infty J_{2n-1}(\xi)\, e^{-\xi z} (\cos \xi x + i \sin \xi x)\, d\xi = \frac{(-1)^n}{(2r)^{1/2}} \times$$

$$\times \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}\right) + O(1),$$

выражение (6.129) можно записать в виде

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{2G} \sqrt{2\pi r} = -\frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n-0{,}5)}{(2n-2)!} \left[\cos \frac{\varphi}{2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \frac{3\varphi}{2} \times$$

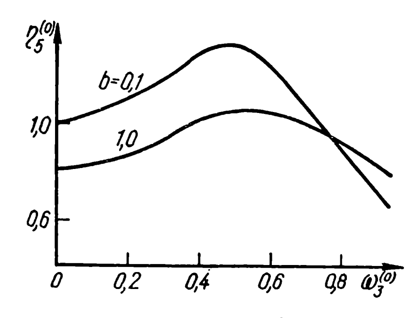


Рис. 6.11. Зависимость $\eta_5^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}\sqrt{2r}/(2GP)$ от $\omega_3^{(0)} = \beta\omega/\alpha$.

$$\left.\times (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \frac{3\varphi}{2}\right] \int_0^\infty Q_n(\xi) \cos \xi y dy. \quad (6.130)$$

Численные расчеты проводились для функции $P(x, y)$, заданной

$$P(x, y) = P/(1 + b^2 y^2),$$

где P и b — постоянные величины. На рис. 6.11 представлены результаты вычислений при $b = 0{,}1$ и $b = 1{,}0$.

6.6. Решение задачи об установившихся колебаниях неограниченной плоскости с периодической системой разрезов вдоль оси методом парных тригонометрических рядов

Для ознакомления с различными математическими методами решения динамических задач механики разрушения рассмотрим метод Швингера [26]. В нем используется простая схема возмущения, основа которой состоит в возможности получения решения соответствующей системы нулевого порядка (статический случай). В отличие от обычных схем возмущения данная схема не требует решения ряда последовательных систем. Для некоторого фиксированного порядка возмущения должны решаться только парные ряды. Метод обладает достаточной общностью и может быть использован в других задачах математической физики, сводящихся к парным тригонометрическим рядам.

Полученный на основе этого метода динамический коэффициент интенсивности напряжений в данной задаче может быть выражен через статический коэффициент интенсивности напряжений, умноженный на некоторый множитель, зависящий от постоянных материала, длины трещины и

частоты циклической нагрузки. Этот множитель определяется из матрицы N-го порядка, причем с увеличением N этот множитель можно сделать сколь угодно близким к точному значению. Численные расчеты показывают, что хорошую точность можно получить и для небольших значений N.

Пусть на каждой из трещин (рис. 6.12) действует переменная нагрузка $\sigma_{yy} = -q \exp(-i\omega t)$, где q — амплитуда колебаний нагрузки. Предположим, что частота ω мала по сравнению со скоростью поперечных и продольных волн c_2 и c_1. С учетом симметрии относительно действительной оси рассмотрим полубесконечную плоскость $y \leqslant 0$ [27].

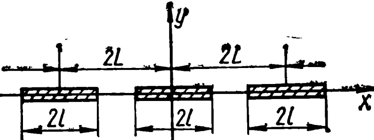


Рис. 6.12. Схематическое изображение плоскости с периодической системой прямолинейных трещин.

Краевые условия при $y = 0$, $t > 0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) определяются выражениями

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = \sigma_{yy}(x + 2k\pi, 0, t) = -qe^{-i\omega t} \quad (|x| < l), \tag{6.131}$$

$$\tau_{xy}(x, 0, t) = \tau_{xy}(x + 2k\pi, 0, t) = 0 \quad (|x| < \pi), \tag{6.132}$$

$$u_y(x, 0, t) = u_y(x + 2k\pi, 0, t) = 0 \quad (l < |x| < \pi). \tag{6.133}$$

В дальнейших выкладках множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Амплитудные значения перемещений u_x и u_y удовлетворяют уравнениям

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u_x, \tag{6.134}$$

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = -\frac{\omega^2}{c_2^2}u_y.$$

Если ввести конечные преобразования Фурье

$$\bar{u}_x(s, y) = \int_0^\pi u_x(x, y)\sin sx dx,$$
$$\bar{u}_y(s, y) = \int_0^\pi u_y(x, y)\cos sx dx, \tag{6.135}$$

где s — параметр преобразования Фурье, то уравнения (6.134) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\bar{u}_x}{dy^2} + s^2\left[\omega_2^2 - \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\right]\bar{u}_x = \frac{s}{1-2\mu}\frac{d\bar{u}_y}{dy}$$
$$\frac{d^2\bar{u}_y}{dy^2} - s^2[1-\omega_2^2]\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{d\bar{u}_y}{dy} = -\frac{s}{2(1-\mu)}\frac{d\bar{u}_x}{dy}, \tag{6.136}$$

где $\omega_i = \omega (sc_i)^{-1}$ $(i = 1, 2)$. Уравнения (6.136) могут быть записаны в форме

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \left(s - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\right]\left[\frac{d^2}{dy^2} - \left(s^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\right]\begin{Bmatrix} u_x(s, y) \\ u_y(s, y)\end{Bmatrix} = 0,$$

а их решения — в виде

$$\bar{u}_x(s, y) = a_{s1}e^{s\Omega_1 y} + a_{s2}e^{s\Omega_2 y},$$

$$\bar{u}_y(s, y) = a_{01}\cos\frac{\omega y}{c_1} + a_{02}\sin\frac{\omega y}{c_1} - a_{s1}\Omega_1 e^{s\Omega_1 y} - a_{s2}\Omega_2^{-1}e^{s\Omega_2 y},$$

где $\Omega_i = (1 - \omega_i)^{1/2}$ $(i = 1, 2)$; a_{01}, a_{02}, a_{s1}, a_{s2} — константы. Выражения (6.135) после обращения имеют следующий вид:

$$u_x(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(a_{s1}e^{s\Omega_1 y} + a_{s2}e^{s\Omega_2 y})\sin sx,$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi}\left[a_{01}\cos\frac{\omega y}{c_1} + a_{02}\sin\frac{\omega y}{c_1}\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(-a_{s1}\Omega_1 e^{s\Omega_1 y} - a_{s2}\Omega_2^{-1}e^{s\Omega_2 y}). \quad (6.137)$$

Из условия (6.132)

$$a_{s1}\Omega_1\Omega_2 = -a_{s2}(1 - \omega_2^2/2). \quad (6.138)$$

Теперь, полагая $y \to 0$, получаем краевые условия для нормальных напряжений и смещений:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{G\omega}{\pi c_1}a_{02} + \frac{2G}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}d_s F_s\cos sx,$$

$$\pi u_y(x, 0) = a_{01} + \sum_{s=1}^{\infty}d_s\cos sx, \quad (6.139)$$

где

$$d_s = -a_{s2}\omega_2^2\Omega_2^{-1}; \qquad F_s = \frac{2s}{\omega_2^2}\left[\Omega_2^2 - \Omega_1^{-1}\left(1 - \frac{\omega_2^2}{2}\right)^2\right] \quad (6.140)$$

для $s \geqslant 1$.

Удовлетворяя смешанным условиям (6.131)—(6.133), получаем парные ряды для нахождения неизвестных

$$\frac{2(1-\mu)G\omega}{(1-2\mu)\pi c_1}a_{02} + q + \frac{2G}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}d_s F_s\cos sx = 0 \quad (|x| \leqslant l),$$

$$a_{01} + \sum_{s=1}^{\infty}d_s\cos sx = 0 \quad (l \leqslant |x| \leqslant \pi), \quad (6.141)$$

где l — безразмерный параметр полудлины трещины.

Вследствие сложной природы величины F_s данные ряды не удается разрешить в общем случае в замкнутом виде. При $\omega \to 0$ задача преобразуется в статическую и может быть решена точно.

Условия ограниченности смещений удовлетворяются, если $\omega \neq c_R$. Разложим F_s по степеням $\omega^2/s^2c_1^2$ и $\omega^2/s^2c_2^2$:

$$F_s = \frac{1}{2(1-\mu)} s + O(1/s). \tag{6.142}$$

Следовательно,

$$F_s = \frac{1}{2(1-\mu)} s(\rho_s + 1). \tag{6.143}$$

Здесь функция ρ_s определяется на основании соотношения (6.140), в статическом случае $\rho_s \to 0$.

Найдем решения статической задачи методом Швингера и используем этот метод для установления схемы возмущения. Следует заметить, что разложение F_s (6.142) используется для получения нулевого приближения (статика). При $\rho_s = 0$

$$\begin{gathered} \frac{(1-\mu)\pi}{G} q + \sum_{s=1}^{\infty} s d_s \cos sx = 0 \quad (|x| < l), \\ a_{01} + \sum_{s=1}^{\infty} d_s \cos sx = 0 \quad (l < |x| < \pi). \end{gathered} \tag{6.144}$$

Пусть

$$\frac{(1-\mu)}{G} \pi q + \sum_{s=1}^{\infty} s d_s \cos sx = h_0(x) \quad (l < |x| < \pi), \tag{6.145}$$

где $\frac{G h_0(x)}{(1-\mu)\pi} - q$ — неизвестная функция напряжений $\sigma_{yy}(x, 0)$ на участке $l < |x| < \pi$.

Обращение (6.145) дает

$$\frac{(1-\mu)\pi q}{G} = \frac{1}{\pi} \int_l^{\pi} h_0(\tau)\, d\tau, \quad d_s = \frac{2}{\pi G} \int_0^{\pi} h_0(\tau) \cos sx d\tau. \tag{6.146}$$

Подставив выражение (6.146) в (6.144) и переменив порядок интегрирования и суммирования, получим следующее интегральное уравнение:

$$a_{01} + \frac{2}{\pi} \int_l^{\pi} h_0(\tau) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(sx)\cos(s\tau)}{s} d\tau = 0 \quad (l < |x| < \pi). \tag{6.147}$$

Ядро данного уравнения может быть просуммировано

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(sx)\cos(s\tau)}{s} = -\frac{1}{2} \ln 2 |\cos x - \cos\tau|. \tag{6.148}$$

Уравнение (6.147) — сингулярное интегральное с логарифмическим ядром (6.148), может быть решено обычным способом. В общем случае данной за-

дачи соответствующее интегральное уравнение не может быть сведено к такой простой форме Поэтому воспользуемся методом Швингера. Пусть

$$\cos x = b + b' \cos \xi, \quad \cos s\tau = b + b' \cos \eta. \tag{6.149}$$

Здесь b и b' — постоянные такие, что новые переменные ξ и η изменяются в области от 0 до π, тогда как x и τ изменяются от l до π. Следовательно, $b = (\cos l - 1)/2$, $b' = (\cos l + 1)/2$ Подставляем выражения (6.149) в (6.148):

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos sx \cos s\tau}{s} = -\frac{1}{2} \ln b' + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos s\xi \cos s\eta}{s}. \tag{6.150}$$

Из условия (6.149) следует, что

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\cos l - \cos \tau}}{\sin \tau/2}. \tag{6.151}$$

Неизвестные напряжения имеют особенность порядка 1/2 при $\tau \to l$. Таким образом, из равенства (6.151) вытекает, что $h_0(\tau(\eta))\, d\tau/d\xi$ удовлетворяет условиям Дирихле в области $0 < \xi < \pi$ и, учитывая симметричность задачи, можно записать

$$h_0(\tau) \frac{d\tau}{d\eta} = \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1} \cos(s_1 - 1)\eta \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi). \tag{6.152}$$

Подставляем выражения (6.150) и (6.152) в интегральное уравнение (6.147):

$$a_{01} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1} \cos(s_1 - 1)\eta\right] \left(-\frac{1}{2} \ln b' + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \cos \xi s \cos s\eta \right) d\eta = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi). \tag{6.153}$$

Используя условие ортогональности, приводим равенство (6.153) к виду

$$a_{01} - \gamma_1 \ln b' + \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s+1} \frac{\cos s\xi}{s} = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi). \tag{6.154}$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \frac{a_{01}}{\ln b'}, \quad \gamma_{s+1} = 0 \quad (s \geqslant 1). \tag{6.155}$$

Подстановка выражений (6.151), (6.155) в (6.152) дает

$$h_0(\tau) = \frac{a_{01}}{\ln b'} \frac{\sqrt{2} \sin \tau/2}{\sqrt{\cos l - \cos \tau}} \quad (l \leqslant \tau \leqslant \pi). \tag{6.156}$$

Неизвестный коэффициент a_{01} определяется подстановкой выражения

(6.156) в (6.146):

$$a_{01} = \frac{(1-\mu)\,\pi \ln b'}{G}\, q.$$

Тогда для нормальных напряжений получим

$$\sigma_{yy}(x, 0) = q\,\frac{\sqrt{2}\,\sin x/2}{\sqrt{\cos l - \cos x}} \quad (l \leqslant |x| \leqslant \pi). \tag{6.157}$$

Статический коэффициент интенсивности напряжений будет равен

$$K_{\mathrm{I}} = \lim_{x\to l} \sqrt{2\pi(x-l)}\,\sigma_{yy}(x, 0) = q\sqrt{2\pi \operatorname{tg} l/2}. \tag{6.158}$$

Из выражений (6.142) и (6.143) очевидно, что $\rho_n \sim O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ для больших n, и ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} sd_s \cos sx$ может рассматриваться как возмущение точного решения, приведенного выше. Ограничиваясь первыми N членами в уравнении (6.141) для возмущенного ряда, получаем

$$\frac{\pi(1-\mu)}{G}\left[\frac{2(1-\mu)\,G\omega}{(1-2\mu)\,\pi c_1}\,a_{02} + q\right] + \sum_{s=1}^{N} sd_s \cos(sx) + \\ + \sum_{s=1}^{N} sd_s\rho_s \cos(sx) = 0 \quad (0 \leqslant x < l). \tag{6.159}$$

Здесь ρ_s — см. формулу (6.143). Решение парных уравнений, которые образуют (6.159) и второе уравнение (6.141), будет являться приближением N-го порядка к решению уравнений (6.141). С увеличением N приближенное решение может быть сделано сколь угодно близким к точному. Как и прежде, обозначим левую часть ряда (6.159) через неизвестную функцию $h_N(x)$ для $l \leqslant |x| \leqslant \pi$. Условия равновесия дают

$$\frac{\pi(1-\mu)}{G}\, q = \frac{1}{\pi}\int_{l}^{\pi} h_N(x)\,dx. \tag{6.160}$$

Коэффициент a_{02} должен быть равен нулю из сравнения между собой уравнения (6.160) и обращения (6.159). После обращения выражения (6.159) записываются в виде

$$d_s = \frac{2}{\pi s}\int_{l}^{\pi} h_N(\tau)\cos(s\tau)\,d\tau \quad (s > N), \tag{6.161}$$

$$d_s = \left(1 - \frac{\rho_s}{1+\rho_s}\right)\frac{2}{\pi s}\int_{l}^{\pi} h_N(\tau)\cos(s\tau)\,d\tau \quad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя равенства (6.160) и (6.159) во второе уравнение (6.161), полу-

чаем интегральное уравнение для неизвестной функции

$$a_{01}+\frac{2}{\pi}\int_{l}^{\pi} h_N(\tau)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(sx)\cos(s\tau)}{s}\,d\tau-$$

$$-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho_s}{1+\rho_s}\frac{\cos(xs)}{s}\frac{2}{\pi}\int_{l}^{\pi} h_N(\tau)\cos(s\tau)\,d\tau=0. \qquad (6.162)$$

Воспользуемся переменными, определенными в условии (6.149), и заменим $\cos sx$ в конечных рядах (6.162) на

$$\cos sx(\xi)=\sum_{k=1}^{s+1}\beta_k^{(s)}\cos(k-1)\xi,$$

$$\cos s\tau(\xi)=\sum_{k=1}^{s+1}\beta_k^{(s)}\cos(k-1)\eta. \qquad (6.163)$$

Полагаем

$$h_N(\tau)\frac{d\tau}{d\eta}=\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m^{(N)}\cos(k-1)\eta. \qquad (6.164)$$

Подставляя выражения (6.164) и (6.163) в интегральное уравнение (6.162) и используя процедуру, примененную ранее, получаем

$$a_{01}-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\gamma_k^{(N)}\cos(k-1)\xi-\sum_{s=1}^{N}\frac{\rho_s}{1+\rho_s}\frac{1}{s}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{s+1}\beta_i^{(s)}\cos(\tau-1)\xi\right]\left(\sum_{j=1}^{s+1}\delta_j\beta_j^{(s)}\gamma_j^{(N)}\right)=0 \quad (0\leqslant\xi\leqslant\pi), \qquad (6.165)$$

где $\beta_1=\ln b'$; $\delta_1=2$; $\beta_k=-\dfrac{1}{k-1}$; $\delta_k=1$; $k=2,3,\dots$

Так как левая часть (6.165) равна нулю для всех значений ξ в интервале $(0,\pi)$, то каждый коэффициент при $\cos k\xi$ для $k=0,1,2,\dots$ в выражении (6.165) должен быть равен нулю. Следовательно,

$$\gamma_m^{(N)}=0 \quad (m>N+1) \qquad (6.166)$$

и $\gamma_m^{(N)}$ для $m=1,2,\dots,N+1$ могут быть определены из следующих $(N+1)$ обыкновенных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N+1}(\beta_i^{(s)}\delta_{ij}+A_{ij})\,\gamma_j^{(N)}=R_i \quad (i=1,2,\dots,N+1). \qquad (6.167)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера и $R_1 = a_{01}$, $R_i = 0$ при $i > 1$,

$$A_{ij} = \delta_j \sum_{s=}^{N} \beta_i^{(s)} \beta_j^{(s)} \frac{1}{s} \frac{\rho_s}{1+\rho_s}. \tag{6.168}$$

Из выражения (6.163), очевидно, следует $\beta_k^{(s)} = 0$ $(s > n+1)$. Подстановка $\gamma_m^{(N)}$ из формул (6.166) и (6.167) в (6.164) определяет неизвестную функцию

$$h_n[x(\xi)] = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^{(N)} \cos(m-1)\xi \frac{d\xi}{dx}, \tag{6.169}$$

где $\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{4-(1+\cos l)(l+\cos\xi)}{(1+\cos l)(l-\cos\xi)}}$.

Нормальные напряжения при $y = 0$ можно записать в виде

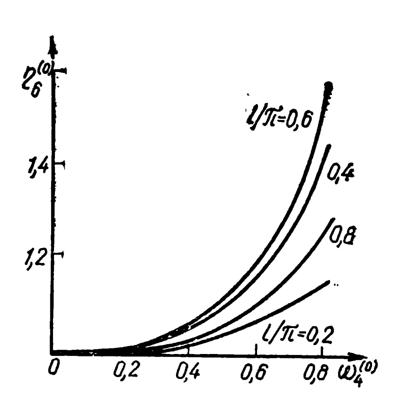


Рис. 6.13. Зависимость $\eta_6^{(0)} = K_{I\text{д}}/K_I$ от $\omega_4^{(0)} = \omega/c_2$.

$$\sigma_{yy}[X(\zeta), 0] = \frac{G}{\pi(1-\mu)} h_N[X(\xi)] - q =$$

$$= -q + q\left[\sum_{m=1}^{N+1} \gamma_m^{(N)} \cos(m-1)\xi\right] [\gamma_1^{(N)}]^{-1} \frac{d\xi}{dx} \quad (l \leqslant |x| \leqslant \pi). \tag{6.170}$$

Здесь использовано следующее соотношение:

$$\frac{q\pi(1-\mu)}{G} = \frac{1}{\pi} \int_l^{\pi} h_N(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h_N(\tau) \frac{d\tau}{d\xi} d\xi = \gamma_1^{(N)}. \tag{6.171}$$

Динамический коэффициент интенсивности определяется формулами

$$K_{I\text{д}} = \lim_{x \to l} \sqrt{2\pi(x-l)}\, \sigma_{yy}(x, 0), \tag{6.172}$$

$$\frac{K_{I\text{д}}}{K_I} = [\gamma_1^{(N)}]^{-1} \sum_{m=1}^{N+1} \gamma_m^{(N)}. \tag{6.173}$$

Для численных расчетов как первое приближение рассмотрим один член «возмущенного» ряда Сравнивая выражения (6.163) и (6.149), находим

$$\beta_1^{(1)} = b, \qquad \beta_2^{(1)} = b'. \tag{6.174}$$

Коэффициент $\gamma_1^{(1)}$ известен из соотношения (6.171). Оставшиеся два неизвестных коэффициента $a_2^{(1)}$ и a_{01} определяются из уравнений

$$\begin{bmatrix} \ln b' + 2b\rho_1/(1+\rho_1) & bb'\rho_1/(1+\rho_1) \\ 2bb'\rho_1\,(1+\rho_1) & -1+(b')^2\rho_1/(1+\rho_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{01} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6,175)$$

где ρ_1 дается формулой (6.143) при $s = 1$.

Аналогично можно получить второе, третье и т. д. приближения, а из выражений (6.163) — значения динамического коэффициента интенсивности напряжений для данных μ, ω, l. Результаты четырех таких приближений приведены на рис. 6.13 (при $\mu = 1/3$). Здесь показано отношение динамического коэффициента интенсивности к статическому как функция ω/c_2 для различных длин трещины. Это отношение монотонно увеличивается с ростом ω/c_2, а при $l/\pi = 0,6$ инерционный эффект достигает максимума.

6.7. Метод конечных элементов в динамических задачах теории трещин

Метод конечных элементов (МКЭ) показал свою эффективность в задачах как о неподвижных (установившиеся колебания тел с трещиноподобными дефектами, дифракция упругих волн в материале на трещинах), так и о движущихся трещинах. Значительные трудности, с которыми сопряжено решение подобных задач, вынуждают большинство исследователей ограничиться рамками двухмерных моделей для описания геометрии рассматриваемых образцов или элементов конструкций и линейной теории упругости для описания реологии материала Стремительное развитие электронно-вычислительной техники дает возможность уже сегодня решать некоторые задачи в трехмерной постановке с учетом нелинейного поведения материала. Поскольку работы в этом направлении еще только начинаются, в дальнейшем мы будем рассматривать лишь плоские задачи в упругой постановке согласно известным результатам.

Установившиеся колебания конечного тела с трещиной. Данный класс задач имеет две характерные особенности

1. При их решении предполагается, что берега трещины не контактируют друг с другом. Поэтому полученные решения можно полностью применять на практике, если воздействующая на трещину волновая нагрузка накладывается на статическое растягивающее поле напряжений большей амплитуды.

2. В отличие от статических или нестационарных динамических задач в данном случае нельзя непосредственно перенести на тела конечных размеров аналитические результаты, полученные для бесконечных тел, поскольку коэффициент интенсивности напряжений зависит от частоты не только падающей волны, но и свободных колебаний тела.

Уравнение (5.176) в случае воздействия гармонической нагрузки частотой ω и амплитудой $\{F\}$ на упругое тело без затухания принимает вид

$$[M]\{\ddot{\mathbf{Q}}\} + [K]\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{F}\}\,e^{i\omega t}. \quad (6.176)$$

При $\omega = 0$ получаем эквивалентную статическую задачу, описываемую уравнением (5.174).

Обозначим через ω_i собственные числа в порядке возрастания, а через $\{\mathbf{Q}^{(i)}\}$ — собственные векторы из обобщенной проблемы собственных значений

$$[K]\{\mathbf{Q}\} = \omega^2 [M]\{\mathbf{Q}\}, \tag{6.177}$$

$$\{\mathbf{Q}^{(i)}\}^{\text{т}} [M]\{\mathbf{Q}^{(j)}\} = \delta_{ij}.$$

Здесь индекс «т» указывает на операцию транспонирования. Тогда динамический коэффициент интенсивности напряжений для установившегося режима может быть записан в виде

$$K_{\text{Iд}}(t) = \sum_i K_{\text{Iд}}^{(i)} \frac{\{\mathbf{Q}^{(i)}\}^{\text{т}}\{\mathbf{F}\}}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{i\omega t}, \tag{6.178}$$

где $K_{\text{Iд}}^{(i)}$ — коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий $\{Q^{(i)}\}$.

Для приближенного определения $K_{\text{I}}(t)$ по формуле (6.178) необходимо решить задачу (6.177) только частично, определив N первых собственных частот и форм свободных колебаний. Существует метод оценки погрешности, получаемой при этом. При $\omega = 0$ из выражения (6.178) статический коэффициент интенсивности напряжений K_{I} для задачи (5.174) может быть представлен как

$$K_{\text{I}} = \sum_i K_{\text{I}}^{(i)} \frac{\{\mathbf{Q}^{(i)}\}^{\text{т}}\{\mathbf{F}\}}{\omega_i^2}. \tag{6.179}$$

Отсюда следует, что погрешность частичного решения задачи (6.177) можно оценить, сравнив статический коэффициент интенсивности с приближенно определенным динамическим коэффициентом при нулевой частоте.

При разбиении рассматриваемой в задаче (6.176) области используются обычные изопараметрические элементы первого или второго порядка. Во избежание значительного сгущения сетки у вершины трещины тут часто размещают специальные конечные элементы, функции формы которых содержат многочленную асимптотику сингулярного поля напряжений.

Нестационарные динамические задачи. Неподвижные трещины. Задачи этого класса имеют большое практическое значение, поскольку описывают поведение содержащих трещины экспериментальных образцов и элементов конструкций под действием ударной нагрузки. При этом их решение сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[M]\{\ddot{\mathbf{Q}}(t)\} + [K]\{\mathbf{Q}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\}. \tag{6.180}$$

Для интегрирования по времени применяются явные и неявные разностные схемы. Первые характеризуются вычислительной простотой, но требуют применения очень малых шагов по времени из-за условной устойчивости. Неявные методы более сложны в реализации, но безусловно устойчивы, что позволяет делать большие шаги по времени. Наиболее распространен среди неявных методов метод Ньюмарка. При его реализации пользуются формулами

$$\{\dot{\mathbf{Q}}(t+\Delta t)\} = a_1(\{\mathbf{Q}(t+\Delta t)\} - \{\mathbf{Q}(t)\}) - a_2\{\dot{\mathbf{Q}}(t)\} + a_3\{\ddot{\mathbf{Q}}(t)\},$$

$$\{\ddot{\mathbf{Q}}(t+\Delta t)\} = a_4(\{\mathbf{Q}(t+\Delta t)\} - \{\mathbf{Q}(t)\}) - a_5\{\mathbf{Q}(t)\} + a_6\{\ddot{\mathbf{Q}}(t)\}, \tag{6.181}$$

где

$$a_1 = \beta_2/(\beta_1 \Delta t); \qquad a_2 = \beta_2/\beta_1 - 1;$$
$$a_3 = \Delta t\,(\beta_2/\beta_1 - 2)/2; \qquad a_4 = 1/(\beta_2 \Delta t^2); \qquad (6.182)$$
$$a_5 = 1/(\beta_2 \Delta t); \qquad a_6 = 1/(2\beta_2) - 1.$$

Схема безусловно устойчива при $\beta_1 \geqslant 1/2$, $\beta_2 \geqslant (1/2 + \beta_1)^2$. При $\beta_1 = 1/2$ интегрирование не приводит к численному демпфированию. Чаще всего на практике используются следующие пары параметров:

$$\beta_1 = 1/2, \quad \beta_2 = 1/4 \text{ и } \beta_1 = 1/2, \quad \beta_2 = 1/6.$$

Использование соотношений (6.181) и (6.182) позволяет свести решение системы дифференциальных уравнений (6.180) к пошаговому решению чисто алгебраических задач.

Пусть на i-м шаге по времени известны векторы $\{\mathbf{Q}_i\}$, $\{\dot{\mathbf{Q}}_i\}$ и $\{\ddot{\mathbf{Q}}_i\}$. Тогда узловые перемещения $\{\mathbf{Q}_{i+1}\}$ на $i+1$-м шаге по времени определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$[\hat{K}]\,\{\mathbf{Q}_{i+1}\} = \{\hat{\mathbf{F}}\}, \qquad (6.183)$$

где

$$[\hat{K}] = [K] + a_4\,[M];$$
$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = \{\mathbf{F}_{i+1}\} + [M]\,(a_4\,\{\mathbf{Q}_i\} + a_5\,\{\dot{\mathbf{Q}}_i\} - a_6\,\{\ddot{\mathbf{Q}}_i\}), \qquad (6.184)$$
$$\{\mathbf{F}_{i+1}\} = \{\mathbf{F}\,(t_{i+1})\}.$$

Узловые значения скоростей и перемещений на $(i+1)$-м шаге определяются из выражений (6.181) и (6.182). После этого можно перейти к $(i+2)$-му шагу и т. д.

В настоящее время трудно указать оптимальную величину шага по времени Δt при использовании метода Ньюмарка Численные эксперименты показывают, что погрешность вычислений значительно возрастает, если Δt превышает промежуток времени необходимый для прохождения продольной волной расстояния, равного наименьшему конечному элементу.

Рассмотрим методы определения коэффициента интенсивности напряжений на примере трещины нормального отрыва. В этом случае асимптотическое распределение напряжений и перемещений у вершины трещины представляется в виде

$$\sigma_{ij}\,(t, r, \theta) = K_{\text{Iд}}\,(t)/\sqrt{2\pi r} + f_i\,(\theta),$$
$$u_i\,(t, r, \theta) = \frac{K_{\text{Iд}}\,(t)}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,F_i\,(\theta). \qquad (6.185)$$

Из подобия формул (5.178) и (6.185) следует подобие методов определения коэффициентов интенсивности напряжений в статических и динамических задачах для неподвижных трещин Для моделирования сингулярного характера поля напряжений у вершины трещины в динамике, как и в статике, используются либо специальные конечные элементы, либо обычные изопараметрические элементы со смещенными промежуточными узлами. В последнем случае коэффициент как правило определяется по величине раскрытия трещины в ближайшем к ее вершине узле Этот метод может оказаться недостаточно точным при отсутствии необходимого сгущения сетки

конечных элементов у вершины трещины. В таком случае применяется метод «тарировки» узловых перемещений. Для этого предварительно на исходной «грубой» сетке решается произвольная статическая задача, для которой известно достаточно точное значение K_I, и определяется соответствующее ему перемещение v_c в ближайшем к вершине трещины узле на ее поверхности Если предположить, что погрешности решения статической и динамической задач на одной и той же сетке при достаточно малом шаге по времени одинаковы, то динамический коэффициент $K_{\text{Iд}}$ на каждом шаге можно достаточно точно определить по перемещению $v_\text{д}$ в том же узле по формуле

$$K_{\text{Iд}} = \frac{v_\text{д}}{v_\text{c}} K_\text{I}. \qquad (6.186)$$

Для динамических задач механики разрушения J-интеграл имеет вид

$$J = J_\text{c} + \int\limits_V \rho \left(\sum_i \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dV, \qquad (6.187)$$

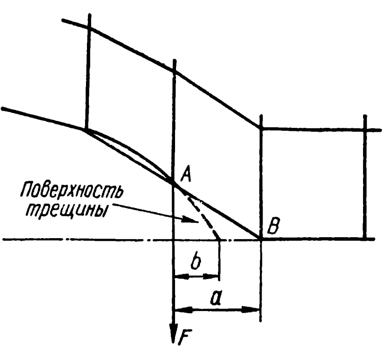


Рис. 6.14. Схема применения метода последовательной релаксации узлов неизменяемой сетки.

где J_c — интеграл (5.189) по контуру, окружающему вершину трещины; V — область, ограничиваемая этим контуром. При этом связь между J-интегралом и коэффициентом интенсивности напряжений в динамике остается такой же, как и в статике. Расчет численным методом показывает, что хотя определение J-интеграла требует больших затрат машинного времени, получаемые при этом значения коэффициента интенсивности напряжений часто имеют меньшую погрешность, чем определяемые по перемещениям.

Нестационарные динамические задачи. Движущиеся трещины. Наибольшую сложность при решении задач этого типа представляет моделирование роста трещины.

Ранее рост трещины моделировался последовательным освобождением от закрепления узлов перед ее вершиной. Этот метод имеет два существенных недостатка. Во-первых, при его использовании необходимо делать шаг по времени, равный промежутку времени, за который трещина проходит расстояние между двумя узлами. Поскольку скорость трещины обычно намного меньше скорости упругих волн в материале, использование такого большого шага неизбежно увеличивает погрешность вычислений. Во-вторых, скачкообразный рост трещины вызывает дополнительное ухудшение сходимости решения за счет появления высокочастотных осцилляций.

Позднее, для того чтобы моделировать рост трещины на неизменяющейся сетке с малым шагом по времени, было предложено несколько модификаций описанной методики. Смысл их сводился к тому, чтобы освобождать узел сетки, до которого дошла вершина трещины не сразу, а постепенно. Наиболее просто это сделать с помощью сосредоточенной силы F (рис. 6.14), приложенной в освобождающемся узле. Начальное значение этой силы F_0 выбирается равным реакции в заделке узла A в момент достижения его вершиной трещины и уменьшается

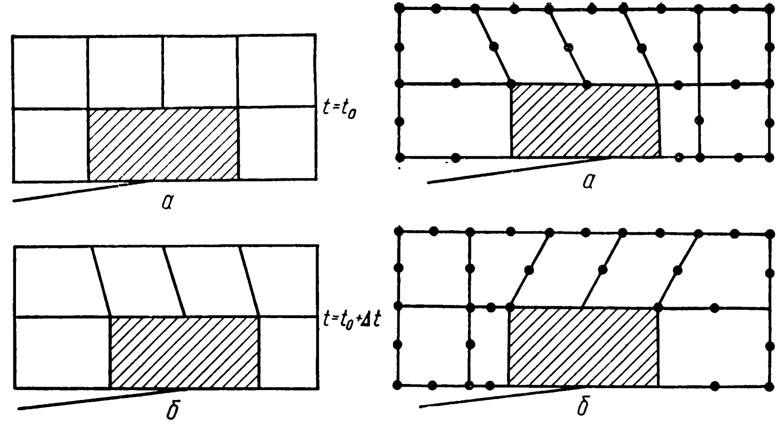


Рис. 6.15. Сдвиг фрагмента конечноэлементной сетки для моделирования движения трещины:

а — конфигурация сетки в момент времени $t=t_0$; *б* — конфигурация сетки в момент времени $t=t_0+\Delta t$.

Рис. 6.16. Схема перестройки конечноэлементной сетки:

а — исходное состояние сетки; *б* — сетка после перестройки.

по мере продвижения трещины к узлу *B*. Разными авторами были предложены следующие законы убывания величины *F*:

$$F = F_0 (1 - b/d)^{1/2},$$
$$F = F_0 (1 - b/d), \tag{6.188}$$
$$F = F_0 (1 - b/d)^{3/2}.$$

Наименьшую погрешность дает вторая формула. Для более точного моделирования распространения трещины применяются методы, связанные с перестройкой сетки на каждом шаге по времени. Наилучшие результаты дает смещение на прирост трещины фрагмента окружающей ее конечноэлементной сетки как жесткого целого (рис. 6.15). Смещаемый фрагмент (на рисунке заштрихован) может состоять как из одного специального элемента, так и из нескольких обычных изопараметрических. При этом форма окружающих смещаемый фрагмент сетки конечных элементов последовательно искажается вплоть до определенного момента, когда сетку приходится перестраивать (рис. 6.16).

Общий алгоритм решения задачи моделирования динамического распространения трещины аналогичен описанному выше для случая неподвижных трещин. Результаты, получаемые при точной постановке задачи, учитывающей возникающие из-за продвижения трещины изменения граничных условий, и приближенной, когда этими изменениями пренебрегают и используют дискретизированное уравнение движения в форме (6.183), практически совпадают.

Для моделирования сингулярного характера напряжений у вершины движущейся трещины применяются как специальные, так и обычные изопараметрические элементы. В наиболее совершенном из известных специальных элементов в качестве функций формы используются собственные

функции задачи о движении полубесконечной трещины в плоскости. Достоинство такого подхода — возможность непосредственно и с высокой точностью определять коэффициент интенсивности напряжений и его первой и второй производных, поскольку все эти величины входят в число неизвестных задачи (6.183). Однако при этом обобщенная матрица жесткости $[\hat{K}]$ становится несимметричной, что существенно усложняет решение. Использование у вершины трещины обычных изопараметрических элементов значительно облегчает программирование и сокращает общее время выполнения программы. При этом наилучшие результаты дает вычисление коэффициента интенсивности напряжений по J-интегралу. Связь между коэффициентом в вершине трещины, движущейся со скоростью v, и одной из разновидностей динамического J-интеграла (6.187) задается формулой

$$K_{\text{I}}^2 = \frac{4JE'}{(1+\varkappa) f(v)}, \tag{6.189}$$

где

$$f(v) = \beta_1 (1-\beta_2^2) \left\{ 2\beta_1 (1+\beta_2) - \frac{1+\beta_1}{2\beta_1} (1+\beta_2^2)^2 - \right.$$

$$\left. -2(\beta_1-\beta_2) \frac{1+\beta_2^2}{\sqrt{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}} \right\} / (4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2)^2;$$

$$\beta_1^2 = 1 - v^2/c_1^2; \qquad \beta_2^2 = 1 - v^2/c_2^2.$$

В заключение выделим основные направления использования конечноэлементных комплексов, реализующих моделирование динамического распространения трещины. Первое, связанное с обработкой результатов экспериментов, возникло в связи с тем, что на данном этапе развития экспериментальных методов исследования динамического разрушения точность и простота определения истории развития трещины (с помощью серийно выпускаемых датчиков разрыва) значительно превосходят точность и доступность методов прямого определения коэффициента интенсивности напряжений в вершине движущейся трещины (методы фотоупругости и каустик в сочетании с высокоскоростной киносъемкой). Поэтому для опосредствованного определения параметров напряженно-деформированного состояния разрушающегося образца широко применяются конечноэлементные комплексы, в которых в качестве исходных данных используются истории нагружения и роста трещины, полученные экспериментально. Математическое моделирование проведенного эксперимента позволяет получить большое количество информации о взаимосвязи параметров поля напряжений у вершины трещины с кинетическими параметрами процесса разрушения. Наибольший практический интерес имеет установление зависимости динамической трещиностойкости $K_{\text{Iд}}$ для данного материала от скорости продвижения трещины v. После определения связи $K_{\text{Iд}} - v$ возникает возможность повторного использования МКЭ-программ, но теперь уже для предсказания «истории» развития трещины под действием иной, чем использовавшаяся в эксперименте, нагрузки или другой геометрии образца (если установленная зависимость $K_{\text{Iд}}$ от v действительно отражает свойства материала). Для определения скорости роста трещины на каждом шаге по времени решается нелинейное уравнение

$$K_{\text{Iд}}(t, v) = K_{\text{Iд}}(v). \tag{6.190}$$

Описанные выше режимы использования программ метода конечных элементов при моделировании закритического роста трещин в специальной литературе называются режимами «генерация данных» и «приложение» [28].

ГЛАВА 7

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Эффективное использование конструкционных материалов в различных областях новой техники предопределяется в значительной мере их долговечностью в заданных условиях эксплуатации. Долговечность же в большой степени зависит от взаимодействия материала с окружающей средой, активированного влиянием силового теплового, радиационного и других полей. Таким образом, оценка реальной несущей способности материалов и деталей машин в заданных условиях их эксплуатации может быть дана только с позиций физико-химической механики материалов (т. е. механики разрушения и прочности материалов в средах), изучающей влияние внешних сред на механические свойства материалов, а также физико-химические взаимодействия, протекающие в объеме деформируемого материала контактирующего со средой В настоящей главе излагаются основные аспекты физико-химической механики материалов Значительное место отведено вопросу адсорбционного взаимодействия сред и материалов, многогранным проявлениям этого взаимодействия в виде механических эффектов охрупчивания, пластификации и т д. К числу сред, очень сильно влияющих на механические свойства металлов, относится, например, водород. Его разрушительное действие на конструкционные материалы находит свое выражение в водородной хрупкости Здесь излагается количественная теория разрушения материалов в среде водорода Особое место в главе принадлежит также вопросам электрохимической коррозии под напряжением. Во всех этих случаях разрушение материала представляется как процесс зарождения и распространения трещин, который интенсифицируется влиянием внешней среды при воздействии силовых факторов.

7.1. Некоторые понятия и определения

Исследования процессов деформирования и разрушения твердых тел с учетом влияния окружающей среды составляют самостоятельное научное и прикладное направление в науке о прочности материалов — физико-химическую механику материалов. Здесь предметом изучения являются процессы взаимодействия различных сред с деформируемыми физическими структурами материала; при этом сам процесс деформирования значительно усиливает взаимодействие материала со средой.

К настоящему времени в рассматриваемой области науки о прочности материалов выполнено большое количество исследований, накоплен обширный экспериментальный материал о влиянии различных жидких и газовых сред на статическую и длительную (усталостную) прочность конструкционных материалов (сталей), а также о влиянии покрытий, ингибиторной защиты, механической и химико-механической обработок на указанные характеристики прочности сталей при различных нагружениях и средах.

На основании результатов проведенных исследований можно сформулировать исходные для физико-химической механики конструкционных ма-

териалов концепции о действии сред на деформированное тело, а также некоторые модельные схемы рассматриваемых процессов [1—5].

1 Жидкие и газовые среды по отношению к данному физическому телу при заданных условиях (температура, давление, структура тела и т. п.) делятся на три группы:

а) неактивные, т. е. такие, которые не влияют на свойства тела;

б) физически активные (поверхностно-активные), т. е. такие, которые влияют на свойства тела, но не вступают с ними в химическое взаимодействие;

в) химически активные (коррозионно-активные), т. е. такие, которые влияют на свойства тела в результате химического взаимодействия с ним (образование химических связей).

2. Влияние среды на деформируемый материал начинается с понижения поверхностной энергии материала в результате адсорбции. Этот процесс — первичный и универсальный при взаимодействии среды с различными материалами (твердыми телами).

3. Взаимодействие среды с материалом усиливается, если повышается энергетический уровень частиц среды или кристаллической решетки материала, например в результате его деформирования, т. е. если среда или тело энергетически возбуждены, то их взаимодействие усиливается.

4. Наиболее интенсивное взаимодействие среды и материала в процессе его деформации наступает тогда, когда в материале возникают пластические деформации (деформации за пределом упругости). Сформулированное утверждение — следствие п. 3, но оно имеет важное самостоятельное значение.

5. Существует два принципиально различных механизма влияния среды на материал:

а) понижение уровня поверхностной энергии твердого тела (физическое взаимодействие);

б) формирование структуры с новыми свойствами (химическое взаимодействие — образование новых химических связей).

6. Поверхностно-активные среды влияют на характер деформации и разрушения конструкционных материалов в первую очередь через дефекты структуры, главным образом вследствие изменения свойств материала в окрестности остроконечных пустот (трещин) в деформированном материале. Именно в окрестности вершин дефектов типа трещин воздействие среды приводит к изменению сопротивления материалов распространению в нем трещины — т. е. к изменению его трещиностойкости, а значит, и его характеристик статической и усталостной прочности.

7. Действия среды и концентрации механических напряжений на прочность конструкционных материалов в средах не аддитивны.

Приведенные выше положения (постулаты) физико-химической механики конструкционных материалов — исходные при анализе процессов деформации и разрушения конструкционных материалов в реальных условиях эксплуатации Они используются вместе с законами механики и физики деформируемого твердого тела для объяснения действия сред на деформирование и разрушение материала, для прогнозирования, долговечности элементов конструкций в заданных условиях эксплуатации.

7.2. Влияние состояния поверхности и поверхностно-активных веществ на процессы деформации и разрушения твердых тел

Многие аспекты влияния состояния поверхности изучены недостаточно, кроме того, поверхностные эффекты еще не полностью учитываются при анализе пластичности и разрушения материалов. В рамках современных

концепций поверхность рассматривается не как резкая прерывность континуума, а как переходный слой между двумя средами, для которого механические, электрические, структурные и другие свойства иные, чем в объеме материала. Рассмотрим некоторые физические модели поверхности и связанные с ней величины. Обозначим через dW_1 работу, необходимую для обратимого увеличения поверхности S раздела двух сред на dS

$$dW_1 = f dS, \qquad (7.1)$$

где f — поверхностное натяжение — величина, характеризующая термодинамические свойства поверхности.

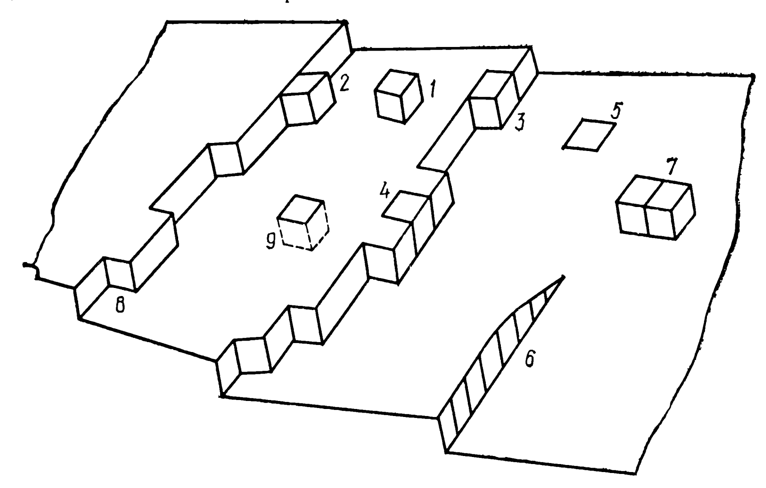


Рис. 7.1. Схема строения поверхности согласно модели террас, степеней и изломов:

1 — адсорбированный атом; *2* — адсорбированный атом на уступе; *3* — атом на конце уступа; *4* — атом внутри уступа; *5* — атом на ступени; *6* — выход винтовой дислокации; *7* — пара адсорбированных атомов; *8* — вакансии в уступе; *9* — вакансия в ступени.

Поверхностное натяжение f — величина обычно положительная, поэтому система будет деформироваться под воздействием сил поверхностного натяжения до тех пор, пока эти силы не уравновесятся внутренними напряжениями. При отрицательных значениях f система будет неустойчивой.

Практически условия, соответствующие процессу (7.1), выполняются редко, так как всегда одновременно с растяжением поверхностного слоя происходит приток на поверхность новых частиц из объема. Для описания такой ситуации вводится свободная (удельная) поверхностная энергия γ, которая определяется из соотношения $W_2 = \gamma S$. Здесь через W_2 обозначена в общем случае необратимая работа, необходимая для создания новой свободной поверхности S. Поверхностная энергия отражает превышение энергии приповерхностных областей над соответствующей величиной для объема. Между поверхностными натяжением f и энергией γ изотропной системы существует взаимосвязь:

$$f = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial S} S.$$

В общем случае неизотропной системы поверхностное натяжение f — тензор, а поверхностная энергия γ — скаляр. Поэтому предыдущее соот-

ношение принимает вид [2]

$$t_{ij} = \gamma\delta_{ij} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon_{ij}} \qquad (7.2)$$

где индексы i, $j = 1$, 2 обозначают координаты на плоскости поверхности; ε_{ij} — тензор деформации поверхности.

Поверхностная энергия и натяжение измеряются в джоулях на метр квадратный или ньютонах на метр (Н/м). Значения этих величин совпадают лишь для поверхности жидкости. В кристаллах поверхностная энергия анизотропна и представляет собой непрерывную функцию вектора нормали к плоскости поверхности.

При переходе от макроскопического к микроскопическому описанию поверхности часто используется модель террас, ступеней и изломов (в англоязычной литературе — модель TLK : terrace, ledge, kink). Эта модель рассматривает строение поверхности на атомарном уровне, каждый атом может быть описан числом ближайших соседей, с которыми он имеет связи. На рис. 7.1 схематически изображена поверхность с различным расположением атомов. В такой модели можно рассматривать диффузию атомов вдоль поверхности, процессы окисления, кристаллизации и т. д.

Реальная поверхность отличается от описанной выше идеализированной наличием на ней большого числа кристаллографических дефектов. Основные типы дефектов, присущих любой кристаллографической поверхности,— места выхода дислокаций и следы выхода границ зерен. Кроме того, реальные кристаллические тела, даже очень чистые, всегда содержат некоторое количество чужеродных атомов. Эти примесные атомы, оказываясь на поверхности, играют роль химических дефектов. Элемент, присутствующий в теле в небольших количествах, способен в ряде случаев концентрироваться на поверхности, оказывая тем самым влияние на состояние поверхности и ее энергию.

Современными методами изучения поверхности установлено, что вблизи поверхности расстояние между атомными плоскостями изменяется (поверхностная релаксация) на значения, достигающие 20 % объемной величины. В приповерхностном слое может происходить также изменение симметрии расположения атомов (поверхностная реконструкция), причем на реконструкцию поверхности могут влиять даже незначительные количества адсорбированного вещества.

Влияние структуры поверхности на механические свойства материала изучено недостаточно. Допускается, что изменение постоянной решетки возле поверхности может приводить к возникновению барьера для выхода дислокаций из кристалла, а также то, что ступени и изломы на поверхности могут служить концентраторами напряжений.

В зависимости от природы сил, удерживающих адсорбированную частицу (адсорбат) на поверхности тела, на котором происходит адсорбция (адсорбент), различают физическую адсорбцию и химическую (хемосорбцию). Первую обусловливают силы той же природы, что и силы, действующие между молекулами в газе (Ван дер Ваальса), вторую — силы химической природы, действующие между атомами в молекуле (обменные силы).

Хемосорбция отличается от физической адсорбции энергией связи частиц с поверхностью (при химической адсорбции энергия связи больше 40 кДж/моль). Кроме того, при физической адсорбции скорость адсорбции тем меньше, чем выше температура, а при хемосорбции скорость адсорбции возрастает с увеличением температуры и описывается формулой

$$\frac{dN}{dt} = \beta \exp\left(-\frac{E_{\text{акт}}}{kT}\right),$$

где N — число адсорбированных молекул на единице площади; β — ко-

эффициент, слабо зависящий от температуры; $E_{акт}$ — энергия активации химической адсорбции; k — постоянная Больцмана.

Энергетическая диаграмма адсорбции представлена на рис. 7.2.

Степень заполнения поверхности, т. е. число молекул, удерживаемых поверхностью при адсорбционном равновесии, зависит от температуры и давления. При заданном давлении она уменьшается с температурой, а при заданной температуре увеличивается с ростом давления. Зависимость заполнения от давления при заданной температуре называется изотермой адсорбции. Наиболее часто адсорбция описывается изотермами адсорбции Ленгмюра, Фрейндлиха и Темкина.

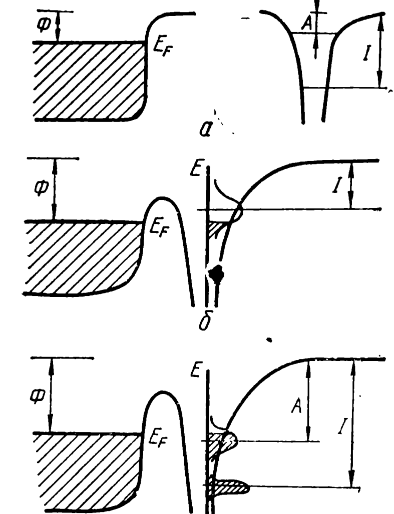


Рис. 7.2. Зависимость энергии физической $E_{физ}$ и химической $E_{хим}$ связи от расстояния r до поверхности тела.

Рис. 7.3. Потенциалы и энергетические уровни для адсорбированного атома и поверхности:

а — при отсутствии взаимодействия; *б* — $I<\Phi$, атом заряжен положительно; *в* — $A>\Phi$, атом заряжен отрицательно.

Степень заполнения поверхности $\Theta_з$ определяется выражением $\Theta_з = N/N_0$, где N — количество адсорбированных частиц на единицу поверхности; N_0 — число адсорбционных мест на поверхности адсорбента.

При недиссоциативной адсорбции (когда не происходит диссоциация молекулы на поверхности) изотерма Ленгмюра описывается формулой

$$\Theta_з = \frac{AP}{1 + AP}, \tag{7.3}$$

а при диссоциации молекулы — формулой

$$\Theta_з = \frac{(BP)^{1/2}}{(1 + BP)^{1/2}},$$

где A и B — величины, зависящие от температуры; P — давление.

Изотерма адсорбции Фрейндлиха записывается в виде

$$\Theta_з = D_0 P^n, \tag{7.4}$$

где D_0 — константа для данной температуры, а показатель степени n при

почти свободной поверхности близок к единице, а при почти заполненной — стремится к нулю.

Изотерма адсорбции Темкина описывается уравнением

$$\Theta_з = C \ln DP, \quad (7.5)$$

где C и D — константы при данной температуре.

Если известна изотерма адсорбции, можно определить изменение поверхностной энергии при адсорбции в соответствии с адсорбционной формулой Гиббса

$$d\gamma = -N d\mu_0,$$

где $d\mu_0$ — изменение химического потенциала в результате адсорбции.

При адсорбции газа с температурой T и при давлении P эту формулу можно записать следующим образом:

$$d\gamma = -\Theta_з N_0 RT \frac{dP}{P}, \quad (7.6)$$

где R — газовая постоянная.

Микроскопическое описание адсорбции предполагает использование аппарата квантовой механики. Устанавливаемые в этом случае разные типы адсорбции представлены на рис. 7.3. В частности, выявлено, что в одноэлектронном приближении металлический адсорбент моделируется потенциальной ямой с широкой зоной электронов проводимости шириной E_F, тут E_F — энергия Ферми, ниже которой все состояния системы электронов при абсолютном нуле заняты. Разница между потенциалом на бесконечности и энергией Ферми называется работой выхода Ф. Это минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону чтобы удалить его из металла. В случае переходных металлов в зоне проводимости существует узкая зона электронов с большой плотностью состояний Адсорбат характеризуется занятыми уровнями валентных электронов с энергией I, которая называется энергией ионизации, и незанятыми уровнями (уровнями отрицательного иона) с энергией A, называемой энергией сродства к электрону. Дискретные уровни адсорбированного атома за счет взаимодействия с металлом размываются в квазиуровни и смещаются относительно исходного положения. При $T = 0$ электроны заполняют все уровни, лежащие ниже уровня Ферми, который практически не изменяется при добавлении адсорбированного атома (сокращенно адатома) Таким образом квазиуровень может оказаться заполненным лишь частично, и адатом характеризуется дробным зарядом, который определяется взаимным расположением уровня Ферми и центра квазиуровня, а также шириной последнего. Адатом заряжен положительно, если его квазиуровень частично свободен, и отрицательно, если частично заполнен уровень отрицательного иона.

Заряженный адатом вместе с экранирующим его зарядом, сосредоточенным в приповерхностной области металла, образует диполь, перпендикулярный поверхности с дипольным моментом m.

Важную информацию о характере связи адатомов с поверхностью можно извлечь из работы выхода при адсорбции. При малых покрытиях (при отсутствии взаимодействия между адатомами) эти величины связаны соотношением

$$\Delta\Phi = 4\pi nm, \quad (7.7)$$

где $\Delta\Phi$ — изменение работы выхода; n — поверхностная концентрация адатомов.

Влияние состояния поверхности на пластичность кристаллов. Пластические свойства кристаллических тел определяются (в основном) дви-

жением, генерацией и взаимодействием дислокаций. Поскольку пластичность и прочность зависят от внешней среды, то поверхность и ее состояние влияют на поведение дислокаций. Классический пример этого — взаимодействие дислокации с поверхностью. Пусть на поверхности твердого тела существует слой материала толщиной h с иным, чем в объеме тела, модулем сдвига G_S (объемное значение модуля сдвига — G_V). При $G_S > G_V$ на дислокацию будет действовать дальнодействующая сила притяжения к поверхности и сила отталкивания (на расстояниях, соизмеримых с толщиной пленки), в результате чего равновесное положение дислокации наступит приблизительно на расстоянии h от поверхности раздела пленка — твердое тело. Сила взаимодействия между дислокацией и ее изображением в пленке описывается формулой

$$F = \frac{G_V \mathbf{b}^2}{4\pi x}\left(\frac{G_S - G_V}{G_S + G_V}\right), \tag{7.8}$$

где x — расстояние до поверхности раздела пленка — твердое тело, $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса. Когда пленки нет, сила, действующая на дислокацию, переходит в обычную силу притяжения дислокации к чистой поверхности. Таким образом, пленка может служить барьером для выхода дислокаций на поверхность. При $G_S < G_V$ на дислокацию будет действовать сила притяжения к поверхности, но ее значение будет меньше, чем для чистой поверхности.

Изменение поверхностных свойств реального твердого тела может происходить за счет как адсорбции из внешней среды, так и накопления на поверхности примесей из объема (поверхностная сегрегация). Сегрегация происходит на внешней и внутренних поверхностях (границах зерен, двойниковых границах и т. д.). С термодинамической точки зрения сегрегация (адсорбция) возможна, если примесь (адсорбат) понижает поверхностную энергию. Поверхностная сегрегация сильно влияет на эмиссионные свойства поверхности, поверхностную диффузию, поверхностную энергию, структурные превращения, каталитическую активность. Поверхностное упрочнение, возможно, происходит из-за образования примесных кластеров. Эти явления приводят к значительным изменениям микротвердости возле границ зерен и свободной поверхности и таким образом влияют на их взаимодействие с дислокациями.

Приповерхностная область может также служить более вероятным источником дислокаций. Механизм размножения дислокаций при помощи источников Франка — Рида, расположенных в приповерхностной области, может потребовать значительно меньшего напряжения начала генерации дислокаций, чем в объеме [12].

Влияние адсорбции на прочность твердых тел. Адсорбционное понижение прочности неметаллических материалов впервые обнаружил в 1928 г. П. А. Ребиндер. Физико-химическая суть эффекта Ребиндера состоит в следующем. Разрушение твердого тела — это процесс образования новых поверхностей, сопровождающийся разрывом межатомных связей. Энергия, затрачиваемая на разрушение, определяется энергией разрыва таких связей, т. е. свободной поверхностной энергией данного материала. Энергия разрыва связей частично компенсируется, если атомы твердого тела образуют новые связи с молекулами (атомами) среды на вновь возникших поверхностях. При этом свободная поверхностная энергия данного тела и вместе с тем работа его разрушения могут существенно уменьшаться, что проявляется в понижении прочности и пластичности материала.

Существует и другое объяснение эффекта Ребиндера, в частности основанное на рассмотрении типа, концентрации, подвижности и перераспределения носителей заряда в деформируемом материале [3]. Например, наличие заряда в приповерхностной области может ослабить

энергию связи (когезию) между атомами из-за взаимного отталкивания зарядов и привести к понижению сопротивления материала разрушению. Другим примером влияния поверхностного заряда на прочность может служить изменение прочности ионных кристаллов при изменении потенциала поверхности. В ионных или ковалентных кристаллах связывающие электронные орбитали заполнены, а антисвязывающие — свободны. Если поверхностный потенциал вызывает удаление электронов из кристалла, они освобождают связывающие орбитали и этим ослабляют кристалл. Дополнительный приток электронов вызывает заполнение антисвязывающих орбиталей, что также уменьшает прочность кристалла. Однако между двумя подходами можно установить связь с помощью соотношения Липпмана

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\right)_{T,P} = -q, \tag{7.9}$$

где φ — потенциал, связанный с перераспределением заряда в приповерхностной области; q — поверхностный заряд.

Из соотношения (7.9) видно, что поверхностная энергия имеет максимум при отсутствии заряда на поверхности и уменьшается при наличии на поверхности заряда любого знака.

Установлено, что эффект Ребиндера наблюдается лишь для определенных пар твердое тело — окружающая среда [4]. В этом отражается химическая специфичность эффекта. Так, ртуть вызывает резкое охрупчивание цинка и латуни, жидкий висмут — меди. Олово, алюминий, свинец и некоторые стали увеличивают пластичность в растворах таких органических веществ, как олеиновая и стеариновая кислоты, мылообразные соединения и т. д. Специфичность эффекта объясняется тем, что твердое тело и среда должны взаимодействовать не слишком сильно и не слишком слабо. При слабом взаимодействии эффект Ребиндера не проявляется по термодинамическим причинам — не происходит компенсация разорванных связей (снижение поверхностной энергии слишком мало). При сильном взаимодействии образуются прочные поверхностные химические соединения, атомы среды теряют миграционную подвижность и не проникают достаточно быстро в зону разрушения по кинетическим причинам.

Разрушение при адсорбции можно описать также в рамках модели Гриффитса. Так, если кристалл содержит трещину длины l, то критическое напряжение для распространения трещины будет:

$$\sigma_* = \beta\,(E\gamma/l)^{1/2}, \tag{7.10}$$

где β — коэффициент, близкий к единице. Эта формула хорошо описывает разрушение хрупких тел.

Характерным примером указанного явления может служить понижение прочности тонкодисперсных структур гидроксида магния в парах воды. Значение прочности образца $\sigma_{\text{в}}$ в сухом состоянии и $\sigma_{\text{в.а}}$ в условиях адсорбции водяных паров при давлении P связано с понижением поверхностной энергии [13]:

$$\gamma_0 - \gamma = -\Delta\gamma = RTN_0 \int_0^P \Theta\,(P)\,d\ln P,$$

где $\Theta\,(P)$ — изотерма адсорбции паров воды на гидроксиде магния. В координатах $(\sigma_{\text{в}}^2 - \sigma_{\text{в.а}}^2)/\sigma_{\text{в}}^2$, $\Delta\gamma$, отвечающих уравнению Гриффитса, экспериментальные данные ложатся на прямую и дают правильную оценку γ_0 (рис. 7.4).

Влияние среды на прочность материала реализуется в первую очередь через изменение пластической зоны в вершине трещины. Работа γ', необходимая для создания единицы новой поверхности тела, в этом случае может существенно отличаться от поверхностной энергии материала γ. Изменение зоны предразрушения около вершины трещины при действии среды приводит как бы к изменению радиуса закругления самой вершины трещины. В результате концентрация напряжений в вершине трещины меняется. Она становится в $\sqrt{r/a}$ раз меньше концентрации в вершине атомарно-острой трещины, где a—постоянная решетки, r—условный радиус закругления вершины трещины после изменения зоны пластичности. Таким образом, необходимое напряжение для разрыва межатомной связи в вершине трещины больше в $\sqrt{r/a}$ раз и критерий Гриффитса (7.10) можно записать так:

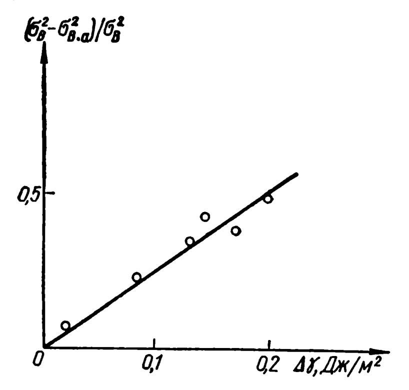


Рис. 7.4. Экспериментальная зависимость понижения прочности от понижения свободной поверхностной энергии гидроксида магния в присутствии паров воды.

$$\sigma_* = \beta\left(\frac{E\gamma^r}{la}\right)^{1/2},$$

де β — числовой коэффициент; l — длина трещины.

Величина $\gamma_{эф} = \gamma \frac{r}{a}$ играет роль эффективной поверхностной энергии, и все изменения истинной поверхностной энергии сильно влияют на нее. В качестве примера такого воздействия среды рассмотрим охрупчивание стали газообразным водородом. Адсорбция водорода на стали может быть описана изотермой адсорбции Темкина [14]. Подставляя выражение (7.6) в уравнение адсорбции Гиббса (7.7) и интегрируя , получаем изменение поверхностной энергии в результате адсорбции водорода:

$$\gamma - \gamma_0 = A\,[(\ln BP_0)^2 - (\ln BP)^2],$$

где A и B — константы; P — давление водорода; P_0 — давление, при котором степень покрытия водородом поверхности $\Theta_з = 0$.

Изменение коэффициента интенсивности напряжений в результате изменения давления водорода описывается соотношением

$$[K_I^2 - K_{IH}^2]^{1/2} = \beta_1 \ln P + \beta_2,$$

где K_I —коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины при отсутствии водорода; K_{IH} — коэффициент интенсивности напряжений в водородной среде; β_1 и β_2 — константы (при данной температуре).

Данная зависимость хорошо описывает экспериментальные данные, хотя для объяснения водородной хрупкости используются и другие подходы (см. п. 7.3). Следует иметь в виду, что физико-химические процессы

понижения межфазной свободной поверхностной энергии γ определяют лишь принципиальную возможность эффектов понижения прочности, т. е. являются лишь необходимыми, но не достаточными. Степень и сама форма влияния среды на механические характеристики деформируемого твердого тела зависят также и от множества других факторов: реальной структуры материала, температуры, условий деформации и т. п. При этом особо важно то, что эффективное проявление действия среды происходит лишь при деформировании тела за предел текучести.

7.3. Рост трещин в металлах при воздействии водорода

Среди разнообразных проявлений воздействия водорода на механические свойства металлов (предел прочности, характеристики пластичности, усталости и т. д.) особое место занимает облегчение зар ждения и развития трещин в деформируемых телах Общеизвестно, что невозможно добиться полного отсутствия в деталях машин и конструкций трещиноподобных дефектов или несовершенств, способных вызвать трещинообразование в процессе эксплуатации. При этом дефекты, совершенно безопасные в обычных условиях, благодаря воздействию водорода могут стать опасными и привести к неожиданному хрупкому разрушению изделия.

Воздействие водорода на металлы способно обеспечить реализацию условий, при которых прочность тел будет связана в первую очередь с закономерностями роста трещин в материалах. Таким образом, предполагаемое использование металлов при взаимодействии с водородом неизбежно предусматривает оценку их сопротивления росту трещин в данной среде, а исследования закономерностей влияния водорода на развитие трещин в металлах приобретают первостепенное значение.

Первая сторона рассматриваемого аспекта проблемы — это поверхностное взаимодействие и проникновение водорода в металл. Она связана с каталитической активностью металла по отношению к среде и соответствующим изменением состояний водорода вблизи поверхности металла. Обычно происходит образование особого пограничного слоя среда — металл, в котором протекают процессы преобразования водородсодержащих молекул и ионов — каталитическая диссоциация, хемосорбция, возникновение особых форм состояния водорода и т. п. Кинетика этих процессов определяет кинетику (скорость) поступления водорода в металл (сорбции водорода металлом), а равновесное состояние слоя (т. е. установление равновесия между процессами диссоциации — рекомбинации, сорбции — десорбции и т. д.) обусловливает в конечном итоге количество абсорбированного металлом водорода.

Второй аспект проблемы — влияние поверхностных процессов на деформирование и прочность металлов. Роль водорода здесь сводится к изменению структурных и энергетических свойств поверхности металлов, которые влияют на механическое поведение материала, например через изменение действия приповерхностных источников дислокаций. При этом особая роль принадлежит зоне вершины атомарно-острой микротрещины, которая является поверхностью особого рода. (Здесь радиус кривизны поверхности сравним с параметром кристаллической решетки.) Термодинамические характеристики поверхности связаны с ее кривизной, и эта связь существенна при малых значениях радиуса кривизны. Закономерности изменения поверхностной энергии под воздействием поверхностно-активных сред в указанной особой зоне неизвестны. Поэтому, перенося имеющиеся данные об изменении поверхностной энергии металла при адсорбции водорода на специфический участок поверхности у кончика острой трещины, следует говорить о тенденциях влияния водорода, а не об установлении количественной связи.

Третий аспект — состояние и поведение водорода внутри металла. С практической и теоретической точек зрения значительный интерес представляет состояние и поведение водорода внутри металла. Хотя на микроскопическом уровне многие закономерности взаимодействий водорода с атомами кристаллической решетки и дефектами ее строения еще не выяснены, однако ряд важных закономерностей поведения водорода в металлах уже изучен достаточно полно и может быть описан математически с использованием набора экспериментально определяемых феноменологических параметров. К этим закономерностям относятся:

1) зависимость, описывающая растворимость водорода в решетке металлов — закон Сивертса

$$C_0 = K_S \sqrt{F}, \tag{7.11}$$

где C_0 — равновесная концентрация водорода в металле; K_S — феноменологическая константа (константа Сивертса); F — летучесть водорода;

2) уравнение диффузии водорода в поле напряжений, обобщающее закон Фика

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C - \frac{DV_H}{RT} \nabla\sigma\nabla C, \tag{7.12}$$

где C, D и V_H — концентрация, коэффициент диффузии и парциальный молярный объем водорода в металле (феноменологические константы системы металл — водород); $\sigma_г$ — гидростатическое механическое напряжение; ∇^2 и ∇ — операторы Лапласа и градиента;

3) закон взаимодействия водорода с дефектами кристаллического строения — распределение Ферми—Дирака

$$\frac{C_д}{1 - C_д} = \frac{C}{1 - C} \exp \frac{U}{RT} \tag{7.13}$$

или при малых $C_д$ и C (распределение Больцмана)

$$C_д = C \exp \frac{U}{RT}, \tag{7.14}$$

где $C_д$ — концентрация водорода в дефекте; C — его равновесная концентрация в окружающей регулярной решетке; U — энергия связи водорода с дефектом; R — универсальная газовая постоянная.

Последнее — это влияние водорода на зарождение и развитие разрушения в металлах. Существуют гипотезы и теоретические концепции о механизме влияния водорода на разрушение, которые связывают облегчение разрушения металлов с одним (или несколькими) из следующих факторов:

1) давление молекулярного водорода в микрополостях в металле;

2) обусловленная водородом декогезия (ослабление межатомного сцепления) в кристаллической решетке металла;

3) взаимодействие атомов водорода в металле с дислокациями;

4) химическое взаимодействие водорода с компонентами сплавов и выделение водородсодержащих фаз (гидридов и т. п.);

5) поверхностное воздействие (хемосорбция) в системе металл — водород (среда).

Каждая из гипотез предполагает ответственным за облегчение разрушения металлов («охрупчивание») обычно лишь один из названных факторов, однако условий, при которых он может стать действительно определяющим,

не оговаривает. Поэтому в ряде случаев гипотеза согласуется с данными экспериментов, а иногда и противоречит им. Теоретические модели роста трещин в металлах при воздействии водорода, разрабатываемые ныне, призваны дать ответ на следующие вопросы: каким образом и по каким данным, получаемым при испытании лабораторных образцов, можно судить о работоспособности конструкций из конкретного материала при заданных условиях, а также в каких пределах правомерно использование тех или иных результатов лабораторного опыта.

Анализ особенностей роста трещин в металлах при воздействии водорода. Одно из главных положений теории роста трещин в металлах при воздействии водорода — концепция о коэффициентах интенсивности напряжений как о параметрах, однозначно определяющих механическое состояние материала в зоне предразрушения у фронта трещины независимо от особенностей, способа нагружения и геометрии тела (при выполнении известных условий автомодельности зоны предразрушения). Аксиомы этой теории следующие:

1. Для локального разрушения металла (продвижения трещины) при данной интенсивности механического воздействия на материал (при заданных коэффициентах интенсивности напряжений) необходимо наличие определенного количества водорода в некоторых микрообъемах металла в зоне предразрушения.

2. В процессе деформирования металла к моменту достижения определенного уровня нагружения в ответственных за разрушение микрообъемах не обязательно накопление необходимого для разрушения количества водорода. Однако оно может быть получено там по истечении некоторого времени в процессе установления равновесного состояния в системе металл — водород. Таким образом, рост трещин в металлах при воздействии водорода контролируется не только свойствами материалов, но и особенностями процессов переноса и накопления водорода в локальных областях данной системы металл — водород.

Этими двумя особенностями и отличается процесс роста трещин в металлах при воздействии водорода от хрупкого их разрушения при статическом нагружении в обычных условиях, когда зависимость процесса разрушения от времени, т. е. наличие контролируемого процесса переноса субкритического медленного подрастания трещины, настолько слабо выражена, что ею можно пренебречь без большого ущерба для адекватности описания явления.

При водородном охрупчивании металлов расчетной модели линейной механики разрушения (например, модели Гриффитса — Ирвина) развития макротрещин уже не достаточно для описания процесса роста трещины. Связано это с тем, что названная модель исходит из представления о существовании только двух состояний трещины — распространяющаяся и нераспространяющаяся трещина — и соответственно единственного критического параметра, устанавливающего границу между этими состояниями. При водородном охрупчивании различаются уже три состояния трещины, которым отвечают три диапазона изменения коэффициента интенсивности напряжений K_I.

Первое наступает тогда, когда физико-химические свойства системы при данном уровне нагрузки не могут обеспечить выполнение условий, достаточных для начала роста трещины. Этому состоянию соответствует диапазон изменения коэффициента интенсивности напряжений $K_I \leqslant K_{IHSC}$, где K_{IHSC} — пороговое значение коэффициента для обусловленного водородом роста трещины. Второе состояние характеризуется медленным докритическим подрастанием трещины при $K_{IHSC} < K_I < K_{ICH}$, когда рост трещины тормозится процессами переноса водорода в очаг разрушения.

Третье — это состояние закритического роста трещины при $K_I \geq K_{ICH}$, когда распространение трещины при данном распределении водорода в системе обеспечивается чисто механическим фактором — уровнем нагружения — и не предполагает какого-либо перераспределения водорода. Это состояние трещины аналогично состоянию ее развития при статических испытаниях в обычных условиях. При этом соответствующий критический параметр K_{ICH} по физическому смыслу близок к характеристике обычной предельной кратковременной статической трещиностойкости K_{IC}, хотя численно может и отличаться от нее. (Практически эта возможность реализуется редко, например при равномерном насыщении металла водородом, когда обусловленное водородом заметное изменение его свойств происходит одновременно по всему сечению.)

Многими исследователями в качестве количественной характеристики сопротивления металлов росту трещин при воздействии водорода используется параметр кратковременной трещиностойкости, определяемый по стандартной методике (стандарт ASTM, государственный стандарт) и по аналогии с обычной характеристикой вязкости разрушения обозначаемый K_{IC}. (Здесь этот параметр будет обозначен K'_{IQH} для того, чтобы подчеркнуть его отличие по существу от критической характеристики K_{IC} или K_{ICH}.)

Этот параметр, полученный в рамках обычных концепций линейной механики, не дает объективную сопоставимую характеристику поведения трещины именно в материале. Подтверждение данного тезиса было получено следующим образом. По стандартной методике для определения трещиностойкости материала были проведены сравнительные испытания одной и той же стали в обычных условиях и в среде газообразного водорода. Результаты опытов, а также вид поверхностей излома образцов приведены на рис. 7.5.

На нелинейном участке диаграммы «нагрузка P — смещение Δ» (испытание в водороде) определялись величины K'_{IQH} (в соответствии с рекомендациями стандарта по методу 5 %-й секущей) и K_{ICH}. Последняя отвечает переходу от замедленного разрушения к быстрому — точка P_f на диаграмме «P — Δ» и линия раздела S на поверхности разрушения. Установлено, что значение K_{ICH} равно критическому значению коэффициента интенсивности напряжений K_{IC}, полученному при отсутствии водорода. Кроме того, значение K_{IQH} является лишь некоторым значением из целого диапазона $K_{IHSC} < K_I < K_{IC}$, соответствующего стадии медленного докритического подрастания трещины. Величина K_{IQH}, строго говоря, характеризует однозначно лишь поведение конкретного образца с трещиной, но не может быть параметром, описывающим поведение материала в данных условиях. Действительно, определяемая по методу 5 %-й секущей, а фактически по 2 %-му приросту трещины, величина K_{IQH} зависит не только от условий нагружения (скорости изменения коэффициента интенсивности напряжений $\dot{K}_I$), средней скорости подрастания трещины $v_{ср}$ на промежутке от l_0 до $l_0 + \Delta l$ (l_0 — начальная длина трещины), но и от расчетного прироста трещины $\Delta l = 0{,}02 l_0$, т. е. от размера образца и даже от исходной длины трещины в нем. Такая зависимость в первом приближении описывается соотношением

$$K'_{IQH} = K_{IHSC} + \dot{K}_I \, (0{,}02 l_0 / v_{ср}). \qquad (7.15)$$

Последнее указывает, что к использованию получаемых указанным спо-

собом данных о величине K_{IQH} для сравнения качества материалов и прогнозирования поведения трещин в конструкциях следует относиться осторожно.

В последние годы для установления закономерностей роста трещин в металлах при воздействии водорода изучаются зависимости скорости роста

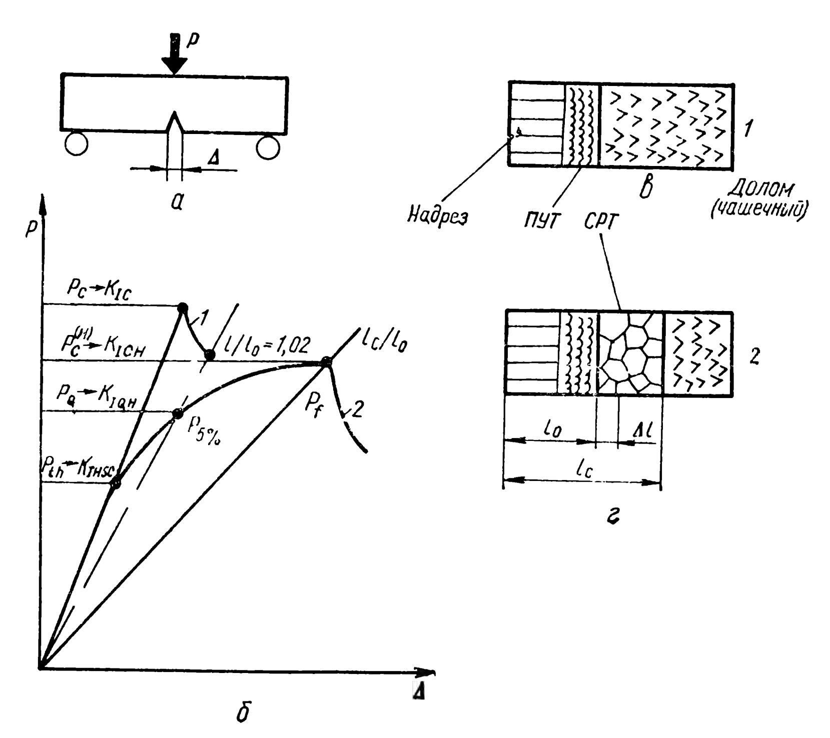


Рис. 7.5. Схема нагружения образца (*а*), диаграмма разрушения P—Δ (*б*) и внешний вид поверхностей излома (*в*, *г*):

1 — на воздухе; *2* — в среде водорода (P_{th} — пороговая нагрузка, соответствующая отклонению линейности диаграммы P—Δ за счет начавшегося докритического роста трещины; P_Q — нагрузка, соответствующая 5 %-й секущей; P_C(Н) и P_C — критическая нагрузка, соответствующая переходу к неконтролируемому росту трещины при и без наличия водорода; K_{IHSC}, K_{IQH}, K_{ICH} и K_{IC} — соответствующие значения коэффициентов интенсивности напряжений; ПУТ — поверхность усталостной трещины; СРТ — субкритический рост трещины вследствие воздействия водорода — межзеренный скол).

трещины $v = dl/dt$ от коэффициента интенсивности напряжений. Их можно считать основными, присущими каждой системе «металл — водород», диаграммами, несущими наиболее полную сопоставимую информацию о сопротивлении материалов росту трещин в заданных условиях взаимодействия с водородом, а значит, и использовать их для расчета роста трещин в конструкциях. По-видимому, все определяемые экспериментально параметры и зависимости, характеризующие трещиностойкость металла в системе «металл — водород» (K_{IHSC}, K_{IHC}), либо непосредственно содер-

жатся в этих диаграммах, либо могут быть рассчитаны на их основе. Такие диаграммы иногда называют кинетическими диаграммами статической трещиностойкости металлов (далее — КДТ). Так, применявшиеся долгое время диаграммы замедленного разрушения в координатах «приложенная нагрузка (или начальное значение коэффициента K_{Ii}) — время до разрушения $t_р$» находятся из КДТ с помощью соотношения

$$t_р = \int\limits_{K_{Ii}}^{K_{IHC}} \frac{dl\,(K_I)/dK_I}{v\,(K_I)}\, dK_I. \qquad (7.16)$$

В этой области научных разработок значительный прогресс был достигнут благодаря усилиям Г. П. Черепанова, К. Гербериха, X. Ван-Лиювена, Б. А. Колачева и многих других [7]. Однако теоретические модели распространения магистральных трещин в металлах при водородном охрупчивании часто чрезмерно схематизированы и не учитывают в достаточной мере ни результатов изучения элементарных эффектов взаимодействия водорода в деформируемом металле с атомами кристаллической решетки и дефектами строения, ни достижений физической теории микроскопических процессов деформирования и разрушения. Многие из них не связывают причин со следствиями и не дают замкнутого описания кинетики развития трещин в материалах при воздействии водорода. Поэтому проблема создания теории распространения трещин в металлах при действии водорода, которая учитывала бы особенности упругопластических свойств у контура трещины, а также микроскопические эффекты взаимодействия в металлах водорода с дефектами строения, зародышами разрушения и т. п., остается актуальной.

Принципиальным для теории распространения магистральных трещин в металлах при воздействии водорода является вопрос о критериальном условии, связывающем интенсивность механического воздействия на металл у фронта макротрещины (она определяется значением коэффициента интенсивности напряжений) с количеством водорода в очаге разрушения в момент достижения в окрестности вершины трещины предела устойчивого деформирования материала. При этом критерий предельного состояния потенциальной области разрушения в общем случае должен учитывать то, что в зависимости от распределения водорода точки названной области становятся неравноправными в отношении необходимого для разрушения напряженно-деформированного состояния. Этот критерий следует формулировать как условие достижения в точке x около вершины трещины концентрацией водорода C ее критического значения C_C. Последнее определяется компонентами тензоров напряжений σ_C и деформаций ε_{ij}, которые являются функциями коэффициента K_I и положения точки x. Общий вид критерия начала разрушения можно записать так:

$$C\,(x,\,t) = C_C\,(K_I,\; x), \qquad (7.17)$$

где

$$x \approx \delta_I \approx \frac{K_I^2}{E\sigma_т}. \qquad (7.18)$$

Выражение (7.18) характеризует зону зарождения разрушения, протяженность которой (считают) соизмерима с раскрытием трещины.

Предложено большое количество теоретических схем-моделей механизма этого явления [6, 7, 15—18]. При этом в одних не идут дальше качественного истолкования тех или иных эффектов водородного охрупчивания

металлов, а в других — рассматриваются теоретические схемы, подкрепленные количественным анализом. Но известные теоретические схемы зачастую ограничены рассмотрением лишь части из «охрупчивающих» факторов (декогезионного воздействия водорода на кристаллическую решетку металла, его взаимодействия с дислокациями, давления газа водорода в несплошностях), роль которых абсолютизируется вне связи с конкретной последовательностью событий в очаге разрушения. В результате нередко допускается неверная оценка роли того или иного фактора.

Качественная схема процесса роста магистральных трещин в металлах, обусловленного водородом. Данная схема не рассматривает случаев, когда возможна обусловленная водородом деградация металла химической природы (гидридная хрупкость, водородная коррозия и т. п.). Принимается, что строение концевой зоны макротрещины распространяющейся в металле при воздействии водорода, не отличается от строения ее концевой зоны при отсутствии воздействия водорода. Отсюда характерные свойства макротрещины в рассматриваемых материалах сводятся к следующему [9, 19, 20]:

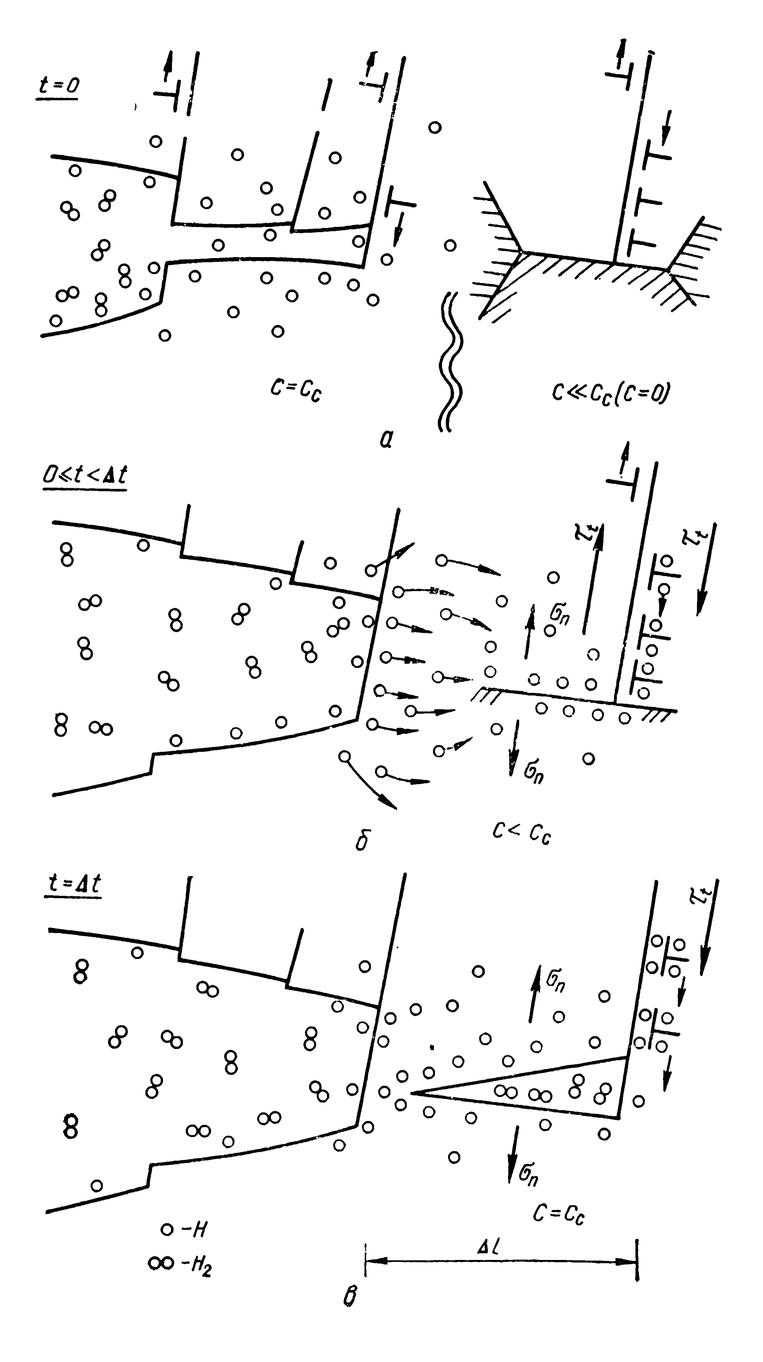
1) профиль макроскопической трещины в ес концевой зоне формируется сдвигом, напряжения в окрестности вершины трещины всюду существенно ниже идеальной прочности решетки;

2) конец трещины окружен областью интенсивной пластической деформации, которой присуща неоднородность, обусловленная ее дискретной дислокационной природой. Эта неоднородность является источником локальных перенапряжений в зоне предразрушения. Вместе с тем непосредственно к вершине трещины прилегает область, свободная от дислокационных неоднородностей и перенапряжений.

Процесс распространения такой трещины связан с образованием на некотором расстоянии от ее вершины острой микротрещины и ее продвижением в глубь металла и навстречу макротрещине. Данный процесс может реализовываться благодаря уменьшению под воздействием водорода у кончика трещины когезионной прочности решетки до уровня имеющихся в этом месте механических напряжений (значения соизмеримы с пределом текучести материала $\sigma_т$). Таким образом, осуществимость рассматриваемого механизма движения макротрещины будет зависеть от способности водорода вызывать многократное уменьшение когезионной прочности решетки металла (на несколько порядков) в зоне предразрушения.

Ощутимое влияние водорода на металл наблюдается в том случае, если в металле происходит микролокализация пластической деформации. Например, нитевидные кристаллы железа приобретают высокую чувствительность к водороду только вместе с появлением неоднородности пластической деформации.

Качественные аспекты теории роста магистральных трещин в металлах при воздействии водородсодержащих сред с учетом общих положений физической теории разрушения [20] можно представить следующим образом [8, 9] (см. рис. 7.6). При нагружении тела с макроскопической затупленной трещиной в окрестности ее вершины задолго до достижения предельного равновесного состояния, когда $K_I = K_{IC}$, образуется зона интенсивной пластической деформации. Из-за локальной неоднородности последней формируются группы избыточных дислокаций одного знака. Будучи заблокированными препятствиями (границами зерен, фаз и т. д.), они образуют заторможенные скопления, вызывают высокие локальные перенапряжения и создают структуры — предвестники дислокационных трещин. Причем эти вероятные очаги зарождения разрушения могут возникнуть на определенном расстоянии от кончика трещины, зависящем, в частности, от параметров дислокационной структуры, таких, как размер источника дислокации и т. п. Водород, поступающий в металл через его поверхность, не успевает сразу скопиться около вершины трещины в зоне образования



t = 0
C = Cc
C ≪ Cc (C = 0)
а
0 ≤ t < Δt
τt
σn
τt
σn
C < Cc
б
t = Δt
τt
σn
σn
C = Cc
○ – H
○○ – H2
Δl
в

потенциальных зародышей разрушения в количестве, способном оказать ощутимое влияние на их формирование (при не слишком медленном нагружении). Если нагружение продолжается, через некоторое время устойчивость дислокационных скоплений в зоне предразрушения нарушится. Возникнет встречная дислокационная микротрещина, посредством поглощения которой будет осуществляться рост магистральной трещины. Это произойдет, когда коэффициент интенсивности напряжений у фронта макротрещины достигнет значения K_{IC}.

При ограничении нагружения уровнем $K_I < K_{IC}$ до поступления водорода в количествах, имеющих практическое значение, в зоне предразрушения будут формироваться более или менее мощные равновесные дислокационные скопления По мере насыщения металла водородом в силу микроскопических эффектов обусловленных его наличием в металле (изменение межатомных сил связи, эффекты взаимодействия водорода с дислокациями, или иные), могут произойти нарушение равновесия и релаксация дислокационной конфигурации, переход скопления в неустойчивое состояние и его превращение в дислокационную микротрещину. Этому способствует также образование микросегрегаций водорода в потенциальных очагах разрушения и т. п. Соединение микротрещины с магистральной означает свершение акта подрастания макротрещины. Дальнейшее ее распространение будет остановлено на некотором расстоянии от первоначального положения ее вершины областью металла, не насыщенного еще достаточно водородом. В окрестности вновь образовавшегося конца трещины опять возникнет зона предразрушения с дислокационными предвестниками разрушения, а через поверхность металла в раскрывшейся вершине трещины снова произойдет его наводороживание и т. д.

Таким образом, рост макротрещины будет происходить последовательными скачками. Средний период Δt осуществления цикла «взвод предвестника разрушения — накопление водорода — релаксация взведенной дислокационной конфигурации» будет периодом повторения скачков, который вместе с их средней длиной Δl определит среднюю макроскопическую скорость распространения магистральной трещины $v = \Delta l / \Delta t$.

Справедливость предложенной теоретической схемы подтверждается, в частности, нарушением (при поступлении водорода в металл) равновесия предвестников разрушения — дислокационных скоплений, приводящим к сваливанию последних в дислокационные трещины. В пользу этой схемы говорят данные Р. Ориани и П. Джозефика о всплескообразном ускорении релаксации напряжений в деформируемом образце и о ползучести в нагруженном образце при комнатной температуре в процессе наводороживания, которые объясняются подвижкой прежде заторможенных скоплений. Следствием предполагаемого нарушения равновесия дислокационных скоплений и их подвижки по мере поступления водорода должна быть задержанная локальная пластическая деформация. Такой факт действительно наблюдался экспериментально в окрестности вершины трещины в металле, подвергнутом воздействию водородсодержащих сред. Наконец, результаты многих исследований показывают, что не только локализация

Рис. 7.6. Схематическое представление развития событий в зоне предразрушения:

а — начальное состояние зоны предразрушения у вершины макротрещины; *б* — накопление водорода и подготовка акта локального разрушения у вершины макротрещины (образование сепаратных микротрещин на дислокационных неоднородностях); *в* — осуществление акта локального разрушения — подрастания макротрещины посредством поглощения дислокационных микротрещин.

пластичности металла отражается непосредственно на их чувствительности к водороду, но и что имевшие место хрупкие типы (виды) разрушения при более детальном рассмотрении всегда оказывались связанными с локализованными вспышками пластической деформации.

Модель механизма разрушения и критерии локальной неустойчивости материала у фронта макротрещины при воздействии водорода. В реальном поликристаллическом материале микропластическая существенно неоднородная деформация — непременная подготовительная стадия всякого разрушения металлов, в том числе и хрупкого. Это связано главным образом с

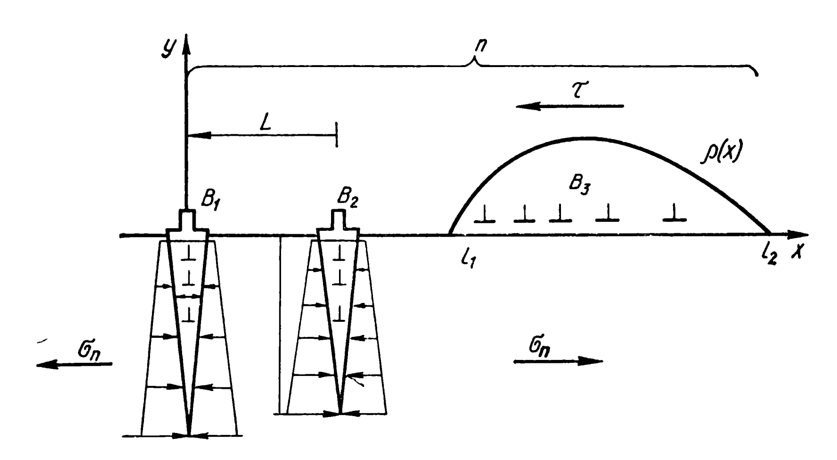


Рис. 7.7. Комбинированная дискретно-континуальная модель заторможенного скопления краевых дислокаций.

взаимодействием одноименных дислокаций в заторможенных скоплениях.

Для описания процесса зарождения и развития разрушения в таких перенапряженных объемах деформируемого твердого тела важное значение имеет учет структуры ядра головной дислокации и дискретности головной части самого дислокационного скопления. В этой связи рассмотрим комбинированную дискретно-континуальную модель заторможенного скопления дислокаций, схематически показанную на рис. 7.7.

Пусть дислокационное скопление, содержащее n дислокаций с векторами Бюргерса $\mathbf{b}$, находится в поле нормального напряжения σ_n и прижимается напряжением τ к некоторому барьеру. В этом скоплении две лидирующие дислокации рассматриваются дискретно, а остальные континуально. Для выделенных дислокаций скопления вводим в рассмотрение модель ядра, аналогичную механической модели сил сцепления в теории микроскопических трещин. Точнее, ядро рассматривается как клиновидная полость в упругом континууме, берега которой стягиваются некоторыми усилиями, характеризующими взаимодействие атомных плоскостей, а напряжения в вершине клиновидного ядра равны теоретической прочности решетки $g_т$. Структура ядра дислокации существенно влияет на силу взаимодействия дислокаций между собой. Если исходить из принятой структуры ядра дислокации, то эта сила при малых расстояниях L между дислокациями существенно отличается от зависимости вида L^{-1}, которая получается в классической теории дислокаций (пунктирная линия на рис. 7.8). А именно, сила $F_{B_1B_2}$ взаимного отталкивания дислокаций B_1 и B_2 при

их сближении возрастает до некоторого предельного значения, а затем при дальнейшем сближении дислокаций начинает быстро убывать (сплошная линия на рис. 7.8). Это означает, что по мере сближения головных дислокаций скопления под действием как внешнего напряжения τ, так и напряжения от хвостовой части скопления B_3 возможна ситуация, когда сила $F_{B_1B_2}$ уже не сможет препятствовать сближению дислокаций. Таким образом, наступает неустойчивость положения дислокации B_2 и ее сваливание в головную дислокацию скопления B_1, т. е. их слияние с образованием некоторой сверхдислокации с вектором Бюргерса, равным 2**b**, и так далее. В таком случае условие неустойчивости дислокационной структуры записывается в виде [9]

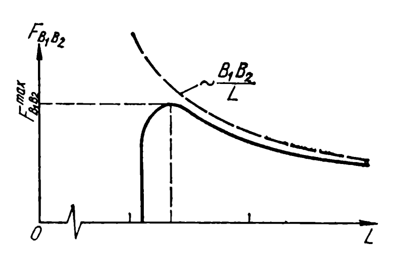


Рис. 7.8. Схема взаимодействия дислокаций B_1 и B_2 в голове скопления.

$$n(\tau - \tau_{\text{т.р}}) = 0{,}31\ (g_* - \sigma_{\text{п}}). \quad (7.19)$$

Здесь $\tau_{\text{т.р}}$ — сопротивление решетки движению дислокации (сопротивление трения решетки); $g_* = \nu_0 g_{\text{т}}$, где ν_0 — коэффициент, отражающий неоднородность сил межатомного взаимодействия в ядре дислокации ($3/4 \leqslant \nu_0 \leqslant 1$).

Взаимодействие между берегами сверхдислокации с вектором Бюргерса 2**b** в железе, как показывают расчеты в рамках атомистических моделей, отсутствует, т. е. такая сверхдислокация уже считается зародышевой микротрещиной. Таким образом, условие (7.19) становится условием зарождения разрушения в голове скопления дислокаций (в зоне предразрушения).

Продолжая аналогично рассмотрение образовавшейся после удовлетворения условий (7.19) дислокационной конфигурации с учетом свойств сверхдислокации — трещины $B_1 \gg 2B$, мы получим условие роста зародышевой микротрещины посредством присоединения дислокаций скопления

$$n(\tau - \tau_{\text{т.р}}) = 3{,}35\ (\gamma/b - 1{,}5\sigma_{\text{п}}). \quad (7.20)$$

В соответствии с формулой Орована $\gamma = g_{\text{т}}^2 b/E$. Условие неустойчивости положения одной дислокации, ближайшей к головному элементу скопления, можно считать условием неустойчивости всего скопления [20], которое после выполнения критерия (7.20) целиком сваливается в расширяющуюся дислокационную трещину.

Водород, попадая в металл, облегчает разрушение в сформировавшемся дислокационном скоплении двумя путями: уменьшением либо сопротивления трения решетки $\tau_{\text{т.р}}$, либо когезионных свойств решетки в ядре дислокации, т. е. уменьшением значений $g_{\text{т}}$ и γ. Примечательно, что не только величина, но и знак изменения сопротивления трения решетки под действием водорода весьма чувствительны к изменениям на атомном уровне структуры и свойств сплавов, а также к типу преобладающей системы скольжения с присущим ему кристаллографическим строением дислокаций. Значит, данный фактор относится к числу специфических особенностей кон-

кретных сплавов, причем он может как облегчать разрушение, так и препятствовать ему Сравнение этого с тем фактом, что вредное влияние водорода — явление весьма универсальное, заставляет усомниться в решающей роли данного фактора в процессе охрупчивания.

Что касается уменьшения когезионных свойств решетки в зоне ядра дислокации под воздействием водорода, то сейчас наличие самой декогезии электронной природы (т. е. связанной с изменениями при наличии водорода электронной структуры металлов) считается достаточно обоснованным. Если учесть, что область ядра дислокации служит местом предпочтительной локализации атомов водорода, то ядро можно считать центром кластерообразования, а также областью локализации связей металл — водород гидридного типа, существование которых предполагается возможным даже в металлах, не образующих гидридов (в обычном понимании). Оба эффекта — источники специфической декогезии, обусловленной удлинением некоторых из связей металл — металл, а значит, и ослаблением соответствующих сил взаимодействия. Таким образом, применительно к области ядра дислокации эффективная декогезия представляет собой суммарный результат трех воздействий: электронной, гидридной и кластерной природы. Объединенный декогезионный эффект — явление гораздо более универсальное, чем каждое из указанных в отдельности. Поэтому основой механизмов влияния водорода на разрушение металлов считается декогезия свойств решетки металла в зоне ядра дислокации. Такой подход, называемый дислокационно-декогезионной концепцией водородного охрупчивания, обобщает традиционный вариант декогезионной концепции Трояно — Ориани.

В рамках дислокационно-декогезионной концепции дальнейшее развитие событий в сформировавшемся без участия водорода скоплении выглядит следующим образом. Поступающий в металл водород прежде всего заполняет наиболее выгодные с энергетической точки зрения места. К ним относятся ядра дислокаций, в которых концентрация водорода может достигать значений, сравнимых с единицей и даже больших единицы. При этом происходит ослабление когезии в ядре трещинообразующей дислокации (вершине сверхдислокации-микротрещины) B_1, т. е. уменьшение силы сцепления $g_т$, которая теперь является функцией количества водорода в зоне ядра дислокации или сверхдислокации $g_т\ (N_0)$ (здесь в качестве N_0 можно принять количество атомов водорода в ядре дислокации на единицу ее длины или в вершине дислокационной трещины на единицу длины ее фронта). Из-за недостаточно полной информации о функции $g_т\ (N_0)$ ее принимают в виде линейного соотношения

$$g_т\ (N_0) = g_т^0 - k_д N_0, \tag{7.21}$$

где $g_т^0$ — теоретическая прочность решетки при отсутствии водорода; $k_д$ — феноменологический коэффициент, отражающий эффективное декогезионное действие водорода в трещинообразующей дислокации (или сверхдислокации).

С учетом соотношения (7.21) приведенные выше условия инициирования и распространения микротрещины (7.19) и (7.20) становятся критериями вызванного водородом зарождения и развития микроразрушения в металле, явный вид которых получается без затруднений.

Величина N_0 связана с объемной концентрацией C водорода в элементе макрообъема металла в каждый момент времени линейной зависимостью

$$N_0 = \theta C, \tag{7.22}$$

где коэффициент пропорциональности θ зависит от плотности дефектов (дислокаций) в металле, энергии связи U_0 с ними водорода и температуры

(в соответствии с распределением Больцмана (7.14)). (Хотя значение энергии связи водорода с вершиной атомарно-острой микротрещины неизвестно, однако можно полагать, что оно заключено между энергиями связи атома водорода с ядром дислокации и со свободной поверхностью металла. Учитывая, что последние не слишком сильно отличаются между собой, значения энергий, связанных с обоими дефектами, принимаются одинаковыми и равными U_0.)

На рис. 7.9 представлены критериальные условия для вызванного водородом зарождения и распространения микротрещины, определяемые соотношениями (7.19) и (7.20) при учете зависимости (7.21). Критерий «окончательного» разрушения на микроуровне как потери устойчивости деформирования в содержащем рассматриваемое дислокационное скопление (предвестник микроразрушения) микрообъеме будет определяться более жестким условием: условием зарождения (7.19) или роста (7.20) дислокационной трещины. На рис. 7.9 этому критерию соответствует заштрихованная поверхность.

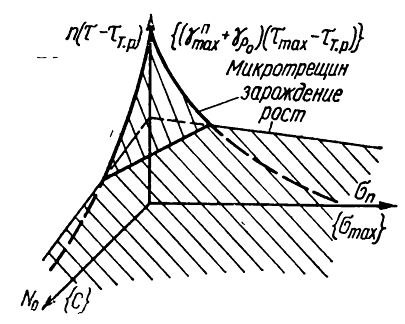


Рис. 7.9. Схематическое изображение условий зарождения и развития разрушения в терминах микро- (макро-) переменных.

Модель макромеханизма разрушения металлов, обусловленного водородом, составляет основу для мотивированного построения соотношений, связывающих физические явления разрушения с макропараметрами состояния материала — напряжениями σ_{ij}, деформациями ε_{ij}, объемной макроконцентрацией C водорода в металле. Осуществить такое построение можно в соответствии с общими принципами формирования физических макромоделей процессов в твердых телах (деформирования, диффузии), связывающих свойства макрообъектов с закономерностями поведения их структурных микроэлементов. Процесс деформирования протекает в две стадии — микропластических деформаций в отдельных наиболее благоприятных системах скольжения, где раньше всего касательные напряжения превысят сопротивление трения решетки $\tau_{т.р}$, и макропластического деформирования, наступающего при превышении касательными напряжениями в теле величины предела текучести $\tau_т$ при сдвиге. Поэтому мощности n вероятных заторможенных скоплений в поликристалле связаны с имеющейся в нем начальной плотностью ρ_0 дислокаций и максимальной пластической деформацией сдвига $\gamma^п_{max}$ следующим соотношением:

$$n = (\varkappa_0 b\rho_0 + \gamma^п_{max})/\hat{\gamma}, \qquad (7.23)$$

где коэффициент $\varkappa_0$ — мера неоднородности исходной дислокационной структуры тела (локализации дислокаций в группы — плоские скопления); $\hat{\gamma}$ — «квант» пластической деформации сдвига (подобно вектору Бюргерса b — «кванту» пластического сдвига). Акт разрушения в точке тела считается свершившимся, если в некотором наиболее неблагоприятном дислокационном предвестнике разрушения будет удовлетворен более жесткий из микрокритериев разрушения (7.19) и (7.20) при учете зависимости (7.21). Тогда из соотношений (7.19)—(7.23) макрокритерий разрушения в

точке упругопластического тела будет иметь вид

$$(\gamma_{\rho_0} + \gamma^{п}_{max})(\tau_{max} - \tau_i)/\hat{\gamma} = \hat{\sigma}(g^0_т - K_д C \sigma_{п\,max}), \qquad (7.24)$$

где $\gamma_{\rho_0} = \varkappa_0 b \rho_0$ согласно соотношению (7.23); τ_{max} и $\sigma_{п\,max}$ — максимальные касательное и нормальное напряжения в точке тела; $\hat{\sigma}(g_т, \sigma_п)$ — «силовой» фактор разрушения, который определяется большей из правых

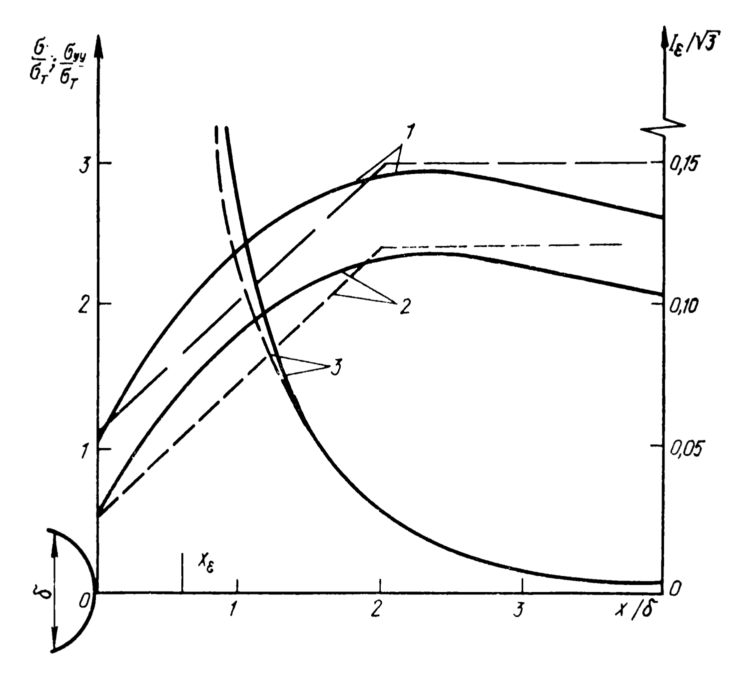


Рис. 7.10. Напряженно-деформированное состояние около вершины макротрещины (по данным Мак-Микина):

1, 2 — распределение компоненты тензора напряжений σ_{yy}, гидростатического напряжения σ и интенсивности деформации I_ε в окрестности вершины трещины (*3*).

частей равенств (7.19) и (7.20) с учетом соотношений (7.21) и (7.22), при этом $K_д = \theta k_д$ согласно формуле (7.22). Соответствующая условию разрушения (7.24) критериальная поверхность в пространстве макропеременных C, $\{\gamma^п_{max}, \tau_{max}\}$, $\sigma_{п\,max}$ отличается от ее микроскопического аналога лишь изменением масштабов по осям координат (рис. 7.9, заштрихованная поверхность).

Учитывая, что максимальная пластическая деформация сдвига $\gamma^п_{max}$ связана с такой механической характеристикой, как относительное сужение гладкого образца ψ ($\gamma^п_{max} = -1{,}5 \ln(1-\psi) \approx 1{,}5\psi$), из рис. 7.9 мож-

но сделать вывод, что сечение критериальной поверхности поверхностью, для которой $\sigma_{n\,max} = \sigma_{разр}$ ($\sigma_{разр}$ — истинное макроскопическое разрушающее напряжение), отражает основные характерные свойства зависимостей $\psi = \psi(C)$, экспериментально определяемых по результатам испытаний гладких предварительно наводороженных образцов. Последнее подсказывает возможность использования экспериментально найденных зависимостей $\psi = \psi(C)$ и $\sigma_{разр} = \sigma_{разр}(C)$ для установления параметров критериальных условий для каждого материала (хотя при этом вряд ли может быть достигнута высокая точность результатов в силу сложностей, связанных с обеспечением необходимой однородности распределения водорода в образце и т. п.).

Вместе с данными о распределении напряжений, деформаций и концентрации водорода $C(t)$ в окрестности вершины трещины в упругопластическом материале зависимость (7.24) определяет критерий (7.17) предельного состояния материала в окрестности вершины трещины. Поскольку область потенциального зарождения разрушения находится в непосредственной близости от вершины макротрещины, то необходимо использовать решения задач, отражающих особенности напряженно-деформированного состояния этой зоны с наибольшей достоверностью. Таковыми могут быть решения в рамках геометрически нелинейных моделей упругопластических сред, каковыми и являются известные решения Райса — Джонсона и МакМикина [7], графически представленные на рис. 7.10.

Кинетика накопления водорода в зоне предразрушения. Зона потенциальных очагов зарождения разрушения находится внутри металла впереди магистральной трещины. Поэтому анализ поступления в нее водорода должен быть основан на рассмотрении диффузии водорода в поле напряжений у фронта макротрещины.

Если апроксимировать полученное численным методом распределение гидростатического напряжения σ на продолжении трещины кусочно-линейной зависимостью (сплошная и штриховая линии *1*, *2* на рис. 7.10), то уравнение диффузии водорода в поле напряжений (7.12) сводится к следующему уравнению с кусочно-непрерывными коэффициентами:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - H(x_{max} - x)\,\frac{DV_H(\sigma_{max} - \sigma^0)}{RT_{x_{max}}}\,\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \qquad (7.25)$$

при выполнении условий непрерывности концентрации и потока водорода при $x = x_{max}$. Здесь x — расстояние от вершины трещины в глубь металла в плоскости ее роста; x_{max} — абсцисса точки достижения максимумов механического напряжения и его гидростатического компонента σ_{max}; $\sigma^0 = \sigma|_{x=0}$; $H(\cdot)$ — функция Хевисайда.

При нулевом начальном условии и при граничных условиях постоянства концентрации на поверхности металла в вершине трещины $C|_{x=0} = C_{пов}$ и ее ограниченности вдали от трещины замкнутое приближенное решение уравнения (7.25) имеет вид

$$\frac{C}{C_{пов}} = e^{\Omega\xi}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + (e^{-\Omega\xi} - 1)\,e^{\Lambda\xi + \Lambda^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \Lambda\sqrt{\tau}\right)\right], \qquad (7.26)$$

где введены обозначения $\xi = x/x_{max}$, $\tau = Dt/x_{max}^2$, $\Omega = V_H(\sigma_{max}\sigma^0)/(2RT)$, а $\Lambda(\Omega, \xi)$ — параметр асимптотической эквивалентности, который находится

из решения некоторой экстремальной задачи. Характер его изменения показан на рис. 7.11.

На рис. 7.12 приведены результаты вычисления по формуле (7.26) изменения концентрации водорода около вершины макротрещины при значениях параметров, соответствующих сталям разных уровней прочности, а именно: $\sigma_т = 869$ МПа (сталь марки 45ХГМС) и $\sigma_т = 1450$ МПа (сталь марки 40ХН2М) при $V_H = 1{,}96$ см³/моль, $T = 295$ К, а также (согласно условию Мизеса и данным Мак-Микина) $\sigma_0 = \sigma_т/\sqrt{3}$, а $\sigma_{max} = 2{,}4\ \sigma_т$. На рис. 7.12 для оценки реального масштаба времени дана шкала времени при $x_{max} = 2\delta = 1{,}22\,K_I^2/(E\sigma_т)$ для $K_I = 40$ МПа$\cdot\sqrt{м}$, $D = 10^{-10}$ м²/с, $E = 201$ ГПа, $\sigma_т = 1450$ МПа.

Математическое описание кинетики роста макротрещины. В соответствии с представлениями о распространении макротрещины в металлах, вызванном водородом, из математических соотношений, описывающих поступление водорода в зону предразрушения (7.26),

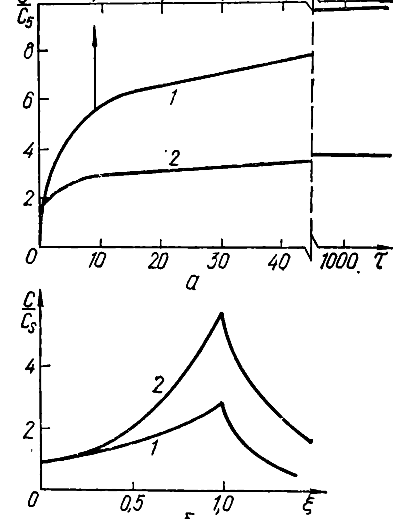


Рис. 7.11. Зависимость функции Λ (Ω, ξ) от Ω при ξ=0,5 (*1*) и ξ= =1,0 (*2*).

Рис. 7.12. Изменение концентрации водорода во времени при ξ=1 (*а*) и в зависимости от расстояния от вершины трещины при τ=10 (*б*):
1 — сталь марки 40ХН2М; *2* — сталь марки 45ХГМС.

и критериальных условий разрушения (7.18) с учетом его конкретизации (7.24), систему уравнений зависимости скорости докритического роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений можно получить следующим образом (рис. 7.13).

Условие разрушения (7.17) есть условие достижения в некоторой опасной точке $x = x_C$ концентрацией водорода C ее критического значения C_C, т. е.

$$C\left(\frac{x_C}{x_{max}},\ \frac{D\Delta l}{x_{max}^2 v}\right) = C_C\ (K_I,\ x_C) \qquad (7.27)$$

(здесь учтено, что $\Delta t = \Delta l/v$, где Δl — длина скачка трещины; v — скорость распространения трещины).

Сама опасная точка определяется тем, что в ней критериальное условие разрушения выполняется впервые, т. е.

$$C'_{x_C}\left(\frac{x_C}{x_{max}}\quad\frac{D\Delta l}{x_{max}^2 v}\right) = C'_{C,x_C}(K_I,\ x_C),\quad \left([\ ]'_{x_C} \equiv \frac{\partial}{\partial x_C}\right). \qquad (7.28)$$

Длина скачка трещины Δl определяется протяженностью области, в которой концентрация водорода превышает достигнутый в точке x_C критический уровень, т. е.

$$C\left(\frac{\Delta l}{x_{max}},\ \frac{D\Delta l}{x_{max}^2 v}\right) = C_C(K_I,\ x_C). \qquad (7.29)$$

Левые части уравнений (7.27) — (7.29) определяются формулой (7.26). Система уравнений (7.27) — (7.29) дает замкнутое описание докритического роста трещины в металле при воздействии водорода.

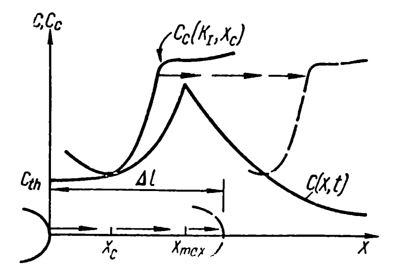


Рис. 7.13. Ситуация в окрестности вершины трещины к моменту локального разрушения.

Анализ системы уравнений (7.27)—(7.29) с учетом представлений для входящих в нее функций (7 24), (7.26) и данных о распределении напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, которые хорошо аппроксимируются соответственно кусочно-линейной зависимостью и обратной степенной зависимостью вида $\gamma_{max}^{п} \sim (x/\delta)^2$, где раскрытие трещины связано с коэффициентом интенсивности напряжений формулой (7.18), позволяет заключить, что координата опасной точки x_C находится между точками достижения максимальных напряжений $x_{max} \approx 2\delta$ и интенсивной концентрации пластических деформаций $x_\varepsilon \lesssim \delta$ (см. рис. 7.10). При этом в зависимости от конкретных свойств сплава достижение критического состояния в зоне предразрушения может быть связано с достижением критической степени деформации или напряжения. Для не слишком малопластичных сплавов, каковыми являются многие стали, предпочтителен первый путь. В этом случае местоположение опасной точки становится детерминированным ($x_C = x_\varepsilon$), что существенно упрощает систему уравнений (7.27)—(7.29), так как позволяет исключить второе уравнение, а правые части представить функцией $C_C = C_C(K_I)$. С учетом связи критериального условия (7.24) с зависимостями механических характеристик гладких образцов от концентрации водорода в них и установленных в рамках континуально структурных моделей связей между обычными механическими характеристиками и параметрами трещиностойкости материала можно осуществить непосредственный переход от критериального условия вида (7.24) к соотношению типа $C_C = C_C(K_I)$.

Например, используя установленную в рамках деформационных моделей механики разрушения связь между предельной локальной деформацией у фронта трещины, значением коэффициента интенсивности напряжений и деформацией при разрушении гладкого образца $\varepsilon_C = \ln[1/(1-\psi)]$, критериальное условие можно найти в виде, разрешенном относительно K_I:

$$K_{I*}(C) = \sqrt{dE\sigma_{т}\ln\frac{1}{1-\psi(C)}}, \qquad (7.30)$$

где d — параметр, контролируемый структурой материала и жесткостью напряженно-деформированного состояния в вершине трещины.

В результате уравнение для теоретического описания зависимости скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений имеет вид

$$C\left(\frac{x_\varepsilon}{x_{max}},\ \frac{DE\sigma_т}{dK_I^2 v}\right) = C_C\,(K_I), \tag{7.31}$$

где слева стоит решение уравнения диффузии водорода в поле напряжений (7.26), а справа — функция, обратная функции, представленной соотношением (7.30).

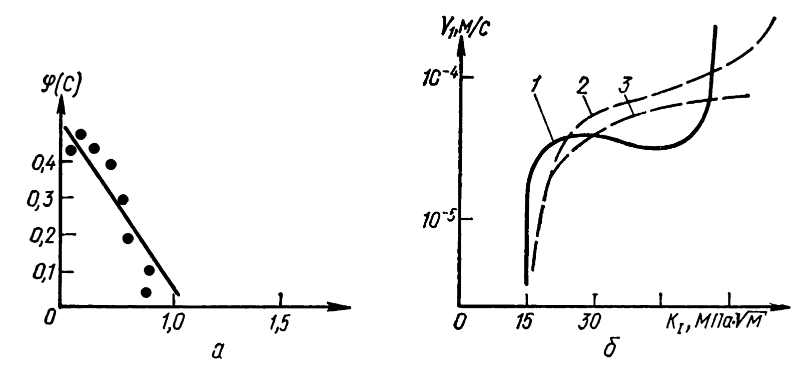


Рис. 7.14. Теоретическое построение кинетической диаграммы растрескивания с помощью соотношений (7.26), (7.30), (7.31):

а — экспериментальная зависимость $\psi=\psi(C)$ для стали 35ХН2ГМ; *б* — кинетические диаграммы трещиностойкости в среде водорода для сталей (*1* — расчетная диаграмма для стали 35ХН2ГМ; *2* и *3* — экспериментальные диаграммы для сталей 35Х2Н3М и 35ХН2ГМФ).

Соотношения (7.26), (7.30) и (7.31) позволяют по данным о механических характеристиках материала (E, $\sigma_т$ и т. д.), константам переноса водорода в металле и константам его взаимодействия с водородсодержащей средой (D, V_H, $C_{пов}$) расчетным путем построить кинетическую диаграмму трещиностойкости металла. При этом для рассматриваемого металла необходимо экспериментально установить зависимость относительного сужения $\psi = \psi\,(C)$ испытываемого образца, который предварительно однородно наводорожен до концентрации C.

Расчеты, выполненные в рамках изложенных модельных представлений для стали 35ХН2ГМ ($\sigma_т = 1581$ МПа, $K_{IC} = 75$ МПа$\cdot\sqrt{м}$, $\psi\,(0)=0{,}47$, зависимость $\psi = \psi\,(C)$ хорошо представляется линейным соотношением $\psi\,(C) = \psi\,(0) - \beta C$ при $\beta = 0{,}019$ м³/моль (рис. 7.14, *а*), $D = 6\cdot10^{-9}$м²/с), при давлении водорода $P_{H_2} = 100$ кПа ($C_{пов} = 3{,}15$ моль/м³ и температуре 295 К) привели к кинетической диаграмме трещиностойкости $V=V(K_I)$, показанной на рисунке 7.14, *б*. Расчетная кинетическая диаграмма трещиностойкости стали в среде водорода довольно близка к экспериментально полученным диаграммам для сталей близкого химического состава и физико-механических свойств (см. рис. 7.14, *б*).

Определение кинетической диаграммы трещиностойкости металла — возможный вариант практического применения изложенной теории как аппарата физически обоснованного прогнозирования поведения трещин в материалах, а затем и расчета на прочность и долговечность конструкций по стадии обусловленного водородом докритического роста трещин в соответствии с основным расчетным соотношением вида (7.16).

7.4. Коррозионное разрушение материалов под напряжением

Сущность разрушения при коррозии под напряжением состоит в локализации химического воздействия специфически усиливаемого приложением напряжения Различают три основных механизма влияния коррозионных сред на трещиностойкость конструкционных материалов: адсорбционное понижение прочности, локальное анодное растворение и водородное охрупчивание. Адсорбция поверхностно-активных веществ на поверхности высоконапряженного металла в кончике трещины приводит к понижению поверхностной энергии и тем самым облегчает разрушение материала (эффект Ребиндера). Адсорбционное воздействие среды существенно уменьшает показатель трещиностойкости K_{IC}. При длительном нагружении оно становится доминирующим при значениях коэффициента интенсивности напряжений, близких к K_{IC}, поскольку в связи с высокими скоростями докритического роста трещин нет условий для реализации остальных механизмов. При низких значениях коэффициента интенсивности напряжений преобладают анодное растворение, при котором металл уходит в раствор в виде положительных ионов, и «водородное охрупчивание», при котором на локальных катодах образуется водород и диффундирует в металл.

Образование пленки и анодное растворение [21]. При отсутствии напряжений металл либо покрывается химическими неактивными пленками, такими, как Al_2O_3 или Cr_2O_3, или, если ионы металла проникают в раствор с ювенильной поверхности, образовавшийся продукт (типичный гидроксид) повторно осаждается на поверхности, что приводит к прекращению дальнейшей реакции. В этом случае говорят, что поверхность «пассивирована». Устойчивость пленки зависит от содержания кислорода, водородного показателя pH раствора, электрохимического потенциала электрода и температуры. Пассивная пленка может терять сплошность при механическом истирании и появлении полос скольжения.

Если на поверхности металла в какой-то момент обнажается площадь S_0, она сразу не репассивирует, поскольку необходимо время для того, чтобы металл вступил во взаимодействие с молекулами воды или анионами раствора, чтобы его концентрация превысила концентрацию растворимости и произошло осаждение в виде нерастворимой пленки. В течение этого времени, в связи с растворением металла, поток электронов проходит через металл к катоду. Изменение силы «коррозионного тока» i подчиняется экспоненциальному закону. В любой момент времени t сила тока i_t определяется выражением

$$i_t = i_{max} \exp(-\beta t), \qquad (7.32)$$

где i_{max} — ток, соответствующий обнаженной поверхности в начальный момент времени; β — постоянная. Если допустить, что процесс пассивации происходит путем осаждения небольших пятен из полностью неактивных (пассивных) пленок, то величину β можно определить как удельное по-

крытие за секунду. Скорость уменьшения чистой площади S представляется в виде

$$dS/dt = -\beta S. \qquad (7.33)$$

Отсюда, при начальных условиях $S = S_0$ и $t = 0$, получаем

$$S = S_0 \exp(-\beta t). \qquad (7.34)$$

Площадь под нестационарной кривой (7.32) определяет суммарные потери заряда с площади S_0, с одной стороны, в виде потока электронов, а с другой — в виде ионов металла, переходящих в раствор. Из уравнения (7.32) заряд Q_t в момент t определяется выражением

$$Q_t = \int_0 i_t dt = (1/\beta)(i_{max} - i_t), \qquad (7.35)$$

а общий вид

$$Q_{об} = i_{max}/\beta. \qquad (7.36)$$

Эта конкретная модель не единственная; экспериментально были обнаружены и другие формы затухания тока. Толщина пленки, образующейся по диффузионному механизму, может быть представлена в виде $x \sim (D_0 t)^{1/2}$, где D_0 — соответствующий коэффициент диффузии. Затухание тока по зависимости $t^{1/2}$ подтверждено экспериментально. Выражение для этого затухания следующее:

$$i_t = i_{max} \exp(-\beta t^n), \qquad (7.37)$$

где показатель степени n сначала равняется 1, а затем уменьшается до 0,5.

Максимальная скорость растворения со стороны ювенильной поверхности может быть определена по закону Фарадея

$$v_{max} = M i_a / z \rho j, \qquad (7.38)$$

где M — атомная масса металла; ρ — плотность металла; z — валентность металла в ионизированном состоянии; j — число Фарадея; i_a — плотность анодного тока для ювенильной поверхности, определяемая как i_{max}/S_0.

Зависимость между скоростью роста трещины и плотностью тока на ювенильной поверхности линейна.

Подобным образом можно в среднем оценить рост границы раздела:

$$x = M i_a / z \beta \rho j. \qquad (7.39)$$

Значение i_a часто простая функция анодного потенциала ω, приложенного к металлу. Для однородного сплава алюминия, содержащего 7 % Mg, в хлоридном и сульфатном растворах при потенциалах от — 1,3 до — 1,9 В (по отношению к стандартному каломельному электроду) зависимость между ω и $\log i_a$ — линейная (т. н. зависимость Тафеля) с наклоном кривой $(\partial\omega/\partial(\log i_a))$ pH $= 0,12$ мВ/А. В этой области преобладает анодное растворение оголенной поверхности и зависимости плотности анодного тока i_a от pH, концентрации хлоридных или сульфатных анионов не существует. Стадия, определяющая скорость растворения ювенильной поверхности, которая наблюдается при высоких анодных потенциалах, когда

подавляется любая обратная реакция для этого сплава, может быть представлена в виде

$$Al + H_2O \rightarrow AlOH^{2+} + H^+ + 2e^-. \qquad (7.40)$$

Затем следует серия реакций, которые приводят к образованию катиона Al^{3+} как конечного продукта:

$$AlOH^{2+} + 5H_2O + H^+ \rightleftarrows Al^{3+} + 6H_2O + 2e^-. \qquad (7.41)$$

Подобные реакции могут привести к образованию в сталях гидратных аквоионов Fe^{2+} и Fe^{3+}, однако предполагается, что в нержавеющей стали в сульфатных растворах аквоион вступает в комплекс с некоторым числом сульфатных ионов (a), образуя $(Ma)^{n+}aq$. Это соответствует наблюдаемому росту скорости растворения металла после оголения поверхности, что связано со временем запаздывания, необходимым для диффузии анионов сульфата к поверхности металла.

Анодное растворение и коррозия под напряжением гладких образцов Обычно используют два вида нагружения: либо приложение постоянного напряжения, которое равно части предела текучести $\sigma_т$, либо деформирование за предел упругости. Последний вид может считаться первой четвертью цикла усталостного нагружения и будет рассмотрен первым. В результате пластического деформирования защитная пленка, которая покрывает образец и защищает его от общей коррозии, разрушется (когда полоса скольжения выходит на поверхность металлической подложки). Это разрушение обнажает поверхность, которая подвергается анодному воздействию. При соответствующих потенциале, pH и химическом составе раствора обнаженная поверхность начинает репассивировать, но в критическом диапазоне приложенных скоростей деформации скорость возобновления ювенильной поверхности такова, что развивается одна глубокая трещина. При очень низких скоростях деформации с каждым приращением последней происходит полная репассивация, а при чрезмерно высоких скоростях времени для существенного анодного растворения недостаточно.

В некоторых случаях процесс рассматривается как полупрерывный, в котором частично пассивированная пленка разрушается через время t из-за появления полосы скольжения. По аналогии с уравнением (7.38) скорость на границе раздела определяется выражением

$$v = MQ_t/2\rho t S_0, \qquad (7.42)$$

где Q_t/S_0 — плотность заряда, образующегося за время t. Эта физическая модель, однако, не полностью сопоставима с экспоненциальным законом кинетики пассивации, принятым при выводе уравнения (7.35). Подразумевается, что всегда существует какая-то часть оголенной поверхности пока не произойдет полная пассивация, так что «разрыв» как таковой совсем не обязателен. На практике «разрыв» связан с более длительным временем перехода, когда затухание уже не экспоненциально В этом случае уравнение (7.42) применять не следует.

Если допустить, что новая площадь образуется при деформировании со скоростью $\dot{\varepsilon} = \mathrm{const}$, когда $dS = L^*dt$, где L^* пропорционально $\dot{\varepsilon}$ и имеет размерность L^2T^{-1}, уравнение (7.33) принимает вид

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S + L^* \qquad (7.43)$$

и имеет общее решение

$$S - L^*/\beta = \text{const} \exp(-\beta t). \quad (7.44)$$

Если же рассматривать мгновенное образование ювенильной поверхности, имеющей площадь S_0 при $t = 0$, т. е. если большая свободная от пленки ступень скольжения появляется при пределе текучести, то уравнение (7.44) превращается в выражение

$$S - L^*/\beta = (S_0 - L^*/\beta) \exp(-\beta t), \quad (7.45)$$

которое при $L^* = 0$ сводится к уравнению (7.34). Если ток i_t в любой момент времени пропорционален площади S и $i_{max} \sim S_0$, то, следовательно, соответствующие значения i_t и i_{max} определяются выражением L^*/β, которое соответствует равновесию скоростей восстановления и пассивации ювенильной поверхности. Скорости изменения плотности заряда и образования границы раздела (7.38) должны быть подвергнуты сравнимой модификации. Если $S = 0$ при $t = 0$, то

$$S = (L^*/\beta)[-\exp(-\beta t) + 1]. \quad (7.46)$$

Если испытываемый гладкий образец подвергается постоянному нагружению, как при обычных испытаниях на коррозию под напряжением, необходимо на поверхности сделать пит и развить его в щель или трещину, скорость роста которой и, следовательно, скорость образования ювенильной поверхности можно поддерживать постоянными или увеличивать при воздействии постоянного напряжения. Коррозия под напряжением происходит в областях потенциала около активно-пассивного перехода или вблизи областей питтингообразования [1], и очень важно поддерживать кислотность среды для облегчения непрерывного растворения.

Коррозионный пит служит, очевидно, концентратором напряжений и приводит к возникновению коррозионной трещины. Чаще всего длительность роста трещины зависит от различных химических и физико-химических факторов. Одним из них может быть трудность сохранения в щели такой же химической среды, как и в объеме раствора. Если продукты коррозии не могут быстро диффундировать из щели, концентрация ионов водорода будет увеличиваться и это вызовет ускорение реакции, поскольку оксидные пленки становятся менее стабильными. Таким образом, процесс ускорится.

Другим важным фактором, влияющим на длительность роста трещины, является совокупность электрохимических и механических свойств дисперсионно-твердеющих сплавов, связанных с зернограничными выделениями и зонами без выделений. При таком выделении возможна, во-первых, концентрация скопления в сравнительно слабой зоне без выделений (твердый раствор), хотя этому противодействует ограничение со стороны твердых зерен. Во-вторых, выдержка любой зернограничной области в растворе приводит к образованию локальных электрохимических пар между зернограничными выделениями и зоной без выделений или между зоной без выделений и ее окружением.

Заключительный этап проявления механизма анодного растворения имеет отношение к природе полос скольжения в матрице. Если скольжение ограничивается несколькими действующими плоскостями, ступени его будут большими и образуется несколько глубоких трещин. Если скольжение происходит диффузионно, образуется много малых ступеней и воздействие не так локализовано Этот эффект используется для термообработки алюминиевых сплавов, когда применяется незначительное перестраивание с целью повышения сопротивления коррозии под напряжением.

Катодные процессы. Процесс анодного растворения представляет собой реакцию на аноде электрохимической ячейки

$$M \rightleftarrows M^{n+}(aq) + ne. \qquad (7.47)$$

Аквоины металла переходят в раствор и электроны адсорбируются электродом. Если существует подходящий электрод, электроны проходят через металл как ток и поглощаются катодной реакцией. Часто анод и катод являются различными областями одного и того же куска металла.

При нормальной коррозии железа и стали в водных средах, содержащих кислород или подвергающихся его воздействию, основная катодная реакция может быть записана в виде

$$O_2 + 2H_2O + 4e \rightleftarrows 4OH^-. \qquad (7.48)$$

В обескислороженной воде эта реакция не проходит, и можно представить другую последовательность катодной реакции, пренебрегая потерей молекулы воды из гидратного иона гидроксония, т. е.

$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-, \qquad (7.49)$$

$$H^+ + e \rightleftarrows H \text{ (атомарный)}, \qquad (7.50)$$

$$2H \rightleftarrows H_2 \text{ (молекулярный)}, \qquad (7.51)$$

$$H_2 + H_2 + \ldots + H_2 = nH_2 \text{ (выделяющийся газ)}. \qquad (7.52)$$

Каждое из этих уравнений представляет возможные стадии, определяющие скорость процесса выделения пузырьков водорода из воды, и поэтому может контролировать, во-первых, расход электронов (7.50) и отсюда ток коррозии; во-вторых, как следствие этого — анодное растворение, для чего концентрацию электронов из уравнения (7.47) модифицируют согласно принципу Ле Шателье. Измерение потенциала катода по отношению к стандартному каломельному электроду показало, что контролирующая стадия выделения водорода — его перенапряжение. Важное значение имеют структура поверхности и шероховатость, так как перенапряжение значительно изменяется в зависимости от чистоты обработки поверхности, а также уровень Ферми электронов и, следовательно, общая электронная структура материала катода.

После образования водород может диффундировать в объем катода и рекомбинировать в виде газовых пузырьков H_2 на внутренних поверхностях раздела между матрицей и включениями или карбидами. Обычно образование микротрещин или «пузырьков» в результате высокого локального давления водорода происходит в сталях, насыщенных водородом электролитически или из газовой фазы при высоком давлении. В обоих случаях присутствие серы облегчает захват водорода, поэтому при эксплуатации сталей в средах, содержащих водород, следует, по-видимому, учитывать количество и распределение сульфидных включений в сплавах.

С точки зрения коррозии под напряжением значительное внимание должно быть уделено катодному выделению и растворению водорода, которые лежат в основе водородного механизма развития трещины в отличие от механизма анодного растворения. Реакция кислорода на катоде обычно не учитывается, хотя и реализуется. Тем не менее она может иметь существенное значение там, где содержание кислорода значительно (ватерлинии, зоны разбрызгивания).

Разграничить физически механизмы анодного растворения и водородный, как правило, трудно, поскольку, например, на обнаженной границе зерен в алюминиевом сплаве анодное зернограничное выделение может

происходить на расстоянии менее чем 50 нм от катода в более «благородном» участке зоны, свободной от выделений

Водородное охрупчивание. При электрохимической коррозии под напряжением возникает вопрос, является ли уровень давления водорода P_{H_2}, создаваемый в соответствующих местах, достаточным для того, чтобы существенно повлиять на процесс разрушения. При потенциале открытой цепи максимальная концентрация атомов водорода $[H]_{пов}$, которая образуется на границе раздела раствор — катод, дается первоначально условием равновесия из уравнения (7.50) (уравнения (7.51) и (7.52) тоже могут быть использованы), хотя выделение водорода и величина $[H]_{пов}$ могут быть получены в соответствии с законом Сивертса. Это ограничивает химический потенциал водорода в твердом растворе, который контролирует давление, достигаемое в любой внутренней полости, так как равновесие не может быть превышено на поверхности раздела. Типичное значение напряжения разрушения $\sigma = \sigma_в$ может быть принято приблизительно 1ГНм$^{-2}$. Из уравнения

$$P_{H_2} + \sigma = [E\gamma_p/(1 - \mu^2)\,a]^{1/2} \qquad (7.53)$$

следует, что необходимо внутреннее давление 10 МН/м^2 (100 атм) для того, чтобы изменить критическое значение σ_p хотя бы на 1 % . Наиболее вероятно, что водород влияет на когезию и снижает уровень эффективной работы разрушения γ_p, накопляясь впереди микротрещин, поскольку в этой области решетка расширяется. Снижение эффективной работы разрушения γ_p соответствует эффектам, полученным при одноосном растяжении и статической усталости.

В α-титановых сплавах быстрое транскристаллитное разрушение при коррозии под напряжением в водных и метаноловых растворах обусловлено механизмом водородного охрупчивания при малых скоростях деформации, когда на плоскостях скольжения зарождаются гидриды. Это приводит к снижению пластичности зерен и способствует их скалыванию.

Коррозионное растрескивание. Коррозионным растрескиванием под напряжением называется процесс распространения трещины в материале при одновременном воздействии коррозии и статического механического растягивающего напряжения. На первых этапах развития механики коррозионного разрушения длительную статическую трещиностойкость оценивали по зависимостям долговечности образцов с искусственными трещинами от значений коэффициента интенсивности напряжений в начальный момент испытания (K_0 или K_{I0}). При понижении этого коэффициента время до разрушения образцов увеличивается. На основании такой диаграммы определяется значение K_{ISCC}, ниже которого докритический рост трещин отсутствует. Величина K_{ISCC} — важный параметр системы материал — среда, позволяющий рассчитать допускаемые напряжения в конструкции, содержащей трещиновидные дефекты определенных размеров и подвергаемой совместному воздействию длительных статических нагрузок и коррозионных сред. Это величина — структурно чувствительный параметр, низкие его значения характерны для высокопрочных низкопластических материалов (для которых K_{ISCC} может быть в несколько раз меньше значения K_{IC}). Со снижением прочности и повышением пластичности K_{ISCC} повышается (рис. 7.15) и достигает значения K_{IC}, что свидетельствует о нечувствительности материала к воздействию коррозионной среды.

Долговечность образцов состоит из инкубационного периода и периода докритического роста трещин. Инкубационный период — это время от момента приложения к образцу нагрузки до начала докритического роста трещины, когда скорость превышает 4·10^{-10} мм/с. Этот период зависит от

начального коэффициента интенсивности напряжений и увеличивается с его понижением. Природа его различна. Это может быть время, необходимое для растворения коррозионной средой оксидной пленки в вершине трещины или для проникновения водорода в металл и диффузии его в зону предразрушений.

Важной характеристикой длительной коррозионно-статической трещиностойкости является кинетическая диаграмма разрушения — зависимость скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений. Оценка коррозионной трещиностойкости в значительной степени осложнена спецификой роста коррозионных трещин, которая проявляется в их ветвлении и затуплении, а также в различии электрохимических параметров среды в вершине трещины и на поверхности образцов. Для коррозионных трещин в связи с избирательным характером их роста характерно ветвление, рассматриваемое как универсальный эффект закритического роста трещин для большинства конструкционных материалов. Различают микро- и макроветвления коррозионных трещин. Первое — следствие межзеренного роста трещин. Как правило, из-за одновременного охрупчивания объема материала, содержащего несколько границ зерен, магистральная трещина на стыке трех зерен разделяется на две: одна становится магистральной, другая или становится тупиковой, или смыкается с магистральной. Характер и интенсивность ветвления зависят от структуры материала, типа среды, температуры испытаний, нагрузки и вида напряженного состояния [22—25]. Ветвление трещин приводит к уменьшению напряжений в их вершине. Его следует учитывать при оценке коэффициентов интенсивности напряжений теоретически [26] или экспериментально [22]. К релаксации напряжений приводит также затупление коррозионных трещин вследствие локального анодного растворения металла в их вершине.

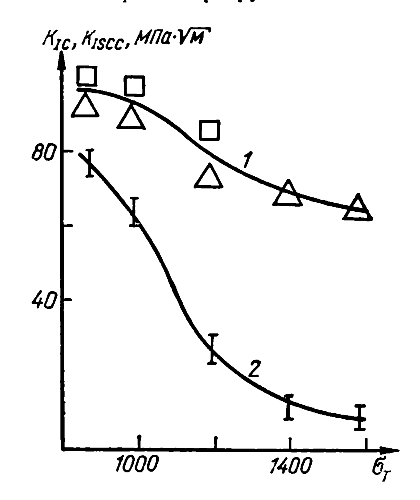


Рис. 7.15. Зависимость K_{IC} (*1*) и K_{ISCC} (2) от предела текучести стали 43—40 при испытаниях в морской воде (на рисунке показаны экспериментальные точки).

Важной особенностью роста коррозионных трещин является то, что состав (в частности, водородный показатель среды pH) и электродный потенциал системы металл — среда в трещине значительно отличаются от таковых на гладкой поверхности. Есть несколько методик оценки электрохимического состояния в вершине трещины [11]. Результаты последних исследований указывают на его зависимость от уровня коэффициента интенсивности напряжений, длины трещины, внешней поляризации [11, 27].

Особое место в механике коррозионного разрушения занимает вопрос об условиях инвариантности параметров коррозионной трещиностойкости. Ранее считалось, что известный критерий геометрической инвариантности трещиностойкости по толщине образца h и длине трещины l

$$h,\ l \geqslant A\,(K_{IC}/\sigma_{0,2})^2 \quad (1 \leqslant A \leqslant 6) \qquad (7.54)$$

пригоден в качестве условия, обеспечивающего получение параметров коррозионной трещиностойкости, не зависящих от размеров образцов и длины трещины, т. е. характеристик системы металл — среда. Однако интенсивность ветвления и затупления трещин, а также состав среды сложным образом изменяются в образцах различной геометрии Характер этого изменения зависит от структуры сплава и механизма воздействия среды. Например, для высокопрочных низкоотпущенных сталей с мартенситной структурой, испытанных в дистиллированной воде, условие инвариантности параметра K_{ISCC} принимает следующий вид:

$$h \geqslant 500\,(K_{ISCC}/\sigma_{0,2})^2. \tag{7.55}$$

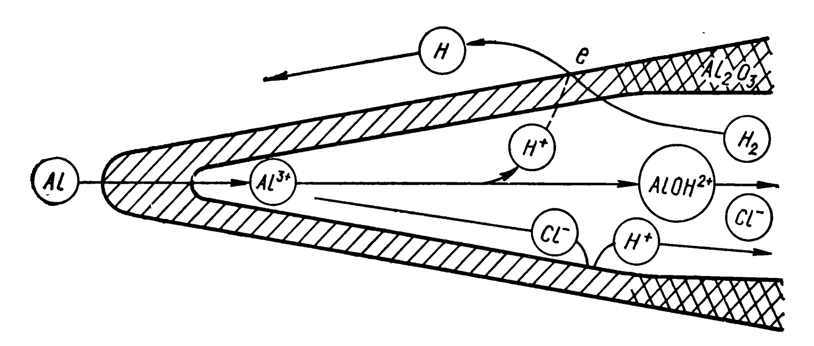


Рис. 7.16. Распространение трещины путем локального «анодного» водородного охрупчивания.

Сравнение уравнений (7.54) и (7.55) свидетельствует о гораздо более жестком условии инвариантности параметра коррозионной трещиностойкости по сравнению с таковым для K_{Ic}.

В некоторых случаях склонностью к коррозионному росту трещин обладают и сравнительно низкопрочные конструкционные материалы, для которых рекомендуется оценивать трещиностойкость с позиций нелинейной механики разрушения. В настоящее время в качестве такого подхода для изучения коррозионного растрескивания корпусных сталей применяется метод J-интеграла (см. п. 3.2).

Использование метода заключается в построении кривых длительной трещиностойкости в координатах «начальный уровень J_{I0} — время до разрушения». По аналогии с K_{ISCC} на основании такой зависимости определяется пороговое значение J-интеграла J_{ISCC}, под которым подразумевается максимальный уровень J_{I0} при отсутствии докритического роста трещины.

В рамках общей теории, которую можно рассматривать лишь как грубо приближенную, вырисовывается в целом особый раздел коррозионного растрескивания под напряжением, охватывающий сплавы, которые вследствие своего состава и соответствующей термообработки, а также катодной обработки становятся сильно упрочненными и чувствительными к надрезу. Эти сплавы могут подвергаться локальному охрупчиванию. На рис. 7.16 [28] схематически показана модель трещины, соответствующая данному типу коррозионного растрескивания под напряжением для случая непрерывного распространения трещины в сплаве AlZnMg3 в хлоридном растворе. В данном случае предполагается, что у вершины трещины находится

солевой покровный слой хлорида алюминия, через который происходит растворение алюминия до Al^{3+}. После этого в результате гидролиза получаются ионы $AlOH^{2+} + H^{+}$ и вблизи вершины трещины начинается локальное выделение водорода с образованием в качестве промежуточного продукта адсорбированного водорода. Часть этого водорода рекомбинирует до H_2 и удаляется в виде пузырьков; другая часть атомарного водорода абсорбируется, вызывая охрупчивание металла Распространение трещины рассматривается как результат локального охрупчивания. Сопровож-

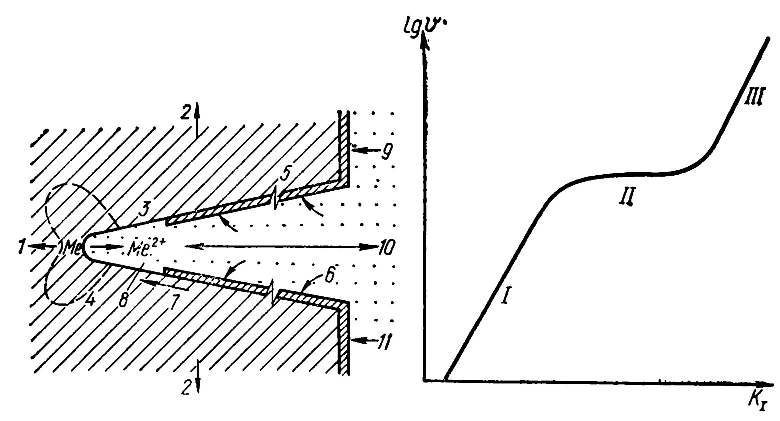


Рис. 7.17. Электрохимическая модель коррозионного растрескивания под напряжением пассивного сплава в результате анодного растворения металла из зоны пластической деформации перед вершиной трещины:

1 — направление распространения трещины; *2* — растягивающее напряжение; *3* — активная вершина трещины; *4* — пластическая зона; *5* — пассивная зона; *6* — диффузия, конвекция, миграция; *7* — репассивация; *8* — электролит в трещине; *9* — пассивирующий оксид; *10* — электролит; *11* — сопряженная катодная реакция.

Рис. 7.18. Схема зависимости скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений.

дающее его анодное растворение алюминия обеспечивает стабильное снижение pH вследствие продолжающегося гидролиза ионов Al^{3+} в электролите внутри трещины.

Модель распространения трещины только за счет анодного растворения металла в ее вершине с некоторыми дополнительными подробностями при практически отсутствующем локальном поглощении водорода приведена на рис. 7.17. Как и для модели, изображенной на рис. 7.16, предполагается, что боковые поверхности трещины защищены от равномерной коррозии покровным слоем, в данном случае слоем пассивирующего оксида. Допущение о наличии пассивирующего слоя (пленки) на поверхностях образца и боковых поверхностях трещины присуще всем моделям коррозионного растрескивания под напряжением и является почти тривиальным. Из схемы на рис. 7.17 следует, что анодный ток растворения металла у вершины трещины компенсируется катодным на пассивирующем оксиде и что сопряженная катодная реакция частично протекает также вне трещины на поверхности образца. Согласно этому данная система представляет собой короткозамкнутый гальванический элемент с относительно большой поверхностью. Возможное дополнительное локальное выделение водорода у основания трещины при этом не учитывается.

Особенности кинетических диаграмм разрушения. Типичная кинетическая диаграмма коррозионного растрескивания в координатах $\lg v$ — K_I представлена на рис. 7.18. На участках I и III скорость роста трещины увеличивается с повышением K_I, а на участке II наблюдается стабилизация скорости. Наличие четко выраженных участков объясняют влиянием в пределах каждого доминирующего воздействия среды. Второй горизонтальный участок часто связывают с релаксацией напряжений в вершине трещины вследствие ее интенсивного ветвления. Характер кривой $v\ (K_I)$ во многом зависит от структуры сплава и типа среды. На кинетических диаграммах высокопрочных сталей с мартенситной структурой с пределом текучести 1500 Н/мм^2 и выше участок II отсутствует. Повышение пластичности стали приводит к снижению скорости роста трещины и появлению горизонтального плато, при этом отдельные участки могут исчезать.

К числу характерных особенностей роста трещины при коррозионном растрескивании относится неоднозначность зависимости $v\ (K_I)$ для ряда систем металл — среда, связанная с начальными условиями нагружения [23]. Так, для системы «сталь 50Х — изобутиловый спирт» расположение кинетической диаграммы определяется значением коэффициента интенсивности напряжений K_0 (при котором начинается докритический рост трещины). При этом с повышением значения K_0 выход на стабилизированный участок достигается при более высоких скоростях. Как показали фрактографические исследования, такая неоднозначность кинетических диаграмм во многом объясняется ветвлением трещин, интенсивность которого зависит от начальных условий нагружения.

Коррозионная усталость. Испытание образцов с наведенной трещиной во время усталостного нагружения следует рассматривать как испытание на коррозию под напряжением, контролируемую скоростью деформации. В сухом воздухе увеличение длины трещины за цикл будет в первую очередь функцией меняющейся интенсивности напряжений [29] $\Delta K = K_{I\,max} - K_{I\,min}$. Первоначальная функциональная зависимость была дана так называемым законом Пэриса (см. 4.2), который имеет вид

$$da/dN = A\,(\Delta K)^m \quad \text{или} \quad da/dN = 10^{-7}\,(K_{I\,max}/K^*)^n, \qquad (7.56)$$

где A и m, K^* и n—константы. Дальнейшее подробное исследование показало не только увеличение скорости по мере того, как величина $K_{I\,max}$ приближается к K_{IC}, но и наличие порога ΔK_{th}, ниже которого не происходит роста трещины. На значение ΔK_{th} влияют среднее напряжение в цикле (выраженное через коэффициент асимметрии цикла $R_a = K_{I\,min}/K_{I\,max}$) и окружающая среда [11, 29]. Существует два вида воздействия агрессивной окружающей среды на рост усталостной трещины. Первый наблюдается при пороговых значениях ΔK_{th} и околопороговом росте, когда средой являются пары воды, второй — при усиленном росте трещины при более высоких интенсивностях напряжений в присутствии среды, которая может содержать обычные коррозионные составляющие, такие, как хлоридные ионы, или может быть (казалось бы) безвредной — например, обескислороженная дистиллированная вода. Термин «подлинная» коррозионная усталость был введен для ситуаций, когда происходит интенсификация роста трещины, хотя $K_{I\,max}$ всегда ниже K_{ISCC}. Из экспериментов следует, что величина K_{ISCC} связана только с одним определенным видом нагружения (четверть цикла), поэтому не обязательно имеет какое-либо общее значение как свойство материала.

Относительно ΔK_{th} предполагается, что эта величина контролируется механизмом водородного охрупчивания, в котором водород поглощается из водяных паров атмосферы. В высокопрочных сталях значения

$K_{I\,max}$ и ΔK_{th} будут достаточно близкими к K_{ISCC}, значение которого связано, в свою очередь, с механизмом водородного охрупчивания

Рост усталостной трещины в активной среде следует рассматривать как комбинацию процессов, в которых коррозионное воздействие сильно зависит от специфики механического нагружения.

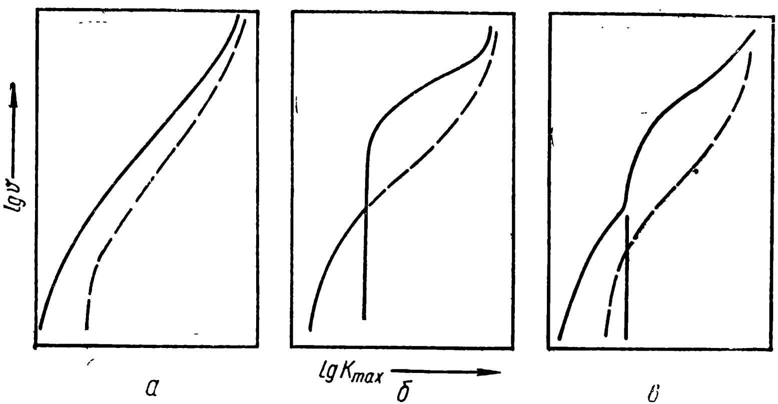


Рис. 7.19. Основные типы диаграмм коррозионно-усталостного разрушения (штриховыми линиями обозначены диаграммы, полученные при испытаниях в инертной среде):

а—ниже K_{ISCC}; *б*—выше K_{ISCC}; *в*—комбинированное поведение.

Основные типы диаграмм коррозионно-усталостного разрушения представлены на рис. 7.19. Из рисунка видно, что коррозионные среды могут существенно менять конфигурацию диаграмм, характерную для материала при его испытаниях в инертной среде. Для сплавов, не склонных к коррозионному растрескиванию, кинетическая диаграмма имеет S-образный вид (рис. 7.19, *а*), а понижение частоты нагружения сдвигает ее в сторону более высоких скоростей роста. На диаграммах сплавов, чувствительных к воздействию длительных статических нагрузок и коррозионных сред, при $K_{Imax} = K_{ISCC}$ наблюдается резкое ускорение роста трещины с последующим выходом на пологий или даже горизонтальный участок, в зависимости от того, какой вид диаграммы характерен для статического растрескивания данной системы. Если принять за основу модель, согласно которой интенсификация усталостного роста трещины при воздействии коррозионной среды является лишь отражением склонности сплавов к коррозионному растрескиванию, то кинетическая диаграмма должна выглядеть, как показано на рис. 7.19, *б*. В самом общем случае, когда влияние среды проявляется и ниже уровня K_{ISCC}, диаграммы приобретают вид, изображенный на рис. 7.19, *в*.

Представленные диаграммы не отражают полностью всех кинетических особенностей при коррозионно-усталостном растрескивании. В некоторых случаях скорость роста трещин в коррозионной среде даже понижается по сравнению с таковой в инертной среде. Это может произойти за счет затупления коррозионной трещины вследствие проявления механизма анодного растворения металла, или так называемого закрытия усталостной трещины, вызванного клиновыми эффектами продуктов коррозии в вершине трещины и приводящего к уменьшению эффективного амплитудного коэффициента интенсивности напряжений, или изменением физико-химических условий в вершине трещины [11].

ГЛАВА 8

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В процессе эксплуатации инженерные конструкции подвергаются не только воздействию силовых нагрузок, но и зачастую неравномерному нагреву их частей, при котором изменяются физико-механические свойства материалов, а также возникают градиенты температуры, приводящие к неодинаковым тепловым расширениям материала. Изменение физико-механических свойств материалов в результате температурного воздействия нарушает их способность к пластическому деформированию. С понижением температуры эта способность для большинства металлов и сплавов уменьшается. При критических температурах резко возрастает сопротивление сдвигу; металл переходит в хрупкое состояние и разрушается без заметных признаков пластической деформации. Свойство металлов хрупко разрушаться с понижением температуры называется хладноломкостью. Проблема хладноломкости — одна из актуальных в механике разрушения.

К настоящему времени накоплен большой фактический материал о зависимости механических свойств различных сталей, цветных металлов и сплавов от температуры испытания. Многочисленные исследования изменений характеристик трещиностойкости материалов от температуры являются основой для построения температурных зависимостей этих характеристик, необходимых для выбора материала и расчета элементов конструкций на хрупкую прочность в условиях низких температур. Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле. Оно вызывает тепловые напряжения, которые сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут способствовать появлению трещин и разрушению конструкций из материала с повышенной хрупкостью. Поэтому знание зависимости трещиностойкости материала от температуры, величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для полного анализа прочности конструкций.

В настоящей главе предлагаются методы исследования влияния переменных по геометрии температурных полей на распространение трещин в твердых телах. Здесь учитывается как возникновение температурных напряжений, так и изменение физико-механических свойств тела в результате теплового воздействия. Составными компонентами этих подходов служат критериальные уравнения для нахождения предельного равновесия твердых тел с трещинами, подвергнутых воздействию силовых и температурных факторов, а также способ для определения температурных и термоупругих полей в таких телах, который является обобщением изложенных в гл. 5 методов для решения температурных задач теории трещин.

8.1. Установление критериальных уравнений

Исследуем предельно-равновесное состояние неограниченного тела, подвергнутого воздействию внешних взаимно перпендикулярных и равномерно распределенных усилий p, q, g и ослабленного плоской трещиной

с гладким контуром L (рис. 8.1). Введем прямоугольную систему декартовых координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с плоскостью трещины. Будем также считать, что такое тело находится в переменном по геометрии температурном поле, которое характеризуется функцией распределения температуры $T = T(x, y, z)$. Задача состоит в определении предельных значений внешних усилий $p = p_*$, $q = q_*$, $g = g_*$, места и направления начального распространения трещины.

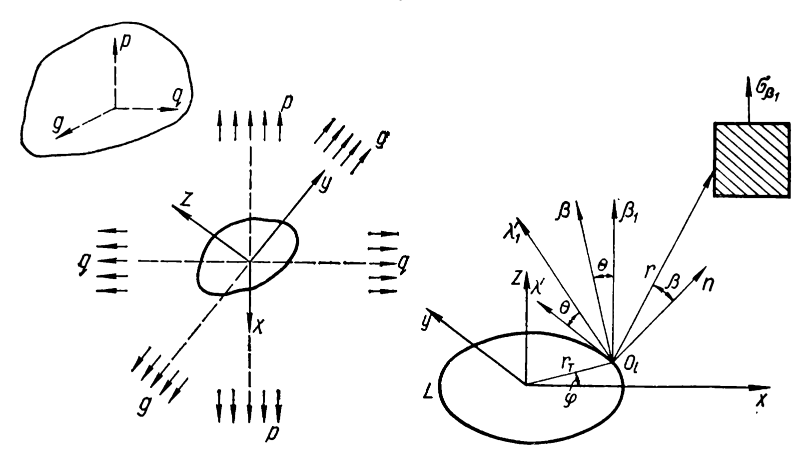


Рис. 8.1. Схема нагружения тела с трещиной усилиями p, q, g.

Рис. 8.2. Расположение систем координат в окрестности трещины.

Решаем задачу на основании сформулированной в [3, 5] расчетной модели, т. е. будем полагать, что распространение трещины происходит по площадкам максимальных растягивающих напряжений σ_θ в момент наступления равенства в условии

$$K_{\theta\beta}(p, q, g, \varphi, \theta, \beta, T) \leqslant K_{IC}(T) \tag{8.1}$$

или

$$K_{\theta\beta}(p, q, g, \varphi, \theta, \beta, T)\, K_{IC}^{-1}(T) \leqslant 1. \tag{8.2}$$

Здесь O_i, r, β, λ_0 — цилиндрическая система координат, ось $O_i\lambda$ которой направлена по касательной к контуру трещины, а плоскость $\beta = 0$ — продолжение трещины; φ — координатный угол, который определяет точки на контуре трещины (рис. 8.2); θ и β — углы, определяющие ориентацию площадки σ_θ (рис. 8.2);

$$K_{\theta\beta}(p, q, g, \varphi, \theta, \beta, T) = \frac{1}{4}\Big[K_I(p, q, g, \varphi, T)\Big(3\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{3\beta}{2}\Big) - 3K_{II}(p, q, g, \varphi, T)\Big(\sin\frac{\beta}{2} + 3\sin\frac{3\beta}{2}\Big)\Big]\cos^2\theta + K_{III}(p, q, g, \varphi, T)\cos\frac{\beta}{2}\sin 2\theta. \tag{8.3}$$

Следовательно, место и направление начального распространения трещины будут определяться такими значениями углов φ_*, θ_*, β_*, для которых функ-

ционал в левой части неравенства (8.2) достигает максимума, т. е. которые определяются из уравнений

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{K_{\theta\beta}(p_*, q_*, g_*, \varphi, \theta_*, \beta_*, T)}{K_{IC}(T)} \right\rangle_{\varphi=\varphi_*} = 0; \quad (8.4)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{K_{\theta\beta}(p_*, q_*, g_*, \varphi_*, \theta, \beta_*, T)}{K_{IC}(T)} \right\rangle_{\theta=\theta_*} = 0;$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{K_{\theta\beta}(p_*, q_*, g_*, \varphi_*, \theta_*, \beta, T)}{K_{IC}(T)} \right\rangle_{\beta=\beta_*} = 0.$$

В соотношениях (8.2) и (8.4) характеристика K_{IC} зависит от температуры T, а также и от углов φ, θ, β.

Таким образом, на основании установленных критериальных уравнений (8.2) и (8.4) решение задачи сводится к определению распределения температуры в теле $T(x, y, z)$, коэффициентов интенсивности напряжений $K_I((p, q, g, \varphi, T)$, $K_{II}(p, q, g, \varphi, T)$, $K_{III}(p, q, g, \varphi, T)$, а также характеристики K_{IC} как функций от температуры T

Как показывают результаты исследований, в практическом диапазоне изменения температуры величина K_{IC} хорошо аппроксимируется полиномом третьей степени от температуры

$$K_{IC} = A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + A_3 T^3. \quad (8.5)$$

Для некоторых типов стали коэффициенты A_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ представлены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. **Значение коэффициентов A_i для некоторых типов стали**

Тип стали	A_0, МПа·м$^{1/2}$	A_1, МПа× ×м$^{1/2}$·К$^{-1}$	A_2, МПа× ×м$^{1/2}$·К$^{-2}$	A_3, МПа× ×м$^{1/2}$·К$^{-3}$	Диапазон изменения температуры, К
A533B (класс 1)	13050,0170	121,8832	0,3830	0,0004	123—283
NiMoV	4249,3554	34,9814	0,0981	0,0001	73—273
NiCrMoV	3299,5343	24,8825	0,0666	0,0001	73—293
CrMoV	357,0193	2,0024	0,0032	0,0000	73—373
A216C	5520,8780	53,6635	0,1565	0,0002	123—273

В последующих рубриках (8.2—8.8) и (8.9—8.12) настоящей главы осуществляется обобщение изложенных в гл. 5 методов на случай решения температурных задач теории трещин, т. е. излагаются методы, предложенные в работах [2, 3] и работе [1] соответственно, для определения в теле с трещинами температуры $T(x, y, z)$, а также коэффициентов интенсивности напряжений $K_I(p, q, g, \varphi, T)$, $K_{II}(p, q, g, \varphi, T)$, $K_{III}(p, q, g, \varphi, T)$.

8.2. Задачи теплопроводности для бесконечной плоскости с разрезами

Стационарное температурное поле $T(x, y)$ удовлетворяет в области S, занимаемой телом, уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \qquad (8.6)$$

Поскольку $T(x, y)$ — гармоническая функция, ее можно представить в виде вещественной части некоторой аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного

$$T(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad (z \in S). \qquad (8.7)$$

Рассмотрим бесконечную плоскость, имеющую N гладких криволинейных разрезов (трещин) L_k $(k = \overline{1, N})$. Будем считать, что на берегах разрезов выполняется одно из условий:

$$T^{\pm} = \theta(t_1) \pm \gamma(t_1) \; (t_1 \in L); \qquad (8.8)$$

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial n} = \tau(t_1) \pm \mu(t_1) \quad (t_1 \in L); \qquad (8.9)$$

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial n} - \frac{h(t_1)}{\lambda_т}(T^{+} - T^{-}) = \nu(t_1) \; (t_1 \in L). \qquad (8.10)$$

Здесь n — нормаль к левому берегу разреза; $h(t_1)$ — теплопроницаемость трещин; L — совокупность разрезов L_k $(k = \overline{1, N})$; индексы «+» и «—» указывают на предельные значения соответствующих величин слева и справа от контура L. Будем предполагать, что контуры L_k — простые, разомкнутые дуги Ляпунова с началами в точках a_k и концами — в точках b_k, а заданные на них функции непрерывны по Гельдеру (принадлежат классу H).

Решим вспомогательную задачу. Найдем комплексный потенциал $f(z)$, когда на L заданы скачки температуры и теплового потока

$$T^{+} - T^{-} = 2\gamma(t_1), \; \frac{\partial T^{+}}{\partial n} - \frac{\partial T^{-}}{\partial n} = 2\mu(t_1) \; (t_1 \in L). \qquad (8.11)$$

Сначала предположим, что $\mu(t_1) = 0$. Тогда из условий (8.11) получим для функции $f(z)$ задачу сопряжения

$$f^{+}(t_1) - f^{-}(t_1) = 2\gamma(t_1) \quad (t_1 \in L),$$

убывающее на бесконечности решение которой имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\gamma(t_1)\, dt_1}{t_1 - z}.$$

Положив затем $\gamma(t_1) = 0$, также придем к задаче сопряжения для функции $F(z) = f'(z)$. Запишем окончательное решение граничной задачи (8.11)

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{\gamma(t_1)\, dt_1}{(t_1 - z)^2} + \frac{i\mu(t_1)\, ds}{t_1 - z} \right] \qquad (8.12)$$

где s — дуговая абсцисса точки t_1. Если скачки температуры на концах

разрезов равны нулю, т. е. $\gamma(a_k) = \gamma(b_k) = 0$ $(k = \overline{1, N})$, то функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\dfrac{d\gamma(t_1)}{dt_1} dt_1 + i\mu(t_1)\, ds}{t_1 - z}. \tag{8.13}$$

Это решение верно также и для замкнутых контуров L_k.

Из соотношения (8.12) найдем функцию

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \left[\frac{\gamma(t_1)\, dt_1}{t_1 - z} - i\mu(t_1) \ln(t_1 - z)\, dt_1 \right] + C, \tag{8.14}$$

где C — действительная постоянная (мнимую часть постоянной интегрирования, не влияющую на распределения температуры, положим равной нулю).

Полученное представление (8.14) общего решения уравнения (8.6) содержит две произвольные действительные функции $\gamma(t_1)$ и $\mu(t_1)$ и может быть использовано при решении самых различных граничных задач. Воспользуемся им при решении задач (8.8)—(8.10).

Граничная задача (8.8), когда на берегах разрезов задана температура, может формулироваться в двух модификациях. Температура полностью определена на каждом из разрезов (задача A) или задана с точностью до произвольных постоянных (задача B). В задаче A дополнительно задается суммарное количество тепла Q, которое выходит из тела через контур L, в задаче B известно количество тепла Q_k, которое выходит через каждый разрез L_k $(k = \overline{1, N})$ в отдельности. Если тело ограничено, то при отсутствии в нем источников тепла следует положить $Q = 0$. В бесконечном теле, вообще говоря, можно считать $Q \neq 0$, т. е. в этом случае часть тепла поглощается бесконечно удаленной точкой, в которой находится сток тепла.

Продифференцировав условие (8.8) по s и подставив в полученное равенство потенциал (8.12), придем к сингулярному интегральному уравнению граничной задачи (8.8)

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'} \int\limits_L \frac{\mu(t_1)\, ds}{t_1 - t_1'} - i \frac{d}{ds'} \int\limits_L \frac{\gamma(t_1)\, dt_1}{t_1 - t_1'} \right] =$$

$$= \pi \frac{d\theta(t_1')}{dt_1'} \frac{dt_1'}{ds'} \quad (t_1' \in L), \tag{8.15}$$

где s' — дуговая абсцисса точки t_1'.

Неизвестный скачок теплового потока $\mu(t_1)$ должен удовлетворять дополнительным условиям. В случае задачи A имеем равенство

$$\int\limits_L \mu(t_1)\, ds = Q/2\lambda_т, \tag{8.16}$$

а также $N - 1$ условий

$$\operatorname{Re} \int\limits_{b_k}^{a_{k+1}} [F^+(t_1) - F^-(t_1)]\, dt_1 = 2[\theta(a_{k+1}) - \theta(b_k)] \quad (k = \overline{1, N-1}), \tag{8.17}$$

где $F(z)$ — определяется соотношением (8.12) и интегрирование проводится по любой дуге в области S, соединяющей точки b_k и a_{k+1}.

Для задачи B функция $\mu(t_1)$ удовлетворяет N условиям

$$\int_{L_k} \mu(t_1)\, ds = \frac{Q_k}{2\lambda_т} \quad (k = \overline{1, N}). \tag{8.18}$$

В случае одного разреза ($N = 1$) задачи A и B совпадают.

При выполнении N условий (8.16) и (8.17) (задача A) или (8.18) (задача B) сингулярное интегральное уравнение (8.15) имеет в классе функций, не ограниченных на концах контура L (класс H^*), единственное решение.

Удовлетворяя граничное условие (8.9) с помощью потенциала (8.13), получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\pi i}\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1 + i\mu(t_1)\, ds}{t_1 - t_1'}\right] = \tau(t_1') \quad (t_1' \in L). \tag{8.19}$$

При этом предполагается, что скачок температуры на концах контура L равен нулю. Тогда получится N условий

$$\int_{L_k} \gamma'(t_1)\, dt_1 = 0 \quad (k = \overline{1, N}), \tag{8.20}$$

при выполнении которых уравнение (8.19) имеет в классе функций $\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} \in H^*$ единственное решение. Условие (8.20) обеспечивает также однозначность температурного поля при обходе контуров L_k ($k = \overline{1, N}$).

Для теплопроницаемых трещин $\mu(t_1) = 0$. Из условия (8.10) придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$-\frac{2h(t_1')}{\lambda_т}\gamma(t_1') - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1}{t_1 - t_1'}\right] = \nu(t_1') \ (t_1' \in L), \tag{8.21}$$

решение которого при выполнении условий (8.20) единственно $\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} \in H^*$.

В случае коллинеарных трещин или трещин, размещенных вдоль дуги окружности, решения интегральных уравнений (8.15) и (8.19) находятся в квадратурах. Приведем такие решения для одной трещины. Пусть контур L представляет собой отрезок оси $x: -l \leqslant x \leqslant l$. Тогда уравнение (8.15) принимает вид

$$\int_{-l}^{l} \frac{\mu(t_1)\, dt_1}{t_1 - x} = \pi\theta'(x) \quad (-l \leqslant x \leqslant l).$$

Его решением при условии (8.16) будет функция

$$\mu(t_1) = -\frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left[\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t_1^2}\,\frac{d\theta(t_1)}{dt_1}dt_1}{t_1 - x} - \frac{Q}{2\lambda_т}\right]. \tag{8.22}$$

При заданных на берегах трещины тепловых потоках получаем уравнение

$$\int_{-l}^{l} \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} dt_1}{t_1 - x} = -\pi\tau(t_1) \quad (-l < x \leqslant l),$$

решение которого при условии (8.20) имеет вид

$$\frac{d\gamma(x)}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t_1^2}\,\tau(t_1)}{t_1 - x} dt_1. \quad (8.23)$$

Пусть L обозначает дугу окружности радиуса r от точки $a = re^{-i\upsilon}$ до точки $b = \bar{a} = re^{i\upsilon}$. Тогда уравнение (8.15) с учетом условия (8.16) преобразуется к виду

$$\int_L \frac{\mu(t_1)\,dt_1}{t_1 - t_1'} = \frac{\pi i}{r}\left[t_1' \frac{d\theta(t_1')}{dt_1'} + \frac{Q}{4\pi\lambda_т}\right] (t_1' \in L).$$

Решение этого уравнения следующее:

$$\mu(t_1') = -\frac{1}{\pi R(t_1')}\left[\frac{it_1'}{r}\int_L \frac{R(t_1)\frac{d\theta(t_1)}{dt_1} dt_1}{t_1 - t_1'} - \frac{Q}{4\lambda_т}\left(1 + \frac{t_1'}{r}\right)\right]. \quad (8.24)$$

Здесь $R(t_1) = R^-(t_1)$—предельное значение функции $R(z) = \sqrt{(z-a)(z-\bar{a})}$; под $R(z)$ подразумевается однозначная на разрезанной вдоль L плоскости ветвь, определяющаяся соотношением $\lim_{z\to\infty} R(z)/z = 1$.

Уравнение (8.19) в случае дугообразной трещины принимает форму

$$\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{d(t_1)} dt_1}{t_1 - t_1'} = \frac{\pi i}{t_1'}\left[r\tau(t_1') + \frac{Q}{4\lambda_т}\right] (t_1' \in L).$$

Его решение имеет вид

$$\frac{d\gamma(t_1')}{dt_1'} = \frac{1}{\pi i R(t_1')}\left[r\int_L \frac{R(t_1)\,\tau(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1 - t_1')} + \frac{iQ}{4\lambda_т t_1'}(t_1' - r)\right]. \quad (8.25)$$

Рассмотрим также периодические задачи для бесконечной плоскости с разрезами. Интегральное представление общего решения таких задач можно построить с помощью комплексных потенциалов (8.12) или (8.14) для системы произвольно расположенных разрезов.

Пусть в бесконечной плоскости есть система циклически размещенных разрезов. Будем считать, что в основном секторе периодов расположено N криволинейных разрезов L_k $(k = \overline{1, N})$, на берегах которых задано одно из граничных условий (8.8)—(8.10). Каждая последующая система разрезов и граничных условий на них получается из предыдущей в результате поворота относительно точки $z = 0$ на угол $2\pi/M$ $(M = 1, 2, \ldots)$. Тогда тем-

пературное поле удовлетворяет условиям циклической симметрии и определяется потенциалом

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left[\frac{M\gamma(t_1)\,t_1^{M-1}}{t_1^M-z^M}\,dt-i\mu(t_1)\ln(t_1^M-z^M)\,ds\right]+C. \quad (8.26)$$

При удовлетворении граничного условия (8.8) приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\operatorname{Re}\left[Mt_1'^{M-1}\frac{dt_1'}{ds'}\int\limits_L\frac{M(t_1)\,ds}{t_1^M-t_1'^M}-i\frac{d}{ds'}\int\limits_L\frac{M\gamma(t_1)\,t_1^{M-1}dt_1}{t_1^M-t_1'^M}\right]=$$

$$=\pi\,\frac{d\theta(t_1')}{dt_1'}\,\frac{dt_1'}{ds'}\quad(t_1'\in L), \quad (8.27)$$

которое необходимо решить при условиях (8.15) и (8.17) или (8.18).

Граничная задача (8.9) в этом случае сводится к сингулярному интегральному уравнению

$$\operatorname{Re}\left[Mt_1'^{M-1}\frac{dt_1'}{ds'}\int\limits_L\frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1+i\mu(t_1)\,ds}{t^M-t_1'^M}\right]=-\pi\tau(t_1')\;(t_1'\in L) \quad (8.28)$$

и дополнительным условиям (8.20).

Для системы теплопроникающих трещин при наличии циклической симметрии из соотношений (8.10) и (8.26) получим интегро-дифференциальное уравнение

$$-\frac{2h(t_1')}{\lambda_т}\gamma(t_1')-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[Mt_1'^{M-1}\frac{dt_1'}{ds'}\int\limits_L\frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1}{t_1^M-t_1'^M}\right]=\nu(t_1')\quad(t_1'\in L),$$

которое также необходимо решить при условиях (8.20).

Рассмотрим периодическую систему разрезов в бесконечной плоскости. Будем считать, что в основной полосе периодов шириной d (вдоль оси x) содержится N разрезов L_k $(k=\overline{1,N})$, на берегах которых выполняется одно из условий (8.8)—(8.10). Каждая последующая система разрезов образуется продвижением предыдущей на величину d в направлении оси x. Тогда комплексный потенциал $f(z)$ запишется в виде

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{\pi}{d}\gamma(t_1)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(t_1-z)\,dt_1-\right.$$

$$\left.-i\mu(t_1)\ln\left|\sin\frac{\pi}{d}(t_1-z)\right|ds\right\}+C. \quad (8.29)$$

При удовлетворении граничного условия (8.8) получаем интегральное

уравнение

$$\frac{1}{d}\,\mathrm{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \mu(t_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-t_1')\,ds - i\,\frac{d}{ds'}\int_L \gamma(t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-t_1')\,dt_1\right] = \frac{d\theta(t_1')}{dt_1'}\,\frac{dt_1'}{ds'}\quad(t_1'\in L), \tag{8.30}$$

решение которого должно удовлетворять условиям (8.16), (8.17) или (8.18).

Аналогично из соотношений (8.9) и (8.29) получим сингулярное интегральное уравнение

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{d}\,\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-t_1')\left[\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1 + i\mu(t_1)\,ds\right]\right\} = -\tau(t_1')\quad(t_1'\in L) \tag{8.31}$$

относительно производной от скачка температуры $\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}$, которая удовлетворяет соотношениям (8.20).

Для периодической системы теплопроницаемых трещин имеем уравнение

$$-\frac{2h(t_1')}{\lambda_\text{т}}\,\gamma(t_1') - \frac{1}{d}\,\mathrm{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-t_1')\,\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1\right] = \nu(t_1')$$

$$(t_1'\in L),$$

решение которого также ищется при условиях (8.20).

Рассмотрим периодическую систему колинеарных трещин, когда в полосе периодов есть одна трещина, причем L представляет собой отрезок $(-l\leqslant x\leqslant l)$ оси x. В этом случае уравнение (8.30) принимает вид

$$\frac{1}{d}\int_{-l}^{l} \mu(t_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-x)\,dt_1 = \frac{d\theta(x)}{dx}\quad(-l\leqslant x\leqslant l). \tag{8.32}$$

Его решением при условии (8.16) будет функция

$$\mu(x) = \frac{1}{d\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{d}}}\left[\frac{Q}{2\lambda_\text{т}\cos\frac{\pi l}{d}} - \right.$$

$$\left.-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{d}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi t_1}{d}}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi t_1}{d} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{d}}\,\frac{d\theta(t_1)}{dt_1}\,dt_1\right]. \tag{8.33}$$

Интегральное уравнение (8.31) в данном случае также преобразуется к виду (8.32) и его решение дается соотношением

$$\frac{d\gamma(x)}{dx} = \frac{1}{d\cos^2\frac{\pi x}{d}\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{d}}} \times$$

$$\times \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi t_1}{d}}}{\mathrm{tg}\frac{\pi t_1}{d} - \mathrm{tg}\frac{\pi x}{d}} \cdot \frac{d\theta(t_1)}{dt_1} dt_1. \quad (8.34)$$

Замкнутые решения уравнений (8.30) и (8.31) можно получить также для периодической системы параллельных разрезов.

8.3. Определение температурных полей в многосвязной области

Пусть область S, занятая телом, ограничена одним или несколькими замкнутыми контурами $L_1, L_2, \ldots, L_M, L_0$, где первые M контуров расположены вне друг друга, а последний охватывает все остальные. Конечные области, ограниченные контурами L_k, будем обозначать $S_k^* (k = \overline{1, M})$, а бесконечную область — внешность контура L_0 — через S_0^-. Положительным направлением обхода контуров $L_k (k = \overline{1, M})$ и L_0 будем считать то, при котором область S остается слева (рис. 8.3).

Рассмотрим основные граничные задачи теплопроводности для многосвязной области, когда на ее границе $L = \bigcup L_k \; (k = \overline{0, M})$ задано одно из граничных условий

$$T = \theta^*(t_1) \quad (t_1 \in L); \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \tau^*(t_1) \quad (t_1 \in L); \quad (8.36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\lambda_1(t_1)}{\lambda_\text{т}} T = \nu^*(t_1) \quad (t_1 \in L). \quad (8.37)$$

Здесь n — внешняя нормаль к границе области S; $\lambda_1(t_1)$ — коэффициент теплообмена.

Пусть Q_k — количество тепла, которое выходит из тела через контур L_k. Тогда комплексный потенциал $f_*(z)$ (8.7) в области S можно представить в виде

$$f_*(z) = -\frac{1}{2\pi\lambda_\text{т}} \sum_{k=1}^{M} Q_k \ln(z - z_k) + f(z), \quad (8.38)$$

где функция $f(z)$ голоморфна в области S; z_k — произвольные точки внутри областей S_k. При решении граничных задач (8.35) — (8.37) будем считать Q_k известными величинами.

С помощью соотношения (8.38) граничные задачи (8.35) — (8.38) можно представить в виде

$$\operatorname{Re} f(t_1) = Q(t_1) \qquad (t_1 \in L), \tag{8.39}$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt_1}{ds} F(t_1)\right] = \tau(t_1) \qquad (t_1 \in L), \tag{8.40}$$

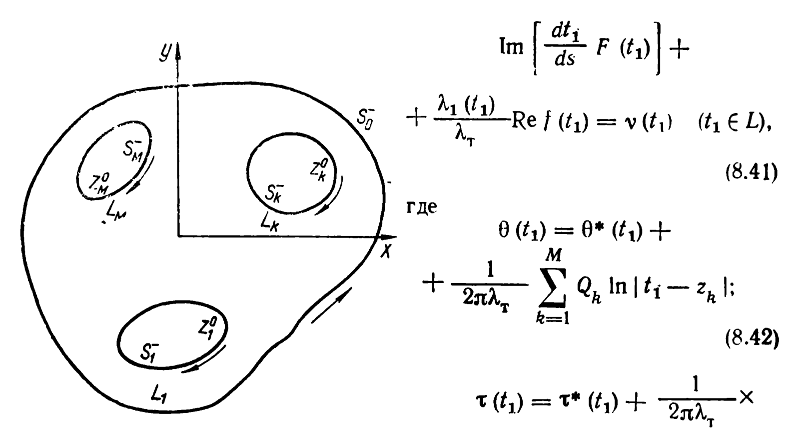


Рис. 8.3. Многосвязная область.

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt_1}{ds} F(t_1)\right] + \frac{\lambda_1(t_1)}{\lambda_т} \operatorname{Re} f(t_1) = \nu(t_1) \quad (t_1 \in L), \tag{8.41}$$

где

$$\theta(t_1) = \theta^*(t_1) + \frac{1}{2\pi\lambda_т} \sum_{k=1}^{M} Q_k \ln|t_1 - z_k|; \tag{8.42}$$

$$\tau(t_1) = \tau^*(t_1) + \frac{1}{2\pi\lambda_т} \times \sum_{k=1}^{M} Q_k \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t_1 - z_k} \frac{dt_1}{ds}\right);$$

$$\nu(t_1) = \nu^*(t_1) + \frac{1}{2\pi\lambda_т} \sum_{k=1}^{M} Q_k \left[\operatorname{Im}\left(\frac{1}{t_1 - z_k} \frac{dt_1}{ds}\right) + \frac{\lambda_1(t_1)}{\lambda_т} \ln|t_1 - z_k|\right].$$

Таким образом, граничные задачи (8.35)—(8.37) сведены к случаю, когда количество тепла, выходящее через контур L_k, равно нулю, т. е.

$$\int_L \tau(t_1)\, ds = 0 \qquad (k = \overline{0, M}). \tag{8.43}$$

Здесь учтено, что для многосвязной конечной области суммарное количество тепла, выходящего через контур L, равно нулю.

Рассмотрим граничную задачу (8.39). Дополним область S до полной плоскости таким образом, чтобы при переходе через контур L температура оставалась непрерывной, а тепловой поток получал скачок $\mu(t_1)$. Тогда комплексный потенциал $F(z)$ согласно формуле (8.13) имеет вид

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mu(t_1)\, ds}{t_1 - z}. \tag{8.44}$$

Удовлетворив с помощью представления (8.44) условия (8.39), получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\int_L \frac{\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'}\right] + c_k = \frac{d\theta(t_1')}{dt_1'}\frac{dt_1'}{ds'} \qquad (t_1' \in L_k,\ k = \overline{0, M}). \tag{8.45}$$

в левые части которых введены функционалы

$$c_k = \int_{L_k} \mu(t_1)\,ds \qquad (k = \overline{0, M}), \tag{8.46}$$

равные нулю вследствие выполнения условий (8.43).

Введение слагаемых c_k позволяет доказать безусловную разрешимость системы интегральных уравнений (8.45). Без функционалов c_k система (8.45) имеет решение только при условиях

$$\int_{L_k} \frac{d\theta(t_1)}{dt_1}\,dt_1 = 0.$$

Последние равенства выполняются вследствие однозначности температуры в области S.

При рассмотрении граничной задачи (8.40) дополним область S до полной плоскости таким образом, чтобы при переходе через контур L тепловой поток оставался непрерывным а температура получала скачок $\gamma(t_1)$. Тогда потенциал $F(z)$ согласно формуле (8.13) можно представить в виде

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1}{t_1 - z} \tag{8.47}$$

Из граничных условий (8.40) придем к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}{t_1 - z}\,dt_1\right] + d_k = \tau(t_1') \qquad (t_1' \in L_k,\quad k = \overline{0, M}), \tag{8.48}$$

где в левые части введены функционалы, равные нулю,

$$d_k = \int_{L_k} \frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}\,dt_1 \qquad (k = \overline{0, M}). \tag{8.49}$$

При введенных слагаемых d_k интегральные уравнения (8.48) имеют решение при любой правой части, без таких слагаемых система (8.49) разрешима лишь при условиях (8.43).

Решение задач (8.41) также ищем в виде (8.47) Подставив потенциал (8.47) в условия (8.41), придем к системе сингулярных интегро-диффере-

циальных уравнений

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}{t_1-t_1'}dt_1\right]+\frac{\lambda_1(t_1')}{\lambda_т}\left[\gamma(t_1')+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int \gamma(t_1)\operatorname{Im}\frac{dt_1}{t_1-t_1'}\right]=\nu(t_1') \qquad (t_1'\in L), \tag{8.50}$$

которую необходимо решить при условиях

$$\int_{L_k}\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1=0 \qquad (k=\overline{0, M}).$$

Пусть область S, ограниченная контуром L_0, представляет собой нижнюю полуплоскость ($y\leqslant 0$). Тогда уравнения (8.45) и (8.48) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0(t_1)\,dt_1}{t_1-x}=\pi\frac{d\theta_0(x)}{dx};\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{d\gamma_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-x}dt_1=\pi\tau_0(x)$$

$$(\infty<x<\infty). \tag{8.51}$$

Будем предполагать, что при больших $|x|$ функции $\theta_0'(x)$ и $\tau_0(x)$ имеют порядок $0(1/x)$. В этом случае решение уравнений (8.51) дается преобразованием Гильберта

$$\mu_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-x}dt_1;\qquad \frac{d\gamma(x)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1-x}.$$

Подставив эти решения в формулы (8.44) и (8.47) найдем потенциалы $F_0(z)$ для полуплоскости, когда на ее крае задана температура $\theta_0(t_1)$:

$$F_0(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-z}dt_1 \tag{8.52}$$

или тепловой поток $\tau_0(t_1)$

$$F_0(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1 z}. \tag{8.53}$$

Для полуплоскости, когда $\lambda_1(t_1)/\lambda_т=H=\text{const}$, уравнение (8.50) превращается в

$$H\gamma_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{d\gamma_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-x}dt_1=\nu_0(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{8.54}$$

Будем считать, что $\nu_0(x)$ при больших $|x|$ имеет порядок $O(1/x)$. Решение уравнения (8.54) находится с помощью интегрального преобразования Фурье

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \nu_0(u)\,du \int_0^{\infty} \frac{\cos\xi(u-x)}{\xi+H}\,d\xi.$$

По формуле (8.14) получим

$$F_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \nu_0'(u)\,du \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\xi(z-u)}}{\xi+H}\,d\xi. \tag{8.55}$$

Пусть L_0 — представляет собой окружность радиуса R с центром в точке $z=0$. Тогда уравнения (8.45) и (8.48) можно записать в виде

$$\int_L \frac{\mu_0(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1-t_1')} = \frac{\pi i}{R}\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}\quad;\qquad \int_{L_n} \frac{\frac{d\gamma_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-t_1'}\,dt_1 =$$

$$= \frac{\pi i R}{t_1'}\tau_0(t_1') \qquad (t_1' \in L_0).$$

Их решения даются соотношениями

$$\mu_0(t_1') = \frac{t_1'}{\pi i R}\int_{L_0} \frac{\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-t_1'}\,dt_1 \qquad \frac{d\gamma(t_1')}{dt_1'} = \frac{R}{\pi i}\int_{L_0} \frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1-t_1')}. \tag{8.56}$$

Подставив эти функции в формулы (8.44) и (8.47), получим комплексные потенциалы для круга

$$F_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \frac{\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-z}\,dt_1, \tag{8.57}$$

$$F_0(z) = \frac{R}{\pi i}\int_{L_0} \frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1-z)} \tag{8.58}$$

для граничных задач (8.35) и (8.36) соответственно.

Учитывая соотношения (8.38), (8.42) и (8.56), записываем решение граничных задач (8.35) и (8.36) для бесконечной плоскости с круговым отверстием

$$F_0(z) = -\frac{Q}{2\pi\lambda_{\text{т}} z} - \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \frac{\frac{d\theta_0(t_1)}{dt_1}}{t_1-z}\,dt_1, \tag{8.59}$$

$$F_0(z) = -\frac{Q}{2\pi\lambda_{\text{т}} z} - \frac{R}{\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1 - z)}, \tag{8.60}$$

причем обход контура L_0 здесь осуществляется против хода часовой стрелки.

8.4. Решение задач теплопроводности для областей с отверстиями и разрезами

Пусть в области S, ограниченной замкнутыми контурами L_k $(k = \overline{0, M})$, имеется $N - M$ криволинейных гладких разрезов L_k $(k = \overline{M + 1, N})$ (рис. 8.4). Предположим, что разрезы не пересекаются и не выходят на край области S. Обозначим через L' и L'' совокупности замкнутых и разомкнутых контуров соответственно, $L = L' + L''$.

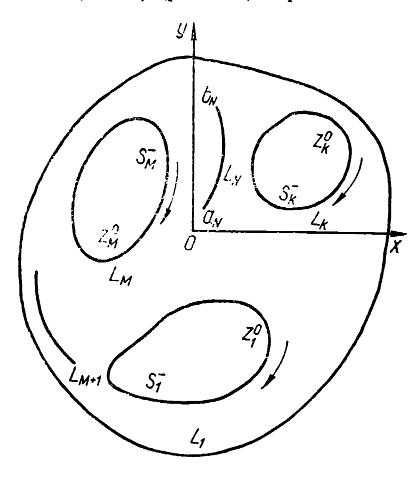


Рис. 8.4. Система разрезов в многосвязной области.

Рассмотрим задачу, когда на берегах разрезов задана температура

$$T^{\pm} = \theta^*(t_1) \pm \gamma(t_1) \quad (t_1 \in L''), \tag{8.61}$$

а на замкнутых контурах выполняются условия (8.35). Будем считать известным количество тепла Q_k, вытекающее через каждый контур L_k $(k = \overline{0, N})$ в отдельности, причем суммарное количество тепла $Q = 0$. Решение задачи ищем в виде (8.38), где функция $f(z)$ определяется соотношением (8.14), причем $\gamma(t_1) = 0$ при $t_1 \in L'$. Из граничных условий (8.35) и (8.61) приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'} + \frac{1}{\pi i}\frac{d}{ds}\int\limits_{L''}\frac{\gamma(t_1)\,dt_1}{t_1 - t_1'}\right] + c_k\delta_k =$$

$$= \frac{d\theta(t_1')}{dt_1'}\frac{dt_1'}{ds'} \qquad (t_1' \in L_k, \quad k = \overline{0, N}) \tag{8.62}$$

Здесь $\delta_k = 1$ при $k = \overline{0, M}$ и $\delta_k = 0$ при $k = \overline{M + 1, N}$, функция $\theta(t_1)$ и постоянная c_k определяются выражениями (8.42) и (8.46).

Интегральное уравнение (8.62) имеет единственное решение в классе функций $\mu(t_1) \in H$, $t_1 \in L'$ и $\mu(t_1) \in H^*$, $t_1 \in L''$ при дополнительных усло-

виях

$$\int_{L_k} \mu(t_1)\,ds = \frac{Q_k}{2\lambda_т} \qquad (k = \overline{M+1, N}). \tag{8.63}$$

Если же на разрезах L_k $(k = \overline{M+1, N})$ величины Q_k неизвестны, то равенства (8.63) следует заменить на условия вида (8.17).

Пусть на замкнутых контурах выполняются условия (8.36), а на разрезах задан тепловой поток

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial n} = \tau^*(t_1) \pm \mu(t_1)\ (t_1 \in L''). \tag{8.64}$$

Решение задачи также ищем в виде (8.14) и (8.38), считая $\mu(t_1) = 0$ при $t_1 \in L'$ При удовлетворении граничных условий (8.36) и (8.64) получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Im} = \left[\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1 + i\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'} + d_k\delta_k\right] = \tau(t_1')$$

$$(t_1' \in L_k,\quad k = \overline{0, N}), \tag{8.65}$$

где функция $\tau(t_1)$ и постоянная d_k определяются формулами (8.42) и (8.49).

В классе функций $\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} \in H$, $t_1 \in L'$ и $\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} \in H^*$, $t_1 \in L''$ система (8.65) имеет единственное решение для произвольной правой части при выполнении условий $\int_{L_k} \frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1 = 0$ $(k = \overline{M+1, N})$, обеспечивающих однозначность температуры при обходе контуров разрезов.

Остановимся на решении задачи теплопроводности, когда на контуре L' имеют место условия (8.37), а трещины являются теплопроницаемыми, т. е.

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial n} - \frac{\lambda_1(t_1)}{\lambda_т}(T^+ - T^-) = \nu^*(t_1) \qquad (t_1 \in L''). \tag{8.66}$$

Представив решение задачи в виде (8.14) и (8.38) при $\mu(t_1) = 0$; $t_1 \in L'$, из граничных условий (8.37) и (8.66) получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1 + i\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'}\right] + \frac{\lambda_1(t_1')}{\lambda_т}\Big\{\gamma(t_1') +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_L \left[\gamma(t_1)\operatorname{Im}\frac{dt_1}{t_1 - t_1'} - \mu(t_1)\ln|t_1 - t_1'|\,ds\right]\Big\} = \nu(t_1') \qquad (t_1' \in L'),$$

$$- \frac{2\lambda_1(t_1')}{\lambda_т}\gamma(t_1') + \operatorname{Im}\left[\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} + i\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'}\right] = (t_1')$$

$$(t_1' \in L''). \tag{8.67}$$

Функция $\nu(t_1)$ при $t_1 \in L'$ определяется формулой (8.42), а при $t_1 \in L''$ дается соотношением

$$\nu(t_1) = \nu^*(t_1) + \frac{1}{2\pi\lambda_\text{т}} \sum_{k=1}^{M} Q_k \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t_1 - z_k} \frac{dt_1}{ds}\right) \qquad (t_1 \in L''),$$

где z_k — то же, что в формуле (8.38).

Решение системы (8.67) должно удовлетворять условиям

$$\int_{L_k} \frac{d\gamma(t_1)}{dt_1} dt_1 = 0 \qquad (k = \overline{0, N}).$$

Выше рассмотрены задачи теплопроводности для многосвязной области с отверстиями и разрезами, когда на границе области выполняются температурные условия первого (задана температура), второго (задан тепловой поток) или третьего (на замкнутых граничных контурах происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона, а на разрезах выполняются условия теплопроводности) рода. При использовании приведенного выше интегрального представления комплексного потенциала $f(z)$ могут быть построены сингулярные интегральные уравнения смешанных задач, когда на разных контурах L_k (замкнутых или разомкнутых) задаются различные температурные условия.

Если известно общее решение задачи теплопроводности для некоторой сплошной области, задачу для системы разрезов в такой области можно привести к сингулярным интегральным уравнениям по разомкнутым контурам-разрезам. При этом при внутренних разрезах в ограниченной области интегральные уравнения имеют такую же структуру, как и при системе разрезов в бесконечной плоскости; наличие границы области влияет лишь на регулярные ядра уравнений.

Пусть система криволинейных разрезов L_k $(k = \overline{1, N})$ находится в нижней полуплоскости $(y \leqslant 0)$. На краю полуплоскости L_0 задана температура $\theta_0(x)$, а на контуре $L = \bigcup L_k$ $(k = \overline{1, N})$ известны скачки температуры $\gamma(t_1)$ и теплового потока $\mu(t_1)$, решение задачи будет следующим:

$$F^*(z) = F(z) + F_0(z) + F_1(z), \tag{8.68}$$

где функции $F(z)$ и $F_0(z)$ определяются соответственно формулами (8.12) и (8.52). Тогда граничное условие на краю полуплоскости запишется в виде

$$\operatorname{Re} f_1(x) = -\operatorname{Re} f(x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{8.69}$$

Используя решение (8.52) и соотношения (8.14) и (8.69), находим

$$F_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\overline{\mu(t_1)}\, ds}{\bar{t}_1 - z} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\gamma(t_1)}\, \overline{dt_1}}{(\bar{t}_1 - z)^2}. \tag{8.70}$$

Аналогично строится интегральное представление общего решения задачи при задании на краю полуплоскости теплового потока $\tau_0(x)$. Тогда комплексный потенциал $F^*(z)$ также имеет вид (8.68), где $F(z)$ и $F_0(z)$ определяются равенствами (8.12) и (8.53), а функция $F_1(z)$ находится из выражения (8.70), взятого с противоположным знаком.

Если на краю полуплоскости задано условие (8.41), причем $\lambda_1(t_1)/\lambda_\text{т} = H = \text{const}$, то решение задачи можно также представить выражением

(8.68), где $F(z)$ и $F_0(z)$ имеют вид (8.12) и (8.55). Удовлетворяя граничное условие (8.41) и используя решение (8.55), находим

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\overline{\mu(t_1)}\,ds}{\bar t_1-s}-\frac{2H}{\pi i}\int_L\overline{\mu(t_1)}\,ds\int_0^\infty\frac{e^{i\xi(\bar t_1-z)}}{\xi+H}\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{1}{(\bar t_1-z)^2}-\frac{2iH}{\bar t_1-z}\right]\overline{\gamma(t_1)}\,\overline{dt_1}-$$

$$-\frac{2H^2}{\pi i}\int_L\overline{\gamma(t_1)}\,\overline{dt_1}\int_0^\infty\frac{e^{i\xi(\bar t_1-z)}}{\xi+H}\,d\xi.$$

С помощью полученных выше общих решений задачи теплопроводности для системы разрезов в полуплоскости, подобно таковой в бесконечной плоскости, легко записать интегральные уравнения граничных задач, когда на берегах разрезов задано любое из условий (8.8) — (8.10). Запишем, например, интегральное уравнение задачи, когда на разрезах заданы условия (8.9), а на краю полуплоскости — условия (8.36), т. е. на всей границе области задан тепловой поток. В этом случае будем иметь уравнение

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{dt_1'}{ds'}\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{\dfrac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}{t_1-t_1'}\,dt_1-\frac{\overline{\dfrac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}}{\bar t_1-t_1'}\,\overline{dt_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{\mu(t_1)}{t_1-t_1'}+\frac{\overline{\mu(t_1)}}{\bar t_1-t_1'}\right]i\,ds\right\}-\frac{1}{\pi}\frac{dt_1'}{ds'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1-t_1'}\right\}=\tau(t_1')$$

$$(t_1'\in L),$$

которое необходимо решить при условиях (8.20).

Получим также решение задач для круговых областей с разрезами. Пусть в круге $|z|\leqslant r$ имеются разрезы L_k $(k=\overline{1,N})$, на которых заданы скачки температуры $\gamma(t_1)$ и теплового потока $\mu(t_1)$. На внешней границе области L_0 известна температура $\theta_0(t_1)$ или тепловой поток $\tau_0(t_1)$. Тогда потенциал $F^*(z)$ имеет вид (8.68), где функции $F(z)$ и $F_0(z)$ определяются соответственно соотношениями (8.12) и (8.56) или (8.57), а

$$F_1(z)=\mp\frac{r^2}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\gamma(t_1)}\,\overline{dt_1}}{(r^2-z\bar t_1)^2}\mp\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\bar t_1\overline{\mu(t_1)}\,ds}{r^2-z\bar t_1},\tag{8.71}$$

где знак «минус» относится к случаю, когда на L задана температура, а «плюс» — когда тепловой поток.

Решение аналогичной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием также дается формулой (8.68), где функция $F_0(z)$ определяется соотношением (8.59) или (8.60), а потенциал $F_1(z)$ имеет вид

$$F_1(z)=\mp\frac{r^2}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\gamma(t_1)}\,\overline{dt_1}}{(r^2-z\bar t_1)^2}\mp\frac{r^2}{\pi z}\int_L\frac{\overline{\mu(t_1)}\,ds}{r^2-z\bar t_1}.\tag{8.72}$$

В качестве примера запишем интегральное уравнение задачи для кругового диска с системой разрезов L_k $(k=\overline{1, N})$, когда на крае диска L_0 задан тепловой поток $\tau_0(t_1)$, а на разрезах заданы условия (8.9). При этом предполагается, что выполняется условие

$$\int_{L_0} \tau_0(t_1)\, ds + 2\int_{L} \mu(t_1)\, ds = 0,$$

т. е. суммарный поток тепла, вытекающий через всю границу области $L_0 + L$, равен нулю. Тогда задача приводится к сингулярному интегральному уравнению

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{dt_1'}{as'}\frac{1}{\pi i}\left\{\int_L\left[\frac{\frac{d(t_1)}{dt_1}dt_1 + i\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\overline{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}\,\bar t_1\,\overline{dt_1} - \overline{i\mu(t_1)}\,\bar t_1 ds}{r^2 - t_1 t_1'}\right] + r\int_{L_0}\frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1(t_1 - t_1')}\right\}\right\} = \tau(t_1') \qquad (t_1' \in L)$$

и дополнительным условиям (8.20).

Аналогичная задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием сводится к уравнению

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{dt_1'}{dt'}\frac{1}{\pi i}\left\{\int_L\left[\frac{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}dt_1 + i\mu(t_1)\,ds}{t_1 - t_1'} + \right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{\frac{d\gamma(t_1)}{dt_1}}\,\bar t_1\,\overline{dt_1} - \overline{i\mu(t_1)}\,\bar t_1 ds}{r^2 - t_1'\bar t_1}\right] - r\int_{L_0}\left(\frac{1}{t_1 - t_1'} + \frac{1}{2t_1'}\right)\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\tau_0(t_1)\,dt_1}{t_1}\right\}\right\} = \tau(t_1') \qquad (t_1' \in L),$$

решение которого также удовлетворяет условиям (8.20).

8.5. Задачи термоупругости для бесконечной плоскости с трещинами

Пусть на упругое изотропное тело, находящееся в состоянии плоской деформации, действует установившаяся температура $T(x, y)$, т. е. $T(x, y)$ является гармонической функцией и ее можно представить в виде (8.7). Тогда компоненты перемещений u_x, u_y и напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} выражаются через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ следующим образом:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}],$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar z\frac{d\Phi(z)}{dz} + \Psi(z)\right], \qquad (8.73)$$

$$2G(u_x + iu_y) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \psi(z) + \beta_1\int f(z)\,dz,$$

где $\frac{d\varphi(z)}{dz} = \Phi(z)$; $\frac{d\psi(z)}{dz} = \Psi(z)$; $\varkappa = 3 - 4\mu$; $\beta_1 = \alpha E$. Для обобщенного плоского напряженного состояния формулы аналогичны с тем, однако, различием, что $\varkappa = (3+\mu)/(1+\mu)$, а $\beta_1 = \alpha E/(1+\mu)$ (в последнем случае считается, что теплоотдача с боковых поверхностей пластины отсутствует).

Для первой основной задачи термоупругости, когда на границе L области S заданы внешние напряжения, граничные условия имеют вид

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\left[t_1 \frac{\overline{d\Phi(t_1)}}{dt_1} + \overline{\Psi(t_1)}\right] = \sigma_n + i\tau_n \quad (t_1 \in L), \qquad (8.74)$$

где σ_n и τ_n заданные нормальная и касательная компоненты внешнего напряжения.

Рис. 8.5. Система криволинейных разрезов в бесконечной плоскости.

Для второй основной задачи, когда на контуре L известны перемещения $u_x = u_x(t_1)$ и $u_y = u_y(t_1)$, граничное условие получается предельным переходом из последнего равенства (8.73):

$$\varkappa\varphi(t_1) - t_1\overline{\Phi(t_1)} - \overline{\Psi(t_1)} + \beta_1 \int f(t_1)\, dt_1 = 2G\left[u_x(t_1) + iu_y(t_1)\right] \quad (t_1 \in L). \qquad (8.75)$$

Продифференцировав обе части равенства (8.75) по t_1, получим иную форму граничного условия:

$$\varkappa\Phi(t_1) - \overline{\Phi(t_1)} - \frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\left[t_1 \frac{\overline{d\Phi(t_1)}}{dt_1} + \Psi(t_1)\right] + \beta_1 f(t_1) = 2G\left[\frac{du_x(t_1)}{dt_1} + i\frac{du_y(t_1)}{dt_1}\right] \quad (t_1 \in L). \qquad (8.76)$$

Рассмотрим плоскую задачу термоупругости для бесконечной плоскости, находящейся под действием стационарного температурного поля $T(x, y)$. В плоскости есть система криволинейных разрезов L_k $(k = \overline{1, N})$ (рис. 8.5), на берегах которых заданы условия

$$\sigma_n^{\pm} + i\tau_n^{\pm} = p(t_1) \pm q(t_1) \qquad (t_1 \in L = \bigcup L_k,\ k = \overline{1, N}), \qquad (8.77)$$

а напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют.

Для ограничения напряжений на бесконечности, как это следует из формул (8.14) и (8.73), необходимо считать, что суммарное количество тепла, выходящее через контур L, равно нулю ($Q = 0$). Предположим также, что берега трещин не контактируют. Решение вспомогательной задачи, когда при переходе через контур L напряжения и смещения получают скачки

$q(t_1)$ и $g(t_1)$, будет следующим:

$$(\sigma_n + i\tau_n)^+ + (\sigma_n + i\tau_n)^- = 2q(t_1),$$

$$\frac{d}{dt}\left[(u_x + iu_y)^+ - (u_x + iu_y)^-\right] = \frac{i(1+\varkappa)}{2G}\frac{dg(t_1)}{dt_1} \qquad (t_1 \in L), \quad (8.78)$$

причем скачок смещений на концах разрезов равен нулю ($g(a_k) = g(b_k) = 0$, $k = \overline{1, N}$).

Воспользовавшись соотношениями (8.74) и (8.76) и записав левые части равенств (8.78) через комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $f(z)$, получим краевые задачи для определения кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$:

$$(1+\varkappa)\left[\Phi^+(t_1) - \Phi^-(t_1)\right] + \beta_1\left[f^+(t_1) - f^-(t_1)\right] = i(1+\varkappa)\frac{dg(t_1)}{dt_1} + $$

$$+ 2g(t_1),$$

$$\left[\bar{t}_1\Phi'(t_1) + \Psi(t_1)\right]^+ - \left[\bar{t}_1\Phi'(t_1) + \Psi(t_1)\right]^- = \left[\overline{2q(t_1)} + \Phi^+(t_1) + \right.$$

$$\left. + \Phi^-(t_1) - \overline{\Phi^+(t_1)} + \overline{\Phi^-(t_1)}\right]\frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \qquad (t_1 \in L). \qquad (8.79)$$

Будем считать, что решение задачи теплопроводности дается потенциалом $f(z)$ (8.14). Сначала предположим, что функция $\mu(t) = 0$. Тогда из первого равенства (8.79) получим задачу линейного сопряжения для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(t_1) - \Phi^-(t_1) = i\,\frac{dg(t_1)}{dt_1} + 2\left[q(t_1) - \beta_1\gamma(t_1)\right]/(1+\varkappa) = is(t_1)$$

$$(t_1 \in L). \qquad (8.80)$$

Представим потенциал $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\bar{t}_1 s(t_1)\,dt_1}{(t_1 - z)^2} + \Omega(z), \qquad (8.81)$$

где неизвестная функция $\Omega(z)$ также кусочно-голоморфна по всей плоскости, включая бесконечно удаленную точку. Тогда из второго равенства (8.79) с учетом соотношений (8.80) и (8.81) придем к задаче линейного сопряжения для функции $\Omega(z)$

$$\Omega^+(t_1) - \Omega^-(t_1) = i\left[s(t_1) + 2iq(t_1)\right]\frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \qquad (t_1 \in L). \qquad (8.82)$$

Записав решение задач сопряжений (8.80) и (8.82), найдем интегральные представления комплексных потенциалов напряжений $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ при $\mu(t_1) = 0$.

Случай, когда $\mu(t_1) \neq 0$, рассмотрим отдельно таким же образом как и при решении краевой задачи (8.11). Положив $\frac{dg(t_1)}{dt_1} = q(t_1) = \gamma(t_1) = 0$, придем к задачам сопряжений для функций $\Phi'(z)$ и $\Omega'(z)$.

В результате решение вспомогательной задачи (8.78) запишется в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\frac{G(t_1)\,dt_1}{t_1-z}+\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_т(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}Q_k\ln(z-b_k),$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\left[\frac{\overline{G(t_1)}-2i\overline{q(t_1)}}{t_1-z}\,\overline{dt_1}-\frac{\bar t_1G(t_1)\,dt_1}{(t_1-z)^2}\right]+ \tag{8.83}$$

$$+\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_т(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\bar b_kQ_k}{z-b_k},$$

где

$$G(t_1)=\frac{dg(t_1)}{dt_1}-2i\left[q(t_1)-\beta_1\gamma(t_1)-i\beta_1\int\limits_{a_k}^{t}\mu(t_1')\,ds'\right]/(1+\varkappa)$$

$$(t_1\in L_k),\quad k=\overline{1,N}); \tag{8.84}$$

под $\ln(z-b_k)$ подразумевается функция, однозначная на плоскости, разрезанной вдоль линии, соединяющей точку $z=b_k$ (конец разреза L_k) с бесконечно удаленной.

Удовлетворяя с помощью потенциалов (8.83) граничное условие (8.77), приходим к сингулярному интегральному уравнению первой основной задачи термоупругости

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\left\{\frac{2G(t_1)+2iq(t_1)}{t_1-t_1'}\,dt+k_1(t_1,t_1')\,[G(t_1)+2iq(t_1)]\,dt_1+\right.$$

$$\left.+k_2(t_1,t_1')\,\overline{G(t_1)}\,\overline{dt_1}\right\}=p'(t_1)-\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_т(1+\varkappa)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{N}a_k\left(\frac{t_1-b_k}{\bar t_1-\bar b_k}\frac{d\bar t_1}{dt_1}+2\ln|t_1-b_k|\right)\qquad(t_1'\in L), \tag{8.85}$$

где регулярные ядра $k_1(t_1,t_1')$ и $k_2(t_1,t_1')$ даются соотношениями

$$k_1(t_1,t_1')=\frac{d}{dt_1'}\ln\frac{t_1-t_1'}{\bar t_1-\bar t_1'},\quad k_2(t_1,t_1')=-\frac{d}{dt_1'}\frac{t_1-t_1'}{\bar t_1-\bar t_1'}. \tag{8.86}$$

Решение уравнения (8.85) должно удовлетворять условиям

$$\int\limits_{L_k}\frac{dg(t_1)}{dt_1}\,dt_1=0\qquad(k=\overline{1,N}), \tag{8.87}$$

которые обеспечивают однозначность смещений при обходе контуров L_k.

Сингулярное интегральное уравнение (8.85) принадлежит к типу уравнений, подробно изученному Н. И. Мусхелишвили. В классе функций $\frac{dg(t_1)}{dt_1} \equiv H^*$ это уравнение всегда разрешимо и его решение содержит N произвольных постоянных, входящих линейным образом. При выполнении условий (8.87) решение уравнения (8.85) единственно.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ стационарной задачи термоупругости для плоскости с криволинейными разрезами при $Q_k = 0$ имеют такую же зависимость от функции $G(t_1)$, как и в силовой задаче от функции $\frac{dg(t_1)}{dt_1}$. Интегральное уравнение первой основной задачи термоупругости совпадает в этом случае с интегральным уравнением соответствующей плоской силовой задачи, если в последнем к искомой функции $\frac{dg(t_1)}{dt_1}$ прибавить известную из решения задачи теплопроводности функцию. Этот вывод сначала был сделан для системы прямолинейных термоизолированных трещин, а затем для такой же системы трещин при других граничных условиях на их берегах Отсюда следует, что многие результаты для плоских задач теории упругости для тел с разрезами могут быть использованы при решении плоских стационарных задач термоупругости. Изложенный подход удобен для практического применения, поскольку решения задач теплопроводности, термоупругости и силовой находятся единообразно, причем здесь не требуется искать температурное поле во всей области, занимаемой телом, а достаточно знать скачок температуры и теплового потока при переходе через линию разреза.

Определив из уравнения (8.85) неизвестную функцию $\frac{dg(t_1)}{dt_1}$, по формулам (8.83) найдем комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, через которые выражаются напряжения и смещения во всем теле. В окрестности вершин трещин напряженно-деформированное состояние характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$, определяющимися формулой

$$K_{\rm I}^{\pm} - iK_{\rm II}^{\pm} = \mp \lim_{t \to l_k^{\pm}} \left[\sqrt{2\pi |t - l_k^{\pm}|} \, \frac{dg(t_1)}{dt_1} \right] \qquad (k = \overline{1, N}), \qquad (8.88)$$

где нижние знаки относятся к началу трещины ($a_k = l_k^-$), а верхние — к концу ($b_k = l_k^+$).

Если разрезы расположены вдоль одной и той же окружности или прямой, то интегральное уравнение (8.85) решается в квадратурах. Рассмотрим одну трещину ($N = 1$, $L_1 = L$).

Пусть разрез L проведен вдоль отрезка $-l \leqslant x \leqslant l$ на оси x. Тогда имеем уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{G(t_1) + iq(t_1)}{t_1 - x} dt_1 = p(x) \qquad (-l < x < l), \qquad (8.89)$$

решение которого необходимо найти при условии (8.77). Учитывая равенства (8.84) и (8.87), получаем

$$\int_{-l}^{l} [G(t_1) + iq(t_1)]\, dt_1 = C =$$

$$= \frac{1}{1+\varkappa} \int_{-l}^{l} [(\varkappa - 1)\, q(t_1) + 2\beta_1 \gamma(t_1) - 2i\beta_1 t_1 \mu(t_1)]\, dt_1. \qquad (8.90)$$

Следовательно, решением уравнения (8.89) будет функция

$$G(x) = -iq(t_1) - \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \left[\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t_1^2}\, p(t_1)\, dt_1}{t_1 - x} - C \right].$$

По формуле (8.88) найдем коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \left\{ \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm t_1}{l \mp t_1}}\, p(t_1)\, dt_1 \pm i\, \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-l}^{l} q(t_1)\, dt_1 \pm \frac{2i\beta_1}{1+\varkappa} \int_{-l}^{l} [\gamma(t_1) - i\mu(t_1)\, t_1]\, dt_1 \right\}. \qquad (8.91)$$

Остановимся на случае, когда внешняя силовая нагрузка отсутствует $p(t_1) = q(t_1) = 0$. Пусть на берегах трещины задана температура (8.8), т. е. решение задачи теплопроводности дается формулой (8.22) при $Q = 0$. Тогда на основании соотношений (8.22) и (8.91)

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1}{\pi\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sqrt{l^2 - t_1^2}\, \frac{d\theta(t_1)}{dt_1}\, dt_1, \qquad (8.92)$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm \frac{2\beta_1}{\pi\sqrt{\pi l}\,(1+\varkappa)} \int_{-l}^{l} \gamma(t_1)\, dt_1.$$

Когда на берегах трещины поддерживается постоянная температура $T^{\pm} = T_0^{\pm} = \mathrm{const}$, а на бесконечности задан однородный тепловой поток τ, направленный под углом υ_1 к линии трещины, т. е. температурное поле в сплошной плоскости характеризуется потенциалом

$$F_0(z) = \tau e^{-i\upsilon_1}, \qquad (8.93)$$

из формул (8.92) при $\gamma(t_1) = (T_0^{+} - T_0^{-})/2$ и $\dfrac{d\theta(t_1)}{dt_1} = -\tau\cos\upsilon_1$ получим

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \pm \frac{\tau\beta_1 l\sqrt{\pi l}}{1+\varkappa} \cos\upsilon_1; \qquad K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm \frac{2\beta_1 (T_0^{+} - T_0^{-})\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}\,(1+\varkappa)}.$$

Если на берегах трещин задан тепловой поток (8.9), т. е. решение задачи теплопроводности дается соотношением (8.23), из равенства (8.91) бу-

дем иметь

$$K_{\text{I}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1}{\sqrt{\pi l}(1+\varkappa)} \int_{-l}^{l} t_1 \mu(t_1)\, dt_1,$$

$$K_{\text{II}}^{\pm} = \pm \frac{2\beta_1}{\sqrt{\pi l}(1+\varkappa)} \int_{-l}^{l} \sqrt{l^2 - t_1^2}\, \tau(t_1)\, dt_1.$$

Отсюда решение задачи для термоизолированной трещины ($\mu(t_1) = 0$; $\tau(t_1) = \tau \sin \upsilon_1$), когда температурное поле в сплошной плоскости определяется потенциалом $F_0(z)$ (8.93), будет следующим:

$$K_{\text{I}}^{\pm} = 0; \qquad K_{\text{II}}^{\pm} = \pm \frac{\tau\beta_1 l \sqrt{\pi l}}{1+\varkappa} \sin \upsilon_1.$$

Для бесконечной плоскости, ослабленной разрезом L по дуге окружности радиуса r от точки $a = re^{-i\upsilon}$ до $b = \bar{a}$, интегральное уравнение (8.85) приводится к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{G(t_1) + iq(t_1)}{t_1 - t_1'}\, dt_1 = p(t_1') + \frac{A}{t_1'} + B \quad (t_1' \in L), \tag{8.94}$$

где

$$A = -\frac{i}{\pi(1+\varkappa)} \int_L [\varkappa g(t_1) + \beta_1 \gamma(t_1) - r\beta_1 \mu(t_1)]\, dt_1;$$

$$B = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{G(t_1)\, dt_1}{t_1}, \tag{8.95}$$

а решение уравнения (8.94) запишется в виде

$$G(t_1') = -ig(t_1') - \frac{1}{r(t_1')} \left[\frac{1}{\pi} \int_L \frac{r(t_1)\, p(t_1)\, dt_1}{t_1 - t_1'} + \right.$$

$$\left. + iA\left(1 - \frac{r}{t_1'}\right) + i\beta_1 (t_1 - r\cos\upsilon) + C \right],$$

где $r(t_l')$ — то же, что и в формуле 8.24.

Неизвестные постоянные B и C находятся из второго равенства (8.95) и условия (8.87)

$$B = -\frac{1}{2\pi r \cos^2 \frac{\upsilon}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\upsilon}{2}\right)} \int_L \left\{ \frac{r(t_1)}{r} \left[\frac{r}{t_1} \sin^2 \frac{\upsilon}{2}\, p(t_1)\, dt_1 + \right.\right.$$

$$\left. + \overline{p(t_1)}\, \overline{dt_1} \right] + \left(\frac{1 - \varkappa\cos\upsilon}{1+\varkappa} - \frac{r}{t_1} \right) \left[\sin^2 \frac{\upsilon}{2}\, q(t_1)\, dt_1 + \overline{q(t_1)}\, \overline{dt_1} \right] +$$

$$\left. + \frac{2\beta_1}{1+\varkappa} \sin^2 \frac{\upsilon}{2} [\gamma(t_1) - r\mu(t_1)] \left(\frac{r^2}{t_1^2} - \sin^2 \frac{\upsilon}{2} \right) dt_1 \right\}, \tag{8.96}$$

$$C = \frac{1}{\pi(1+\varkappa)} \int_L [(1-\varkappa)\, q(t_1) - 2\beta_1 \gamma(t_1) + 2\beta_1 r \mu(t_1)]\, dt.$$

Для коэффициентов интенсивности напряжений получаются следующие выражения:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II}}^{\pm}=\pm\frac{\exp(\mp i\upsilon/2)}{\sqrt{\pi}\sqrt{r\sin\upsilon}}\left\{\int\limits_{L}\left[\sqrt{\frac{t_1-r\exp(\mp i\upsilon)}{t_1+r\exp(\mp i\upsilon)}}\,p(t_1)+\right.\right.$$

$$+[1-\varkappa\exp(\mp i\upsilon)]\frac{q(t_1)}{1+\varkappa}-\frac{\beta_1}{1+\varkappa}[1+\exp(\mp i\upsilon)][\gamma(t_1)-$$

$$\left.\left.-r\mu(t_1)]\right]dt_1\mp\pi Br\sin\upsilon\right\}. \qquad (8.97)$$

Рассмотрим случай, когда трещина свободна от внешней силовой нагрузки ($p(t_1)=q(t_1)=0$). Пусть на берегах трещины задана температура (8.8), т. е. решение задачи теплопроводности имеет вид (8.24) при $Q=0$. Тогда на основании равенств (8.24), (8.96) и (8.97)

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II}}^{\pm}=-\frac{2\beta_1\cos\frac{\upsilon}{2}}{(1+\varkappa)\sqrt{\pi r\sin\upsilon}}\int\limits_{L}\left\{\gamma(t_1)\left[i\frac{\sin\frac{\upsilon}{2}\exp\left(\pm\frac{i\upsilon}{2}\right)}{1+\sin^2\frac{\upsilon}{2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\sin^2\frac{\upsilon}{2}-\frac{r^2}{t_1^2}\right)\pm e^{\pm i\upsilon}\right]+r(t_1)\frac{d\theta(t_1)}{dt_1}\left[i\frac{\sin\frac{\upsilon}{2}\exp(\mp i\upsilon/2)}{1+\sin^2\frac{\upsilon}{2}}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sin^2\frac{\upsilon}{2}+\frac{r}{t_1}\right)\pm e^{\pm i\upsilon}\right]\right\}dt_1. \qquad (8.98)$$

Если на бесконечности задан однородный тепловой поток τ, т. е. $F_0(z)$ определяется формулой (8.93), а берега трещин поддерживаются при разных постоянных температурах T_0^+ и T_0^-, из соотношения (8.98) при $\gamma(t_1)=(T_0^+-T_0^-)/2$ и $\frac{d\theta(t_1)}{dt_1}=\tau(e^{-i\upsilon_1}r^2e^{i\upsilon_1}/t_1^2)/2$ получим

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II}}^{\pm}=-\frac{\beta_1\sqrt{r\sin\upsilon}}{1+\varkappa}e^{\pm i\frac{\upsilon}{2}}\left\{\frac{2(T_0^+-T_0^-)}{\pi}\times\right.$$

$$\times\cos\frac{\upsilon}{2}\left(\frac{\sin\frac{\upsilon}{2}\cos^2\frac{\upsilon}{2}}{1+\sin^2\upsilon}\pm ie^{\mp i\frac{\upsilon}{2}}\right)-\tau r\sin\frac{\upsilon}{2}\left\langle\frac{\sin\frac{\upsilon}{2}}{1+\sin^2\frac{\upsilon}{2}}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[e^{i\upsilon_1}-e^{-i\upsilon_1}\left(1+\sin^2\frac{\upsilon}{2}\cos^2\frac{\upsilon}{2}\right)\right]\pm ie^{\mp i\frac{\upsilon}{2}}\left(e^{-i\upsilon_1}\cos^2\frac{\upsilon}{2}-e^{i\upsilon_1}\right)\right\rangle\right\}.$$

Если на берегах дугообразной трещины задан тепловой поток (8.9), при использовании решения (8.25) из соотношений (8.96) и (8.97) найдем

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II}}^{\pm}=\frac{2\beta_1\cos\frac{\vartheta}{2}}{(1+\varkappa)\sqrt{\pi}}e^{\mp i\frac{\vartheta}{2}}\sqrt{\frac{r}{\sin\vartheta}}\int_L\left\{\tau(t_1)\frac{r(t_1)}{t_1}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{i\sin\frac{\vartheta}{2}}{1+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\left(\frac{r}{t_1}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\mp e^{\mp i\frac{\vartheta}{2}}\right]-$$

$$\left.-\mu(t_1)\left[\frac{i\sin\frac{\vartheta}{2}}{1+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\left(\frac{r^2}{t_1^2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\mp e^{\mp i\frac{\vartheta}{2}}\right]\right\}dt_1. \qquad (8.99)$$

Если трещина термоизолирована, а температура в сплошной плоскости определяется потенциалом (8.93), из решения (8.99) при $\mu(t_1)=0$ и $\tau(t_1)=-\tau t_1(e^{-i\vartheta_1}+r^2e^{i\vartheta_1}/t_1^2/2r$ получим

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II}}^{\pm}=\frac{\tau\beta_1 r\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{r\sin\vartheta}}{1+\varkappa}\left\{\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}e^{\mp i\frac{\vartheta}{2}}}{1+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\left[e^{-i\vartheta_1}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sin^4\frac{\vartheta}{2}\right)+e^{i\vartheta_1}\left(1-2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\pm ie^{\mp i\vartheta}\left(e^{-i\vartheta_1}\cos^2\frac{\vartheta}{2}+e^{i\vartheta_1}\right)\right\}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению периодических задач термоупругости в плоскости. Пусть бесконечная плоскость ослаблена системой циклически размещенных разрезов, причем в основном секторе периодов расположены N криволинейных разрезов L_k $(k=\overline{1,N})$, на берегах которых заданы силовая нагрузка (8.77) и одно из температурных условий (8.8)—(8.10). Будем считать, что термоупругое состояние в плоскости удовлетворяет условиям циклической симметрии, т. е. вся плоскость разбита на M секторов, каждый последующий сектор получается поворотом относительно точки $z=0$ предыдущего на угол $2\pi/M$ $(M=1,2,\ldots)$. Тогда комплексные потенциалы напряжений будут представлены

$$\Phi(z)=\frac{M}{2\pi}\int_L\frac{t_1^{M-1}}{t_1^M-z^M}G(t_1)\,dt_1+$$

$$+\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_{\mathrm{T}}(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}Q_k\ln\left(b_k^M-z^M\right),$$

$$\Psi(z)=\frac{M}{2\pi}\int_L\left\{\left[\overline{G(t_1)}-2iq(t_1)\right]\left(\frac{t_1z^{M-2}}{t_1^M-z^M}-\frac{\delta_{1M}}{z}\right)\overline{dt_1}-\right.$$

$$-\frac{z^M+(M-1)\,t_1^M}{(t_1^M-z^M)^2}\,t_1 z^{M-2} G(t_1)\,dt_1\Bigg\}+\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_т(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\bar b_k b_k^{M-1}}{b_k^M-z^M}\,.$$

Удовлетворяя граничным условиям (8.77) на берегах разрезов в основном секторе периодов, получаем сингулярное интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\frac{dg(t_1)}{dt_1}$, которое необходимо решить при условиях (8.87). В компактной форме это уравнение можно записать так:

$$\Phi(t_1')+\overline{\Phi(t_1')}+\frac{\overline{dt_1'}}{dt_1'}\left[t_1'\,\overline{\frac{d\Phi(t_1)}{dt_1}}+\overline{\Psi(t_1')}\right]=p(t_1')\qquad (t_1'\in L),\quad (8.100)$$

где $\Phi(t_1')$ и $\Psi(t_1')$ — прямые значения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, т. е. полученные непосредственной подстановкой $z=t_1'$ в выражениях $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Соотношение (8.100) позволяет записать сингулярное интегральное уравнение первой основной задачи термоупругости, если известны интегральные представления комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ через скачки напряжений и смещений. В частности, уравнение (8.85) также следует из равенства (8.100) при учете представления (8.83).

Пусть бесконечная плоскость ослаблена периодической системой разрезов, причем в основной полосе периодов d (вдоль оси x) имеются разрезы L_k ($k=\overline{1,N}$). Предположив, что на всех конгруэнтных разрезах действует одна и та же нагрузка, получим напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее условиям периодичности (напряжения — периодичные функции координаты x с периодом d). В этом случае выражения для комплексных потенциалов напряжений следующие:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2d}\int_L G(t_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-z)\,dt_1+$$

$$+\frac{\beta_1}{2\pi\lambda_т(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}Q_k\ln\sin\frac{\pi}{d}(z-b_k);$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2d}\int_L\Bigg\{[\overline{G(t_1)}-2iq(t_1)]\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-z)\,\overline{dt_1}-$$

$$-\left[\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(t_1-z)+\frac{\pi}{d}(\bar t_1-t_1+z)\,\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{d}(t_1-z)\right]G(t_1)\,dt_1\Bigg\}+$$

$$+\frac{\beta_1}{2d\lambda_т(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{N}Q_k(z-\bar b_k-b_k)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{d}(b_k-z).$$

Интегральное уравнение задачи получим из равенства (8.100). В частности, для периодической системы колинеарных трещин, когда в основной полосе периодов есть один разрез L, представляющий собой отрезок $-l\leqslant x\leqslant l$ оси x, имеем

$$\frac{1}{d}\int_{-l}^{l}[G(t_1)+iq(t_1)]\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(t_1-x)}{d}\,dt_1=p(x)\qquad(-l\leqslant x\leqslant l).$$

Решением этого уравнения при условии (8.90) будет функция

$$G(x) = -iq(x) + \frac{1}{d\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{d}}} \times$$

$$\times \left[\frac{C}{\cos\frac{\pi l}{d}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{d}} \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi t_1}{d}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi t_1}{d} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{d}} p(t_1)\, dt_1 \right].$$

Коэффициенты интенсивности напряжений найдем по формуле (8.88):

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d}{2}\sin^2\frac{\pi l}{d}}} \times$$

$$\times \left[\mp \cos\frac{\pi l}{d} - \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi l}{d} \pm \operatorname{tg}\frac{\pi t_1}{d}}{\operatorname{tg}\frac{\pi l}{d} \mp \operatorname{tg}\frac{\pi t_1}{d}}}\, p(t_1)\, dt_1 \right]. \quad (8.101)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда силовая нагрузка отсутствует. Пусть берега трещины поддерживаются при заданной температуре (8.8). Тогда при использовании решения (8.33) при $Q = 0$ найдем

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1}{(1+\varkappa)\sqrt{d\operatorname{tg}\frac{\pi l}{d}}} \int_{-l}^{l} \left[i\gamma(t_1) + \frac{d}{2\pi}\frac{d\theta(t_1)}{dt_1} H(t_1) \right] dt_1, \quad (8.102)$$

где

$$H(t_1) = \ln \left| \frac{\sec\frac{\pi l}{d} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi t_1}{d}}}{\sec\frac{\pi l}{d} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi l}{d} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi t_1}{d}}} \right|.$$

Если берега трещин поддерживаются при постоянной температуре T_0^{+}, а основное температурное поле в сплошной плоскости определяется функцией (8.93), из соотношения (8.102) получаем

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1}{(1+\varkappa)\sqrt{d\operatorname{tg}\frac{\pi l}{d}}} \left[il(T_0^{+} - T_0^{-}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau d^2}{\pi}\cos v_1 \ln\cos\frac{\pi l}{d} \right].$$

При заданном на берегах трещин тепловом потоке (8.9), когда решением задачи теплопроводности служит соотношение (8.34), из равенства

(8.101) найдем

$$K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1}{(1+\varkappa)\sqrt{d\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi l}{d}}} \int_{-l}^{l} \left[t_1\mu(t_1) - \frac{ld}{2\pi}\tau(t_1) H(t_1) \right] dt_1.$$

Для термоизолированной трещины, когда основное температурное поле определяется потенциалом (8.93), отсюда при $\mu(t_1) = 0$ и $\tau(t_1) = \tau\cos v_1$ будем иметь $K_{\mathrm{I}}^{\pm} = 0$, а

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta_1 \tau d^2}{\pi(1+\varkappa)\sqrt{d\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi l}{d}}} \ln\cos\frac{\pi l}{d}.$$

8.6. Определение температурных напряжений в многосвязной области

Пусть многосвязная область S, занятая телом, ограничена замкнутыми контурами L_k ($k = \overline{0, M}$) (см. рис. 8.3). Будем считать, что на границе области задано одно из температурных условий (8.35)—(8.37), а также известны напряжения

$$\sigma_n + i\tau_n = p^*(t_1) \quad \left(t_1 \in L = \bigcup L_k \quad k = \overline{0, M}\right). \tag{8.103}$$

При этом соотношения

$$\int_L p^*(t_1)\,dt_1 = 0, \quad \mathrm{Re}\int_L \bar{t}_1 p^*(t_1)\,dt_1 = 0 \tag{8.104}$$

выражают равенство нулю главных вектора и момента внешних усилий, действующих на контуре L. Комплексные потенциалы напряжений $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ в области S можно представить в виде

$$\Phi^*(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{X_k + iY_k}{z - z_k} - \frac{\beta_1 Q_k}{\lambda_{\mathrm{T}}} \ln(z - z_k) \right] + \Phi(z),$$

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{\varkappa(X_k - iY_k)}{z - z_k} - \frac{iM_k(1+\varkappa)}{(z - z_k)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_1 t_1 Q_k \bar{z}_k}{\lambda_{\mathrm{T}}(z - z_k)} \right] - \Psi(z), \tag{8.105}$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — голоморфные в области S функции; X_k и Y_k — проекции главного вектора усилий, действующих на контуре L_k ($k = \overline{1, M}$); M_k — главный вектор внешних усилий, действующих на контуре L_k ($k = \overline{1, M}$).

Дополним область S до всей плоскости, считая при этом, что при переходе через контур L напряжения, соответствующие потенциалам $\Phi(z)$,

$\Psi(z)$ и $f(z)$, непрерывны, а вектор смещений получает скачок $g(t_1)$. При использовании соотношений (8.73) приведем сформулированную задачу к задачам сопряжения (8.80) и (8.82), т. е. ее решение дается соотношениями (8.83) при $q(t_1) = 0$ и $Q_k = 0$, где функция $G(t_1)$ определяется формулой (8.84) (в данном случае a_k — произвольная точка на контуре L ; $\gamma(t_1) = 0$ при заданной на границе L температуре (8.25); $\mu(t_1) = 0$ при выполнении на L граничных условий (8.36) или (8.37)).

Положим

$$\mathrm{M}_k = -2\,\mathrm{Im}\int\limits_{L_k} \bar{t}_1 g'(t_1)\,dt_1 \quad (k = \overline{1, M}). \tag{8.106}$$

Тогда, удовлетворив с помощью соотношений (8.83), (8.105) и (8.106) граничное условие (8.103), придем к сингулярному интегральному уравнению первой основной задачи термоупругости

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\left\{\left[\frac{2}{t_1 - t_1'} + k_1(t_1, t_1')\right]G(t_1)\,dt_1 - k_2(t_1, t_1')\,\overline{G(t_1)}\,d\bar{t}_1\right\} - \tag{8.107}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{M}\frac{\mathrm{M}_k}{(\bar{t}_1' - \bar{z}_k)^2}\frac{d\bar{t}_1'}{dt_1'} + h_n\frac{ds'}{dt_1'} = p(t_1') \quad (t_1' \in L),$$

где ядра $k_1(t_1, t_1')$ и $k_2(t_1, t_1')$ определяются по формулам (8.86), а

$$p(t_1) = p^*(t_1) + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{M}\left\{2\,\mathrm{Re}\frac{X_k + iY_k}{t_1 - z_k} - \frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{t_1(X_k - iY_k)}{(\bar{t}_1 - z_k)^2} + \frac{\varkappa(X_k + iY_k)}{\bar{t}_1 - \bar{z}_k}\right] - \frac{\beta_1 Q_k}{\lambda_T}\times$$
$$\left.\times\left(2\ln|t_1 - z_k| + \frac{t_1 - z_k}{\bar{t}_1 - \bar{z}_k}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\right)\right\}. \tag{8.108}$$

Здесь принято, что точка $z_0 = 0$ принадлежит области S.

К левой части уравнения (8.107) прибавим функционалы

$$M_0 = -2\,\mathrm{Im}\int\limits_{L} g'(t_1)\frac{dt_1}{t_1}, \quad h_n = \int\limits_{L_n} g'(t_1)\,dt_1 \quad (n = \overline{0, M}), \tag{8.109}$$

которые равны нулю при выполнении условий равновесия (8.104). Уравнение (8.107) с прибавленными функционалами (8.109) имеет единственное решение в классе функций $g'(t_1) \in H$ при любой правой части.

Если область S, ограниченная контуром L_0, представляет собой нижнюю полуплоскость ($y \leqslant 0$), уравнение (8.107) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G_0(t_1)\,dt_1}{t_1 - x} = \pi p_0(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

его решение будет

$$G_0(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t_1)\,dt_1}{t_1 - x}.$$

Подставив это значение $G_0(x)$ в потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ (8.83), найдем их значение:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t_1)\,dt_1}{t_1 - z};$$

$$\Psi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\overline{p_0(t_1)}}{t_1 - z} - \frac{t_1 p_0(t_1)}{(t_1 - z)^2} \right] dt_1. \qquad (8.110)$$

Пусть область S представляет собой круг радиуса r с центром в точке $z = 0$. Тогда интегральное уравнение (8.107) имеет вид

$$\int_{L_0} \left[\left(\frac{p}{t_1 - t_1'} + \frac{1}{2t_1'} \right) G_0(t_1)\,dt_1 + \frac{1}{2\bar{t}_1'} \overline{G_0(t_1)}\,d\bar{t}_1 \right] = \pi p_0(t_1') \quad (t_1' \in L).$$

Его решение будет $G_0(t_1') = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{L_0} \frac{p_0(t_1)\,dt_1}{t_1 - t_1'} + iA$, где $2\pi(A - \bar{A}) =$
$= -i \int\limits_{L_0} p_0(t_1) \frac{dt_1}{t_1}$.

Мнимая часть постоянной A, влияющая только на жесткое вращение тела. как целого, остается неопределенной. Положив $\operatorname{Im} A = 0$, для потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ будем иметь выражения

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \left(\frac{1}{t_1 - z} - \frac{1}{2t_1} \right) p_0(t_1)\,dt_1;$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i z} \int_{L_0} \left(\frac{1}{t_1 - z} + \frac{1}{2z} \right) t_1 \overline{p_0(t_1)}\,d\bar{t}_1 + \frac{r^2}{z^2} \Phi_0(z) - \frac{r^2}{z} \Phi_0'(z) \qquad (8.111)$$

Для бесконечной плоскости с круговым отверстием радиуса r с центром в точке $z = 0$ будем иметь уравнение (при $z = 0$ и $Q = 0$)

$$\int_{L_0} \left(\frac{1}{t_1 - t_1'} + \frac{1}{2t_1'} + \frac{1}{2t_1} \right) G_0(t_1)\,dt_1 = p_0(t_1') \quad (\bar{t}_1' \in L_0),$$

решение которого дается соотношением

$$G_0(t_1') = -\frac{1}{\pi} \int_{L} \left(\frac{1}{t_1 - t_1'} - \frac{1}{4t_1} \right) p_0(t_1)\,dt_1 - \frac{i\beta_1\delta}{(1 + \varkappa)\,t_1'}, \qquad (8.112)$$

где $\delta = \int\limits_{L} t_1 \mu(t_1)\,ds = i \int\limits_{L} t_1 \theta_0'(t_1)\,dt_1$ при выполнении на L_0 граничного

условия (8.35) и

$$\delta = i\int\limits_{L_0} \gamma(t_1)\,dt_1, \tag{8.113}$$

если на L_0 задано условие (8.36) или (8.37). При известном на контуре L_0 тепловом потоке $\tau_0(t_1)$ из соотношений (8.57) и (8.113) найдем $\delta = ir\int\limits_{L_0}\tau_0(t_1)\,dt_1$. Подставив решение (8.112) в соотношения (8.83) и (8.105), получим:

$$\Phi_0^*(z) = \frac{\varkappa(X+iY)-2\beta_1\delta}{2\pi(1+\varkappa)z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{p_0^*(t_1)\,dt_1}{t_1-z},$$

$$\Psi_0^*(z) = -\frac{X-iY+2\beta_1\delta}{2\pi(1+\varkappa)z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{p_0^*(t_1)}\,\overline{dt_1}}{t_1-z} +$$

$$+\frac{r^2}{z^2}\Phi_0^*(z) - \frac{R^2}{z}\Phi_0^{*\prime}(z). \tag{8.114}$$

8.7. Решение задач термоупругости для областей с отверстиями и трещинами

Пусть тело занимает многосвязную область S, ослабленную отверстиями и разрезами (см. рис. 8 4). Граница области L состоит из совокупности замкнутых (L') и разомкнутых (L'') контуров. Будем считать, что на контуре L выполняется одно из рассмотренных выше температурных условий, а также известны напряжения

$$\begin{aligned} &\sigma_n + i\tau_n = p^*(t_1) \quad (t_1 \in L'),\\ &\sigma_n^\pm + i\tau_n^\pm = p^*(t_1) \pm q(t_1) \quad (t_1 \in L''), \end{aligned} \tag{8.115}$$

причем соотношения $\int\limits_{L'} p^*(t_1)\,dt_1 + 2\int\limits_{L''} q(t_1)\,dt_1 = 0$ и $\mathrm{Re}\left[\int\limits_{L'} \bar t_1 p^* \times\right.$ $\left.\times(t_1)\,dt_1 + 2\int\limits_{L''} \bar t_1 q(t_1)\,dt_1\right] = 0$ выражают равенство нулю главных вектора и момента внешних усилий, действующих на контуре L. Предположим также, что количество тепла Q_k, которое выходит через каждый разрез L_k $(k=\overline{M+1,N})$, равно нулю. Последнее условие позволяет использовать в дальнейшем аналогию с силовой задачей.

Комплексные потенциалы напряжений $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ представим в виде (8.105), где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ даются соотношениями (8.83) при $q=0$, $t_1 \in L'$ и $Q_k = 0$ $(k=\overline{1,N})$, а величины M_k определяются равенствами (8.106). Удовлетворяя с их помощью граничные условия (8.115), приходим к сингулярному интегральному уравнению первой основной задачи термоупругости

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \left\{\left[\frac{2}{t_1-t_1'} + k_1(t_1,t_1')\right]G(t_1) + k_2(t_1,t_1')\,\overline{G(t_1)}\,\overline{dt_1}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{M}\frac{\Delta_{kn}M_k}{(\bar{t}_1'-\bar{z}_k)^2}\frac{d\bar{t}_1'}{dt_1'}+\delta_n h_n\frac{ds'}{dt_1'}=p(t_1'')$$

$$(t_1''\in L,\quad n=\overline{0,N}). \qquad (8.116)$$

Здесь ядра $k_1(t_1, t_1')$, $k_2(t_1, t_1')$ и функция $p(t_1'')$ определяются по формулам (8.86) и (8.108), h_n — формулой (8.109), $\delta_n=1$ при $n=\overline{0,N}$ и $\delta_n=0$ при $n=\overline{N+1,N}$, $\Delta_{kn}=1+(\delta_n-1)\,\delta_{k0}$.

К левой части уравнения (8.116) прибавлены равные нулю функционалы (8.109), что вместе с условиями (8.87) (при $k=\overline{M+1,N}$) обеспечивает существование единственного решения $g'(t_1)\in H$ $(t_1\in L')$, $g'(t_1)\in H^*$ $(t_1\in L'')$ при любой правой части.

Интегральные представления комплексных потенциалов и интегральные уравнения задач теплопроводности и термоупругости остаются справедливыми и для бесконечной плоскости, ослабленной отверстиями и разрезами, когда контур L_0 отсутствует. При этом, очевидно, в уравнении (8.116) следует положить $M_0=0$, а также принять условие $Q_1+Q_2+\ldots+Q_n=0$, обеспечивающее ограниченность на бесконечности температурных напряжений.

Аналогично могут быть рассмотрены вторая основная задача термоупругости при заданных на границе L смещениях, а также смешанная задача, когда на одних контурах заданы напряжения, а на других смещения.

При решении задачи для системы N разрезов L_k $(L=\bigcup L_k,\ k=\overline{1,N})$ в полуплоскости $(y\leqslant 0)$ в уравнении (8.116) неизвестную функцию $g_0'(t_1)$ на краю полуплоскости L_0 можно исключить. Тогда представление для комплексных потенциалов следующее:

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)+\Phi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int_L\left[\frac{G(t_1)+2iq(t_1)}{(z-\bar{t}_1)}dt_1+\frac{t_1-\bar{t}_1}{(\bar{t}_1-z)^2}\overline{G(t_1)dt_1}\right],$$

$$\Psi_1(z)=\Psi(z)+\Psi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{\frac{G(t_1)+2iq(t_1)}{(\bar{t}_1-z)}\bar{t}_1dt_1+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(\bar{t}_1-t_1)(\bar{t}_1+z)}{(\bar{t}_1-z)^3}-\frac{1}{\bar{t}_1-z}\right]\overline{G(t_1)\,dt_1}\right\},$$

где функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\Phi_0(z)$, $\Psi(z)$ даются соотношениями (8.83) (при $Q_k=0$) и (8.110).

Аналогично находятся комплексные потенциалы напряжений для кругового диска $|z|\leqslant r$ с трещинами

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)+\Phi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{\left[\frac{G(t_1)+2iq(t_1)}{z\bar{t}_1-r^2}\bar{t}_1+iq(t_1)\frac{\bar{t}_1}{r^2}\right]dt_1+\right.$$

$$\left.+\frac{z(t_1\bar{t}_1-r^2)(z\bar{t}_1-2r^2)}{r^2(z\bar{t}_1-r^2)^2}\overline{G(t_1)}\,\overline{dt_1}\right\},$$

$$\Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \Psi_0(z) + \frac{1}{2\pi}\int_L \left\{ G(t_1) + 2iq(t_1)\frac{\bar{t}_1^3 dt_1}{(z\bar{t}_1 - r^2)^3} + \right.$$

$$\left. + \overline{G(t_1)}\left[1 + \frac{(z\bar{t}_1 - 3r^2)(t_1\bar{t}_1 - r^2)}{(z\bar{t}_1 - r^2)^2}\right]\frac{\bar{t}_1 \overline{dt_1}}{z\bar{t}_1 - r^2}\right\},$$

где потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\Phi_0(z)$, $\Psi(z)$ определяются по формулам (8.83) (при $Q_k = 0$) и (8.111).

С помощью функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ сингулярное интегральное уравнение первой основной задачи термоупругости запишется в виде (8.100). Отсюда следует, что также, как и для бесконечной плоскости, комплексные потенциалы и интегральные уравнения первой основной задачи термоупругости для полуплоскости и кругового диска с разрезами совпадают (при $Q=0$) с соответствующими соотношениями для силовых задач, если в последних к искомой функции $g'(t_1)$ прибавить известные из решения задачи теплопроводности функции.

Комплексные потенциалы для бесконечной плоскости с круговым отверстием и разрезами будем искать в виде

$$\Phi_1^*(z) = \Phi_0^*(z) + \Phi(z) + \Phi_1(z); \qquad \Psi_1^*(z) = \Psi_0^*(z) + \Psi(z) + \Psi_1(z),$$

где $\Phi_0^*(z)$ и $\Psi_0^*(z)$ — функции (8.114), которые определяют напряженное состояние в пластине с отверстием без трещин при действии силовой нагрузки и температурного поля; $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — потенциалы (8.83) (при $Q_k = 0$) для заданных на разрезах скачках температуры, теплового потока, перемещений и напряжений в бесконечной плоскости без отверстия.

При использовании решения (8.114) методом суперпозиций аналогично, как это сделано при решении силовой задачи, для функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ найдем выражения:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{G(t_1) + 2iq(t_1)}{z(z\bar{t}_1 - r^2)} r^2 dt_1 + \frac{r^2 - t_1\bar{t}_1}{\bar{t}_1(r^2 - z\bar{t}_1)^2}\overline{G(t_1)}\,\overline{dt_1}\right] \pm$$

$$\pm \frac{\beta_1 r^2}{\pi(1+\varkappa) z}\int_L \left[\gamma(t_1)\frac{\overline{dt_1}}{\bar{t}_1^2} - i\mu(t_1)\frac{ds}{\bar{t}_1}\right],$$

$$\Psi_1(z) = \frac{r^4}{2\pi z^2}\int_L \left\{\left[\frac{z}{(z\bar{t}_1 - r^2) r^2} + \frac{(r^2 - t_1\bar{t}_1)(r^2 - 3z\bar{t}_1)}{\bar{t}_1(r^2 - z\bar{t}_1)}\right]\overline{G(t_1)}\,\overline{dt_1} + \right.$$

$$\left. + \left\{[G(t_1) + 2iq(t_1)]\frac{3z\bar{t}_1 - 2r^2}{z(z\bar{t}_1 - r^2)^2} - \frac{G(t_1)}{r^2 t_1}\right\} dt_1\right\} \pm$$

$$\pm \frac{\beta_1 r^2}{\pi(1+\varkappa) z}\int_L \left[\gamma(t_1)\left(\frac{dt_1}{t_1^2} + \frac{2r^2}{z^2}\frac{\overline{dt_1}}{\bar{t}_1^2}\right) + i\mu(t_1)\left(\frac{1}{t_1} - \frac{2r}{z^2\bar{t}_1}\right) ds\right],$$

где верхние (нижние) знаки соответствуют случаю, когда на границе отверстия задана температура (тепловой поток).

Данная структура комплексных потенциалов напряжений и интегральных уравнений (8.100) задачи термоупругости отличается от потенциалов и уравнений для соответствующей силовой задачи.

8.8. Численное решение сингулярных интегральных уравнений плоских задач термоупругости

Полученные выше интегральные уравнения задач теплопроводности и термоупругости для граничных температурных условий первого или второго рода могут быть приведены для бесконечной плоскости с одним криволинейным разрезом к виду

$$\int_{-1}^{1} [K(\xi, \eta)\varphi(\xi) + L(\xi, \eta)\overline{\varphi(\xi)}]\, d\xi = f(\eta) \qquad (-1 < \eta < 1), \qquad (8.117)$$

где искомая функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi = B. \qquad (8.118)$$

Здесь $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$ — сингулярное (с ядром Коши) и регулярное ядра $(\eta) \in H$.

Если занятая телом область S ограничена одним замкнутым контуром, придем к уравнению

$$\int_{0}^{2\pi} [M(\tau, \theta)\psi(\tau) + N(\tau, \theta)\overline{\psi(\tau)}]\, d\tau = \sigma(\theta) \quad (0 < \theta < 2\pi), \qquad (8.119)$$

где ядра $M(\tau, \theta)$ и $N(\tau, \theta)$ — 2π-периодические сингулярные (с ядром Гильберта) и регулярные функции; $\sigma(\theta) \in H$. В общем случае многосвязной области с отверстиями и разрезами указанные задачи приводятся к системе интегральных уравнений вида (8.117) и (8.119).

Решение уравнения (8. 117) будем искать в классе функций, неограниченных при $\xi = \pm 1$, т. е.

$$\varphi(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad (8.120)$$

где $u(\xi)$ — непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$, а уравнения (8.119) — в классе 2π-периодических непрерывных функций.

Известны различные численные методы решения сингулярных интегральных уравнений вида (8.117) и (8.119). Воспользуемся методом механических квадратур, который применим с помощью квадратурных формул

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} K(\xi, \eta)\, d\xi \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k) K(\xi_k, \eta), \qquad (8.121)$$

$$\int_{0}^{2\pi} \psi(\tau) M(\tau, \theta)\, d\tau \approx \frac{2\pi}{m} \sum_{\upsilon=1}^{m} \psi(\tau_\upsilon) M(\tau_\upsilon, \theta) \qquad (8.122)$$

$\left(\text{где } \xi_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi;\ \tau_\upsilon = \frac{2\pi\upsilon}{m} + c;\ m\text{ — четное, а } n\text{ — произволь-}\right.$

$\left.\text{ное натуральное число; } c\text{ — произвольное действительное число}\right)$, верных для регулярных функций $K(\xi, \eta)$ и $M(\tau, \theta)$ при любых η и θ, а для сингулярных ядер $K(\xi, \eta)$ и $M(\tau, \theta)$ при

$$\eta = \eta_p = \cos\frac{\pi p}{n}\quad (p = \overline{1, n-1});\qquad \theta = \theta_s = \frac{2s-1}{m}\pi + \delta\quad (s = \overline{1, m}).$$

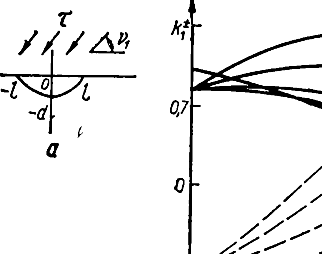


Рис. 8.6. Схема бесконечной пластины, ослабленной параболическим разрезом (*а*) и зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений k_1 от угла υ_1 при постоянной температуре берегов трещины (*б*).

Интегральное уравнение (8.117) и условие (8.128) приводятся с учетом формул (8.120) и (8.121) к системе n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[K(\xi_k, \eta_p)\, u(\xi_k) + L(\xi_k, \eta_p)\,\overline{u(\xi_k)}\right] = f(\eta_p) \quad (p = \overline{1, n-1}), \\ \dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u(\xi_k) = B \end{cases} \tag{8.123}$$

для определения n неизвестных $u(\xi_k)$ $(k = \overline{1, N})$.

Из уравнения (8.119) с помощью формулы (8.122) получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{2}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m}\left[M(\tau_\upsilon, \theta_s)\,\psi(\tau_\upsilon) + N(\tau_\upsilon, \theta_s)\,\overline{\psi(\tau_\upsilon)}\right] = \sigma(\theta_s) \quad (s = \overline{1, m}),$$

из которой найдем m неизвестных $\psi(\tau_\upsilon)$ $(\upsilon = \overline{1, m})$.

Квадратурные формулы (8.121) и (8.122), имеющие высокую алгебраическую степень точности, удобны при численном решении сингулярных интегральных уравнений первого рода, поскольку при этом не надо в явном виде выделять сингулярные ядра Коши или Гильберта.

В качестве примера получим численное решение интегральных уравнений (8.15), (8.19) и (8.85) для бесконечной пластины, ослабленной параболическим разрезом L, проходящим через точку (0, —d) (вершину парабо-

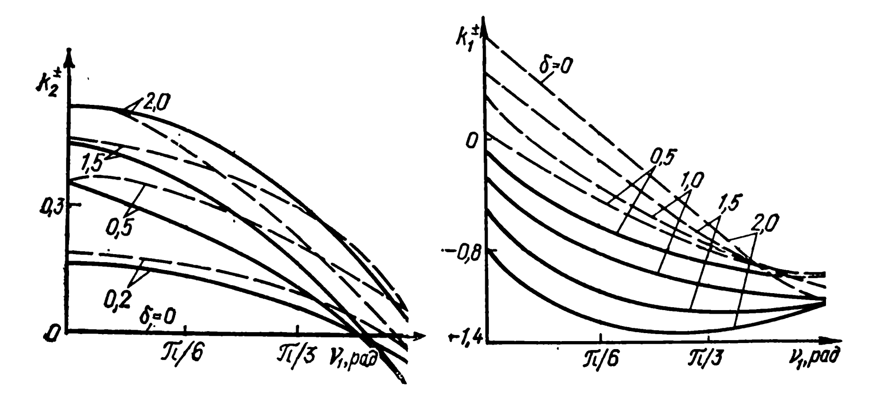


Рис. 8.7. Зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений k_2 от угла υ_1 при постоянной температуре берегов трещины.

Рис. 8.8. Зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений k_1 от угла υ_1 для термоизолированной трещины.

лы) и оканчивающимся в точках ($\pm l$, 0) (схема на рис. 8.6). Будем считать, что внешняя нагрузка отсутствует, а пластина с трещиной находится под действием температурного поля: на бесконечности задан однородный тепловой поток τ, направленный под углом υ_1 к оси x, а берега трещины поддерживаются при постоянной температуре (причем $Q = 0$) (задача I) или трещина термоизолирована (задача II).

С помощью замены переменных

$$t_1 = \omega(\xi) = l\,[\xi + i\delta(\xi^2 - 1)]$$
$$(\delta = 1/d, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1,$$
$$t_1' = \omega(\eta))$$

уравнения (8.15), (8.19) и (8.85) приводятся к виду (8.47). Обозначив

$$\varphi(\xi) = \frac{dg\,[\omega(\xi)]}{d\xi}\;\frac{d\omega(\xi)}{d\xi},$$

из формулы (8.88) найдем

Рис. 8.9. Зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений k_2 от угла υ_1 для термоизолированной трещины.

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp\sqrt{\pi\,|\,\omega'(\pm 1)\,|}\;\frac{u(\pm 1)}{\omega'(\pm 1)}, \qquad (8.124)$$

где $u(1) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(\xi_k)\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi;$

$$u(-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}u(\xi_k)\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi; \quad \omega'(\pm 1) = \left.\frac{d\omega(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\pm 1}.$$

На рис. 8.6 и 8.7 (задача I) и рис. 8.8 и 8.9 (задача II) приведены зависимости относительных коэффициентов интенсивности напряжений $k_{\mathrm{I}}^{\pm} = K_{\mathrm{I}}^{\pm}(1+\varkappa)/\tau\beta_1 l\sqrt{l}$ (рис 8.6 и 8.8) и $k_2^{\pm} = K_{\mathrm{II}}^{\pm}(1+\varkappa)/\tau\beta_1 l\sqrt{l}$, полученных из формулы (8.124) на основе решения системы (8.123), от угла ϑ_1 для различных значений параметра δ. Сплошные кривые соответствуют правой ветви трещины (K_{I}^{+}), а штриховые — левой (K_{I}^{-}). При $\delta = 0$ получаем решение для прямолинейной трещины.

Как следует из графиков на рис. 8.8 и 8.9, а также из построенных выше аналитических решений задач термоупругости, при действии в теле с трещинами температурного поля во многих случаях берега трещины контактируют. Поэтому для корректного решения задачи необходимо рассматривать контактную задачу для областей с разрезами. Однако полученные значения коэффициентов интенсивности напряжений при контакте берегов трещины все же могут быть использованы для решения задач при совместном действии силовой нагрузки и температурного поля, при котором берега трещин не соприкасаются.

В случае теплопроницаемой трещины интегральное уравнение подобно уравнению (8.117), однако для задачи теплопроводности получается интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля. Численное решение последнего также можно найти методом механических квадратур.

8.9. Термостатическая задача для многогранника с плоскими трещинами

Произвольное выпуклое тело можно представить сколь угодно точно в виде многогранника. Поэтому в настоящем параграфе предполагается метод определения функции распределения температуры T в многограннике с плоскими трещинами.

Постановка задачи. Рассматривается многогранник (см. рис. 5.12), ограниченный e плоскими гранями S_l и ослабленный системой n плоских термоизолированных трещин конфигурации ω_k ($k = 1, 2, \ldots, s$). При этом считается, что на гранях многогранника S_l задано одно из следующих смешанных температурных условий:

1)
$$\left.\frac{\partial T}{\partial z_l^{(1)}}\right|_{z_l^{(1)}=0} = \gamma_l^{(1)}(x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \quad ((x_l^{(1)}, y_l^{(l)}) \in \Delta^{(l)}), \tag{8.125}$$

$$T\big|_{z_l^{(1)}=0} - T_l^{(0)}(x_l^{(1)}, y_l^{(l)}) \quad ((x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \in \overline{\Delta}^{(l)});$$

2)
$$\left[\frac{\partial T}{\partial z_l^{(1)}} + \lambda_1 T\right]_{z_l^{(1)}=0} = \gamma_l^{(2)}(x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \quad ((x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \in \Delta^{(l)}), \tag{8.126}$$

$$T\big|_{z_l^{(1)}=0} = T_l^{(0)}(x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \quad ((x_l^{(1)}, y_l^{(1)}) \in \overline{\Delta}^{(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, e).$$

Здесь T — функция распределения температуры в многограннике; $O_i^{(1)}x_i^{(1)}y_i^{(1)}z_i^{(1)}$ — прямоугольные системы декартовых координат с направляющими единичными векторами $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}$ и плоскостями $z_i^{(1)} = 0$, совпадающими с гранями многогранника S_i; $\overline{\Delta}^{(i)}$ — многосвязная область вне области $\Delta^{(i)}$ $(\Delta^{(i)} + \overline{\Delta}^{(i)} = S_i)$.

Задача состоит в определении функции T распределения температуры в многограннике. Для этого представим функцию T распределения температуры в многограннике как сумму

$$T = \sum_{i=1}^{e} T_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{s} T_k^{(2)}. \tag{8.127}$$

Здесь $T_i^{(1)}$ — распределение температуры в полупространстве W_i, поверхность которого совпадает с плоскостью грани многогранника S_i; $T_k^{(2)}$ — распределение температуры в пространстве V_k, ослабленном трещиной конфигурации ω_k, на поверхностях которой заданы тепловые потоки, равные и направленные в одну сторону:

$$\left.\frac{\partial T_k^{(2)}}{\partial z_k^{(2)}}\right|_{z_k^{(2)}=0} = D_k\,(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \quad ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \omega_k). \tag{8.128}$$

где $O_k^{(2)}x_k^{(2)}y_k^{(2)}z_k^{(2)}$ — прямоугольная система декартовых координат с направляющими единичными векторами $\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \beta_3^{(k)}$ и плоскостью $z_k^{(2)} = 0$, совпадающей с плоскостью трещины ω_k.

Граничные условия для каждого такого полупространства W_i и пространства V_k выбираются из тех соображений, чтобы удовлетворялись граничные условия для суммарного температурного поля, т. е. граничные условия (8.125) и (8.126) и равенство нулю тепловых потоков на поверхностях трещин. На основании этого граничные условия для полупространства W_i (1) и пространства V_k (2) с трещиной конфигурации ω_k запишутся так:

1) $$\left.\frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial z_i^{(1)}}\right|_{z_i^{(1)}=0} = B_i^{(1)}\,(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \quad ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in \Delta^{(i)}),$$

$$T_i^{(1)}\big|_{z_i^{(1)}=0} = B_i^{(2)}\,(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \quad ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in \overline{\Delta}^{(i)}); \tag{8.129}$$

2) $$\left[\frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial z_i^{(1)}} + \lambda_1 T_i^{(1)}\right]_{z_i^{(1)}=0} = C_i^{(1)}\,(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \quad ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in \Delta^{(i)}), \tag{8.130}$$

$$T_i^{(1)}\big|_{z_i^{(1)}=0} = C_i^{(2)}\,(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \quad ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in \overline{\Delta}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, e),$$

$$\left.\frac{\partial T_k^{(2)}}{\partial z_k^{(2)}}\right|_{z_k^{(2)}=0} = D_k\,(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \quad ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s). \tag{8.131}$$

Здесь считается, что многосвязные области $\Delta^{(i)}$ и $\overline{\Delta}^{(i)}$ в сумме состав-

ляют всю плоскость $z_i^{(1)} = 0$;

$$B_i^{(1)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) = \gamma_i^{(1)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) - \sum_{j=1(\neq i)}^{e} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial z_i^{(1)}}\Bigg|_{Q_j^{(i)}} - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T_k^{(2)}}{\partial z_i^{(1)}}\Bigg|_{z_i^{(1)}=0};$$

$$B_i^{(2)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) =$$

$$= \begin{cases} T_i^{(0)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) - \sum\limits_{j=1(\neq i)}^{e} T_j^{(1)}\big|_{Q_j^{(i)}} - \sum\limits_{k=1}^{s} T_k^{(2)}\big|_{z_i^{(1)}=0} & ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in S_i), \\ \sum\limits_{j=1(\neq i)}^{e} T_j^{(1)}\big|_{Q_j^{(1)}} - \sum\limits_{k=1}^{s} T_k^{(2)}\big|_{z_i^{(1)}=0} & ((x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \bar{\in} S_i); \end{cases} \tag{8.132}$$

$$C_i^{(1)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) = \gamma_i^{(2)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) - \sum_{j=1(\neq i)}^{e} \left(\frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial z_i^{(1)}} + \lambda_1 T_j^{(1)}\right)_{Q_j^{(i)}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial T_k^{(2)}}{\partial z_i^{(1)}} + \lambda_1 T_k^{(2)}\right)_{z_i^{(1)}=0};$$

$$C_i^{(2)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) = B_i^{(2)}(x_i^{(1)}, y_i^{(1)});$$

$$D_k(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = -\left[\sum_{i=0}^{e} \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial z_k^{(2)}} + \sum_{j=1(\neq k)}^{s} \frac{\partial T_j^{(2)}}{\partial z_k^{(2)}}\right]_{z_k^{(2)}=0};$$

$Q_j^{(i)}$ — сечение полупространства W_j плоскостью $z_i^{(1)} = 0$.

Таким образом, задача свелась к термостатическим задачам для полупространства W_i и пространства V_k с трещиной ω_k при граничных условиях соответственно (8.119), (8.120) и (8.121).

Стационарная задача теплопроводности для полупространства с граничными условиями смешанного типа. Рассмотрим термостатическую задачу для полупространства W_k, на границе которого $z_k^{(1)} = 0$ задано одно из граничных условий (8.119), (8.120). Для решения задачи при граничных условиях (8.119) представим искомую температуру $T_i^{(1)}$ в виде интегрального разложения

$$T_k^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-z_k^{(1)}\sqrt{\xi^2+\eta^2} + i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)\right] A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{8.133}$$

где $A^{(k)}(\xi, \eta)$ — искомая функция.

Подставляя выражение (8.133) в (8.129), для определения неизвест-

ной функции $A^{(k)}(\xi, \eta)$ получаем интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right] A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = B_k^{(2)}\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \quad \left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \bar{\Delta}^{(k)},\right.$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = -B_k^{(1)}\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \tag{8.134}$$

$$\left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \Delta^{(k)}\right),$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \left(x_k^{(1)}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \left(y_k^{(1)}\right)^2}$.

Пусть область $\Delta^{(k)}$ состоит из совокупности областей $\Delta_1^{(k)}, \ldots, \Delta_\tau^{(k)}$ $\left(\Delta^{(k)} = \sum_{n=1}^{\tau} \Delta_n^{(k)}\right)$, внешними, контурами которых будут окружности кругов $S^{(k)}, \ldots, S_\tau^{(k)}$.

Положим, что в каждой области $\Delta_n^{(k)}$ выполняются условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right] A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = f_n\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \quad \left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \Delta_n^{(k)}\right),$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \gamma_n\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right)$$

$$\left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \Delta_n^{(k)}\right),$$

где $f_n\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right)$ — неизвестная функция; $\gamma_n\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) = -B_1\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right)$ при $\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \Delta_n^{(k)}$. Тогда интегральные уравнения (8.134) сведутся к такой системе интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right] A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \theta_n^{(1)}\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right)$$

$$\left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \bar{\Delta}_n^{(k)}\right), \tag{8.135}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} A^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \gamma_n\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right)$$

$$\left(\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}\right) \in \Delta_n^{(k)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tau\right),$$

где $\bar{\Delta}_n^{(k)}$ — область вне $\Delta_n^{(k)}$;

$$\theta_n^{(1)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \begin{cases} f_l(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) & ((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \Delta_l^{(k)}), \\ B_2(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) & ((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \bar{\Delta}_l^{(k)}); \quad n \neq l, \; l = 1, 2, \ldots, \tau). \end{cases}$$

Будем считать, что в каждой области $\Delta_n^{(k)}$ имеется число N_n внутренних контуров (окружностей), которые ограничивают области $S_{j,n}^{(k)}$ ($j = 1, 2, \ldots, N_n$). Представим теперь искомую функцию $A^{(k)}(\xi, \eta)$ в виде суммы

$$A^{(k)}(\xi, \eta) = A_n^{(k)}(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^{N_n} A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta), \tag{8.136}$$

где неизвестные функции $A_n^{(k)}(\xi, \eta)$ и $A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)] A_n^{(k)}(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta = \beta_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in S_n^{(k)}),$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)] A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta = \beta_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \bar{S}_{n,j}^{(k)}). \tag{8.137}$$

Здесь $\bar{S}_{n,j}^{(k)}$ — область вне $S_{n,j}^{(k)}$, а функции $\beta_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ и $\beta_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ выбираются так, чтобы они были интегрируемые в своих областях изменения и удовлетворяли равенству

$$\beta_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \sum_{j=1}^{N_k} \beta_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \gamma_n(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \quad ((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \Delta_n^{(k)}).$$

Доопределим функции $A_n^{(k)}(\xi, \eta)$ и $A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)$ следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)] A_n^{(k)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in S_n^{(k)}),$$
$$\tag{8.138}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)] A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \bar{S}_{n,j}^{(k)}),$$

где неизвестные функции $\varphi_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ и $\varphi_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_k^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = f_n(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \quad ((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \Delta_n^{(k)}).$$

Тогда на основании соотношений (8.136)—(8.138) система интегральных уравнений (8.135) сведется к системе двухмерных дуальных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)]\, A_n^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \alpha_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \bar{S}_n^{(k)}),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)]\, A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \alpha_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in S_{n,j}^{(k)}), \tag{8.139}$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, A_n^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \beta_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$((x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in S_n^{(k)}),$$
$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, A_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \beta_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$
$$(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \in \bar{S}_{n,j}^{(k)}, \tag{8.140}$$

где $n = 1, 2, \ldots, \tau$; $j = 1, 2, \ldots, N_n$;

$$\alpha_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \theta_n^{(1)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) - \sum_{i=1}^{N_n} \varphi_{i,n}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}); \qquad \alpha_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) =$$

$$= \theta_n^{(1)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) - \varphi_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) - \sum_{i=1(\neq j)}^{N_n} \varphi_{n,i}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}).$$

На основании равенств (8.138), (8.139) и обратного преобразования Фурье получим

$$4\pi^2 A_n^{(k)}(\xi, \eta) = \iint_{S_n^{(k)}} \exp[-i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)]\, \varphi_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})\, dx_k^{(1)} dy_k^{(1)} +$$
$$+ \iint_{\bar{S}_n^{(k)}} \exp[-i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)]\, \alpha_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})\, dx_k^{(1)} dy_k^{(1)}, \tag{8.141}$$

$$4\pi^2 A_{n,j}^{(k)}(\xi,\eta)=\iint\limits_{\bar S_{n,j}^{(k)}}\exp\left[-i\left(x_k^{(1)}\xi+y_k^{(1)}\eta\right)\right]\varphi_{n,j}^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)dx_k^{(1)}dy_k^{(1)}+$$

$$+\iint\limits_{S_{n,j}^{(k)}}\exp\left[-i\left(x_k^{(1)}\xi+y_k^{(1)}\eta\right)\right]\alpha_{n,j}^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)dx_k^{(1)}dy_k^{(1)}.$$

Подставляя соотношения (8.141) в уравнения (8.140), для определения функций $\varphi_n^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)$ и $\varphi_{n,j}^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)$ получаем такую систему уравнений:

$$\nabla^2\iint\limits_{S_n^{(k)}}\frac{\varphi_n^{(k)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x_k^{(1)}-\xi\right)^2+\left(y_k^{(1)}-\eta\right)^2}}=2\pi\beta_n^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)-$$

$$-\nabla^2\iint\limits_{S_n^{(k)}}\frac{\alpha_n^{(k)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x_k^{(1)}-\xi\right)^2+\left(y_k^{(1)}-\eta\right)^2}},\tag{8.142}$$

$$\nabla^2\iint\limits_{S_{n,j}^{(k)}}\frac{\varphi_{n,j}^{(k)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x_k^{(1)}-\xi\right)^2+\left(y_k^{(1)}-\eta\right)^2}}=2\pi\beta_{n,j}^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)-$$

$$-\nabla^2\iint\limits_{S_{n,j}^{(k)}}\frac{\alpha_{n,j}^{(k)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x_k^{(1)}-\xi\right)^2+\left(y_k^{(1)}-\eta\right)^2}}\quad(n=1,2,\ldots,\tau;\quad j=1,2,\ldots,N_n).$$

Применяя метод регуляризации уравнения (8.142), сводим к системе двухмерных интегральных уравнений II рода

$$\varphi_{n,j}^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{S_{n,j}^{(k)}}\alpha_{n,j}^{(k)}(\xi,\eta)\,K_{n,j}^{(k)}\left(\xi,\eta,x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\bar S_{n,j}^{(k)}}\beta_{n,j}^{(k)}(\xi,\eta)\,F_{n,j}\left(\xi,\eta,x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)d\xi d\eta,\tag{8.143}$$

$$\varphi_n^{(k)}\left(x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\bar S_n^{(k)}}\alpha_n^{(k)}(\xi,\eta)\,K_n^{(k)}\left(\xi,\eta,x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{S_n^{(k)}}\beta_n^{(k)}(\xi,\eta)\,F_n^{(k)}\left(\xi,\eta,x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)d\xi d\eta\quad(n=1,2,\ldots,\tau;\ j=1,2,\ldots,N_n).$$

Здесь

$$K_{n,j}^{(k)}\left(\xi,\eta,x_k^{(1)},y_k^{(1)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x_k^{(1)}-x_{n,j}\right)^2+\left(y_k^{(1)}-y_{n,j}\right)^2-r_{n,j}^2}}{\left[\left(x_k^{(1)}-\xi\right)^2+\left(y_k^{(1)}-\eta\right)^2\right]\sqrt{r_{n,j}^2-\left(\xi-x_{n,j}\right)^2-\left(\eta-y_{n,j}\right)^2}};$$

$$F_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x_k^{(1)} - \xi)^2 + (y_k^{(1)} - \eta)^2}} \operatorname{arctg} \frac{r_{n,j} \sqrt{(x_k^{(1)} - \xi)^2 + (y_k^{(1)} - \eta)^2}}{\varkappa_{n,j}}; \tag{8.144}$$

$$K_n^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) =$$

$$= \frac{\sqrt{r_n^2 - (x_k^{(1)} - x_n)^2 + (y_k^{(1)} - y_n)^2}}{[(x_k^{(1)} - \xi)^2 + (y_k^{(1)} - \eta)^2] \sqrt{(\xi - x_n)^2 + (\eta - y_n)^2 - r_n^2}};$$

$$F_n^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{(x_k^{(1)} - \xi)^2 + (y_k^{(1)} - \eta)^2}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{r_n \sqrt{(x_k^{(1)} - \xi)^2 + (y_k^{(1)} - \eta)^2}}{\varkappa_n};$$

$r_n, r_{n,j}$ — радиусы кругов $S_n^{(k)}$ и $S_{n,j}^{(k)}$; (x_n, y_n), $(x_{n,j}, y_{n,j})$ — координаты их центров; $\varkappa_n^2 = [r_n^2 - (\xi - x_n)^2 - (\eta - y_n)^2]\,[r_n^2 - (x_k^{(1)} - x_n)^2 - (y_k^{(1)} - y_n)^2]$.

Таким образом, задача сведена к системе (8.143) интегральных уравнений II рода, которые во многих частных случаях могут быть эффективно решены методом последовательных приближений. Если система интегральных уравнений (8.143) будет решена, то значение температуры $T_k^{(1)}$ определяется через искомые функции $\varphi_n^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ и $\varphi_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ следующим образом:

$$T_k^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-z_k^{(1)} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i\,(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)\right] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\tau} \left\langle \iint\limits_{\Delta_n^{(k)}} \exp\left[-i\,(x\xi + y\eta)\right] \left[\varphi_n^{(k)}(x, y) + \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_{n,j}^{(k)}(x, y)\right] dxdy \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\bar{\Delta}^{(k)}} \exp\left[-i\,(x\xi + y\eta)\right] B_k^{(2)}(x, y)\, dxdy \right\} d\xi d\eta. \tag{8.145}$$

Рассмотрим теперь термостатическую задачу для полупространства с граничными условиями (8.130), где области $\Delta^{(k)}$ и $\bar{\Delta}^{(k)}$ такие же, как и в первом случае. Аналогично изложенному выше можно показать, что такая задача сводится к решению следующей системы двухмерных интегральных уравнений II рода:

$$\varphi_{n,j}^{(k)}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{S_{n,j}^{(k)}} \alpha_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta)\, K_{n,j}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(1)}, y_k^{(1)})\, d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\bar S^{(k)}_{n,j}}[\beta^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta)-\lambda_1\varphi^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta)]\,F^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)\,d\xi d\eta,$$

$$\varphi^{(k)}_n(x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\bar S^{(k)}_n}\alpha^{(k)}_n(\xi,\eta)\,K^{(k)}_n(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)\,d\xi d\eta+ \tag{8.146}$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{S^{(k)}_n}[\beta^{(k)}_n(\xi,\eta)-\lambda_0\varphi^{(k)}_n(\xi,\eta)]\,F^{(k)}_n(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)\,d\xi d\eta$$

$$(n=1,2,\ldots,\tau;\qquad j=1,2,\ldots,N_n).$$

Здесь $K^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$, $F^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$, $K^{(k)}_n(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$, $F^{(k)}_n(\xi,\eta,x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$ определяются по формулам (8.144); величины $\alpha^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta)$, $\alpha^{(k)}_n(\xi,\eta)$, $\beta^{(k)}_{n,j}(\xi,\eta)$, $\beta^{(k)}_n(\xi,\eta)$ вычисляются, как и в предыдущем случае, если вместо $B^{(1)}_k(x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$, $B^{(2)}_k(x^{(2)}_k,y^{(2)}_k)$ положить $C^{(1)}_k(x^{(1)}_k,y^{(1)}_k)$, $C^{(2)}_k(x^{(2)}_k,y^{(2)}_k)$.

Если система интегральных уравнений (8.146) будет решена, то функция распределения температуры в полупространстве $W^{(1)}_n$ вычисляется по формуле (8.145).

Пример. Рассмотрим случай, когда область $\bar\Delta_l$ состоит из совокупности двух кругов радиуса r, координаты центров которых (0, 0) и (h, 0). При этом считается также, что на поверхности полупространства $z=0$ заданы следующие граничные условия:

$$T=-T_0\quad((x,y)\in\bar\Delta_z),$$
$$\frac{\partial T}{\partial z}=0\quad((x,y)\in\Delta_z). \tag{8.147}$$

Для рассматриваемого случая система интегральных уравнений (8.143) принимает следующий вид:

$$\varphi_1(x,y)=-\frac{2}{\pi}T_0\arcsin\frac{r}{r_1}-$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0}\frac{\sqrt{r_1^2-r^2}\,\varphi_2(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\sqrt{r^2-\xi^2-\eta_2}},$$
$$\varphi_2(x,y)=-\frac{2}{\pi}T_0\arcsin\frac{r}{r_2}- \tag{8.148}$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0}\frac{\sqrt{r_2^2-r^2}\,\varphi_1(\xi+h,\eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi-h)^2+(y-\eta)^2]\sqrt{r^2-\xi^2-\eta^2}},$$

где Δ_0 — область круга $r_1^2\leqslant r^2$; $r_1^2=x^2+y^2$; $r_2^2=(x-h)^2+y^2$. На основании решения интегральных уравнений (8.148) для вычисления рас-

пределения температуры T в области Δ_z с точностью до малых величин δ^5 получим такую формулу:

$$T_\Delta = -\frac{2}{\pi} T_0 \sum_{k=1}^{2} \left[\arcsin \frac{r}{r_k} \left(1 - \frac{\delta}{\pi} - \frac{x_k \delta}{2\pi h} + \frac{r_k^2 \delta}{8\pi h^2} - \frac{3\delta x_k^2}{8\pi h^2} + \right.\right.$$

$$+ \frac{5\delta^3 x_k}{16\pi h} - \frac{9 r_k^2 x_k \delta}{16\pi h^3} + \frac{11\delta x_k r_k^2}{16\pi h^3} - \frac{3\delta^3 x_k}{8\pi h} + \frac{\delta x_k y_k^2}{16\pi h^3} + \frac{\delta^2}{\pi^2} + \frac{\delta^2 x_k}{2\pi^2 h} -$$

$$- \frac{\delta^2 r_k^2}{8\pi^2 h^2} + \frac{3x_k^2}{8\pi^2 h^2} + \frac{\delta^3}{48\pi} - \frac{\delta^3}{26\pi} - \frac{\delta^3}{\pi^3} + \frac{11 x_k \delta^3}{96\pi^2 h} - \frac{\delta^3 x_k}{2\pi^2 h} -$$

$$\left. - \frac{\delta^4}{48\pi^3} + \frac{\delta^4}{\pi^4} \right) - \frac{\sqrt{r_k^2 - r^2}}{\pi} \varepsilon \left(\frac{x_k^2}{2h r_k^2} - \frac{\delta}{8h} + \frac{3\delta x_k^2}{8h r_k^2} - \frac{\delta^2 r}{8 r_k^2} + \right.$$

$$+ \frac{\delta^2 r x_k^2}{4 r_k^4} + \frac{9\delta x_k}{16 h^2} - \frac{11\delta x_k}{16 h^2} - \frac{\delta^3 x_k}{8 r_k^2} + \frac{\delta^3 r^2 x_k}{24 r_k^4} + \frac{\delta^3 y_k^2 x_k}{24 r_k^4} -$$

$$- \frac{\delta^3 r^2 y_k^2 x_k}{6 r_k^6} + \frac{\delta^3 x_k}{16 r_k^2} + \frac{\delta x_k^2}{2\pi h r_k^2} - \frac{\delta^3}{8\pi h} + \frac{3\delta^2 x_k^2}{8\pi h r_k^2} - \frac{\delta^3 r}{8\pi r_k^2} + \frac{\delta^3 r x_k^2}{4\pi r_k^2} +$$

$$\left.\left. + \frac{11\delta^2 r x_k}{96\pi r_k^2} - \frac{\delta^2 x_k^2 r}{2\pi^2 h r_k^2} \right) \right] + O(\delta^5), \qquad (8.149)$$

где $\delta = r/h$; $x_1 = x$; $x_2 = x - h$.

Термостатическая задача для пространства с плоской трещиной. Пусть неограниченное пространство V_k содержит плоскую трещину конфигурации ω_k, на поверхности которой заданы соотношением (8.128) одинаково направленные тепловые потоки. При этом считается, что в бесконечно удаленных точках рассматриваемого пространства значения температуры и теплового потока равны нулю. Задача состоит в нахождении функции $T_k^{(2)}$ распределения температуры в пространстве V_k.

Распределение температуры в пространстве V_k будет антисимметричным относительно плоскости расположения трещины $z_k^{(2)} = 0$, поэтому нахождение функции $T_k^{(2)}$ распределения температуры в пространстве V_k сведется к термостатической задаче для полупространства $z_k^{(2)} \geqslant 0$, на границе которого $z_k^{(2)} = 0$ заданы смешанные условия

$$\left. \frac{\partial T_k^{(2)}}{\partial z_{(k)}^2} \right|_{z_k^{(2)}=0} = D_k (x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \quad ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \omega_k),$$

$$T_k^{(2)} |_{z_k^{(2)}=0} = 0 \quad ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \bar{\omega}_k). \qquad (8.150)$$

где $\bar{\omega}_k$ — область, дополняющая ω_k до полной плоскости $z_k^{(2)} = 0$.

Пусть область трещины ω_k состоит из совокупности областей $\omega_k^{(1)}, \ldots, \omega_k^{t_k}\left(\omega_k = \sum_{i=1}^{t_k} \omega_k^{(i)}\right)$, внешними контурами которых являются окружности кругов $\Lambda_1^{(k)}, \ldots, \Lambda_{t_k}^{(k)}$. Будем считать, что в каждой области $\omega_i^{(k)}$ имеется число M_m внутренних контуров (окружностей), которые ограничивают области $\Lambda_{m,i}^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, M_m)$.

Граничная задача для полупространства со смешанными условиями (8.150) на многосвязных областях ω_k и $\bar{\omega}_k$ рассмотрена в предыдущем пункте и сведется применительно к следующему случаю к такой системе интегральных уравнений II рода:

$$\psi_{m,i}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Lambda_{m,i}^{(k)}} \lambda_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta) K_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})\, d\xi d\eta + $$
$$+ \frac{1}{\pi^2} \iint_{\bar{\Lambda}_{m,i}^{(k)}} \eta_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta) F_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})\, d\xi d\eta,$$
$$\psi_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Lambda_m^{(k)}} \lambda_m^{(k)}(\xi, \eta) K_m^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})\, d\xi d\eta + \tag{8.151}$$
$$+ \frac{1}{\pi^2} \iint_{\bar{\Lambda}_m^{(k)}} \eta_m^{(k)}(\xi, \eta) F_m^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})\, d\xi d\eta \quad (m = 1, 2, \ldots, t_k;$$
$$i = 1, 2, \ldots, M_m).$$

Здесь ядра интегральных уравнений $K_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$, $K_m^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$, а также функции $F_{m,i}^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$, $F_m^{(k)}(\xi, \eta, x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ определяются по формулам (8.144); величины $\eta_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$, $\eta_{m,i}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ выбираются из тех соображений, чтобы они были интегрируемые в своих областях изменения и удовлетворяли условию

$$\eta_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) + \sum_{i=1}^{M_m} \eta_{m,i}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = -D(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \quad ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \omega_k^{(m)}),$$
$$\lambda_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \theta_m^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) - \sum_{i=1}^{M_m} \psi_{m,j}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}), \tag{8.152}$$
$$\lambda_{m,i}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \theta_m^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) - \psi_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) - \sum_{j=1(\neq i)}^{M_m} \psi_{m,j}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}).$$

$$\theta_m^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \begin{cases} f_i^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) & ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \omega_k^{(i)}), \\ 0 & ((x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) \in \bar{\omega}_k, \quad m \neq i, \quad i = 1, 2, \ldots, t_k). \end{cases}$$

При этом функция $T_k^{(2)}$ распределения температуры в пространстве V_k определяется через искомые функции $\psi_m^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ и $\psi_{m,l}^{(k)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ формулой

$$T_k^{(2)} \doteq \frac{\operatorname{sign} z}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-|z_k^{(2)}|\sqrt{\xi^2+\eta^2} + i\left(x_k^{(2)}\xi + y_k^{(2)}\eta\right)\right] \times$$

$$\times \left\{\sum_{m=1}^{t_k} \iint_{\omega_k^{(m)}} \exp\left[-i(x\xi + y\eta)\right]\left[\psi_m^{(k)}(x, y) + \sum_{j=1}^{M_m} \psi_{m,j}^{(k)}(x, y)\right] dxdy\right\} d\xi d\eta. \tag{8.153}$$

Таким образом, термостатическая задача для многогранника с трещинами свелась к совместному решению интегральных уравнений II рода (8.143) или (8.146) и (8.151) при учете соотношений (8.128), (8.132), (8.135) и (8.153). Для многих конкретных случаев решение этих уравнений эффективно может быть осуществлено методом последовательных приближений.

8.10. Термоупругое равновесие многогранника, ослабленного системой плоских трещин

Пусть на каждой грани S_k многогранника, описанного в предыдущем параграфе (см. рис. 5.4), приложены внешние усилия с векторами F_k, а также заданы смешанные температурные условия (8.125) и (8.126). При этом считается, что поверхности каждой трещины ω_l термоизолированы и на них задана векторами $\mathbf{P}_l$ самоуравновешивающаяся система внешних усилий. Задача состоит в определении термоупругого равновесия такого многогранника.

На основании результатов предыдущей рубрики определяем распределение температуры в многограннике. Далее представим напряженное состояние $\hat{\sigma}$ в многограннике как сумму напряженных состояний $\hat{\sigma}_l^{(1)}$ в полупространствах W_l, поверхности которых совпадают с плоскостями граней многогранника S_l, и напряженных состояний $\hat{\sigma}_x^{(2)}$ в неограниченных пространствах V_k с трещинами конфигурации ω_k

$$\hat{\sigma} = \sum_{l=1}^{e} \hat{\sigma}_l^{(1)} + \sum_{k=1}^{s} \hat{\sigma}_k^{(2)}. \tag{8.154}$$

На основании этого, а также проводя аналогичные, как и в п. 5.3, рассуждения и преобразования, задачу сводим к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$\mathbf{A}_k^{(1)} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=1}^{3} \alpha_s^{(k)} \left\{\iint_{S_k} (\gamma_s \mathbf{F}_k) \exp\left[-i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right] dx_k^{(1)} dy_k^{(1)} -\right.$$

$$- \sum_{l=1(\neq k)}^{e} \iint_{Q_l^{(k)}} \left[\gamma_s \mathbf{F}_{l1}^{(k)}\left(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, \mathbf{A}_l^{(1)}, T_l^{(1)}\right)\right] \exp\left[-i\left(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta\right)\right] \times$$

$$\times dx_k^{(1)} dy_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{s_n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_s \mathbf{F}_{j2}^{(k)} (x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, \sigma_{j\omega}, T_j^{(2)})] \exp[-i(x_k^{(1)}\xi + y_k^{(1)}\eta)]\, dx_k^{(1)} dy_k^{(1)}\Big\};$$

$$\sum_{s=1}^{3} \beta_s^{(n)} \Big\{\iint\limits_{\bar{\omega}_n} (\varphi_s \sigma_{n\omega})\, d\xi_n^{(2)} d\eta_n^{(2)} - \iint\limits_{\omega_n} \langle \sum_{j=1}^{e} [\varphi_s \mathbf{F}_{j3}^{(n)} (\xi_n^{(2)}, \eta_n^{(2)}, \mathbf{A}_l^{(1)}, T_j^{(1)})] -$$

$$- \varphi_s \mathbf{P}_n + \sum_{j=1(\neq n)}^{s_n} [\varphi_s \mathbf{F}_{j4}^{(n)} (\xi_n^{(2)}, \eta_n^{(2)}, \sigma_{j\omega}, T_j^{(2)})] \rangle\, d\xi_n^{(2)} d\eta_n^{(2)}\Big\} =$$

$$= 8G\pi^2 \Big[\alpha(1+\mu) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \operatorname{grad} T_n^{(2)} dz_n^{(2)} dz_n^{(2)} - 2\alpha\beta_3^{(n)} (1+\mu) \int_0^{\infty} T_n^{(2)} dz_n^{(2)}\Big]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, e;\ \ n = 1, 2, \ldots, s_n). \qquad (8.155)$$

Здесь $\mathbf{A}_k^{(1)}$ — вектор-функция, на основании которой, как и в п. 5.3, определяется тензор напряжений $\hat{\sigma}_k^{(1)}$; $\sigma_{n\omega}$ — искомый вектор напряжения в плоскости трещины ω_k пространства V_n, с помощью которого вычисляется тензор напряжений $\hat{\sigma}_n^{(2)}$; γ_t, φ_t — векторы, которые вычисляются аналогично, как в п. 5.3; $\mathbf{F}_{j1}^{(k)} (x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, \mathbf{A}_j^{(1)}, T_j^{(1)})$ — вектор напряжений в области $Q_j^{(k)}$ — сеченни полупрострачства W_j плоскостью $z_k^{(1)}=0$; $\mathbf{F}_{j2}^{(k)} (x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, \sigma_{j\omega}, T_j^{(2)})$ — вектор напряжений в пространстве V_j вдоль плоскости грани S_k; $\mathbf{F}_{j3}^{(k)} (\xi_n^{(2)}, \eta_n^{(2)}, \sigma_{j\omega}, T_j^{(2)})$ — вектор напряжений в полупространстве W_j вдоль плоскости трещины ω_n; $\mathbf{F}_{jn}^{(n)} (\xi_n^{(2)}, \eta_n^{(2)}, \sigma_{j\omega}, T_j^{(2)})$ — вектор напряжений в пространстве V_j вдоль плоскости трещины ω_n; $T_k^{(1)}$ — функция распределения температуры в полупространстве W_k; $T_k^{(2)}$ — функция распределения температуры в пространстве V_n с трещиной конфигурации ω_n.

Как в гл. 5, здесь система интегральных уравнений (8.155) для круговых, кусочно-гладких и близких к круговым контурам трещин может быть сведена к системе интегральных уравнений II рода относительно векторов $\sigma_{n\omega}$, которые эффективно решаются методом последовательных приближений, численными методами.

Таким образом, если из системы интегральных уравнений (8.155) найдены векторы $\sigma_{n\omega}$, то коэффициенты интенсивности напряжений K_{I}, K_{II}, K_{III} вычисляются по формулам гл. 5.

8.11. Растяжение полупространства с круговой трещиной, подвергнутого внешнему температурному воздействию

Рассмотрим полупространство, ослабленное термоизолированной круговой (круглой в плане) трещиной радиуса $r_т$, и растягиваемое в неограниченно удаленных точках равномерно распределенными усилиями σ, направленными перпендикулярно плоскости расположения трещины. Выберем прямоугольную систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом (рис. 8.10), чтобы плоскость $y = 0$ совпадала с плоскостью трещины, начало 0 — с ее центром, а плоскость $z = -h$ — с поверхностью полупространства (здесь $h > r_т$ — расстояние от центра трещины до поверхности полупространства). При этом считается, что на поверхности полупространства $= -h$ заданы следующие силовые и температурные условия:

$$u_z(x, y, -h) = \tau_{xz}(x, y, -h) = \tau_{yz}(x, y, -h) = 0; \qquad (8.156)$$

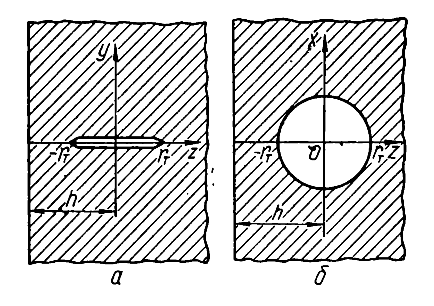


Рис. 8.10. Схема сечения полупространства с круговой трещиной координатными плоскостями yOz (*а*) и xOz (*б*).

$$T(x, y, -h) = T_0 \quad (x^2 + y^2 \leqslant r_т^2),$$

$$T(x, y, -h) = 0 \quad (x^2 + y^2 > r_т^2). \qquad (8.157)$$

Задача состоит в определении термоупругого равновесия полупространства $z \geqslant -h$. Так как трещина термоизолирована, а температурное поле симметрично относительно плоскости ее расположения $y = 0$, то наличие такой трещины не вызовет возмущения температурного поля в полупространстве. Поэтому температурное поле определяем по методике, изложенной в п. 8.9. В результате этого получаем

$$T(x, y, z) = T_0 r_т \int_0^\infty e^{-\xi(z+h)} J_1(\xi r_т) J_0(\xi r)\, d\xi, \qquad (8.158)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя; $r^2 = x^2 + y^2$.

Для определения упругого поля представим искомое напряженное состояние в виде суммы двух напряженных состояний: 1) напряженного состояния полупространства $z \geqslant -h$ без трещины при заданных силовых и температурных факторах; 2) напряженного состояния в полупространстве с трещиной, на границе $z = -h$ которого заданы условия (8.156), а на трещине ($y = 0$; $x^2 + z^2 \leqslant r_т^2$)

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0, z) = -\sigma_y^{(1)}(x, 0, z),$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0, z) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0, z) = 0, \qquad (8.159)$$

где $\sigma_y^{(1)}(x, 0, z)$ — нормальные напряжения в случае первого напряженного состояния.

Первое напряженное состояние находим на основании методики, изложенной в предыдущей рубрике:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0, z) = \sigma - \frac{2G\alpha r_\text{т} T_0 (1+\mu)}{\pi(1-\mu)(z+h)} \int\limits_0^\infty K_0(\xi) J_1\left(\xi \frac{r_\text{т}}{z+h}\right) \cos \xi \frac{x}{z+h} d\xi, \tag{8.160}$$

где $J_1(x)$, $K_0(x)$ — цилиндрические функции действительного и мнимого аргументов.

Второе напряженное состояние будет эквивалентно напряженному состоянию в неограниченном пространстве, ослабленном в плоскости $z = 0$ двумя круговыми трещинами радиуса $r_\text{т}$ с координатами центров (0, 0, 0) и $(-2h, 0, 0)$, на поверхностях которых заданы условия (8.159).

На основании результатов, изложенных в п. 5.3, такую задачу сведем к решению интегрального уравнения

$$\psi(x, z) = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Delta_0} [\sigma_y^{(1)}(\xi, 0, \zeta) + \psi(-2h - \xi, \zeta)] \times$$

$$\times \frac{\sqrt{r_\text{т}^2 - \xi^2 - \zeta^2}\, d_\xi d_\zeta}{\sqrt{x^2 + z^2 - r_\text{т}^2}\,[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]} \tag{8.161}$$

где $\sigma_y^{(1)}(\xi, 0, \zeta)$ вычисляется по формуле (8.160). При этом нормальные напряжения $\sigma_y^{(2)}(x, 0, z)$, действующие в плоскости расположения трещины $z = 0$, определяются через искомую функцию следующим образом:

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0, z) = \psi(x, z) + \psi(-2h - x, z). \tag{8.162}$$

Решая уравнение методом последовательных приближений, а также используя соотношения (5.110) и (8.162), для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K_I получаем формулу

$$K_\text{I}(\sigma, \varphi) = K_0 \sigma \delta^2 \frac{LG\alpha T_0 (1+\mu)\sqrt{r_\text{т}}}{(1-\mu)\pi\sqrt{\pi}} \{1 - 1{,}3333\delta + \delta^2(-1{,}0333 -$$

$$- 0{,}4\cos^2\varphi) + \delta^3(1{,}3333 + 9{,}9999\cos\varphi + 4{,}8762\cos^3\varphi) + \delta^4(-10{,}9617 +$$

$$+ 53{,}8839\cos^2\varphi - 47{,}6394\cos^4\varphi) + \delta^5(13{,}3333 - 63{,}2086\cos\varphi -$$

$$- 1{,}3690\cos^3\varphi - 44{,}8209\cos^5\varphi)\}. \tag{8.163}$$

Здесь $K_0 = 2\sqrt{\frac{r_\text{т}}{\pi}}\,[1{,}0265\delta^3 - 0{,}0265\delta^4\cos\varphi + \delta^5(0{,}0026 + 0{,}0265\cos^2\varphi + \delta^6(0{,}0199\cos\varphi - 0{,}0265\cos^3\varphi) + \delta^7(0{,}0045 - 0{,}0038\cos^2\varphi + 0{,}0265\cos^4\varphi)]$, где φ — координатный угол точек контура трещины. Для заданных значений величин $r_\text{т}$, h, G, μ, α, T_0, A_0, A_1, A_2, A_3 на основании равенств (8.2)—(8.5), (8.163) можно определить предельное значение внешней нагрузки $\sigma = \sigma_*$, а также место (значение угла $\varphi = \varphi_*$) начального распространения трещины.

8.12. Термоупругое равновесие неограниченного пространства, ослабленного плоской многосвязной трещиной

Постановка вадачи и метод ее решения. Пусть неограниченное тело, ослабленное плоской многосвязной трещиной $S_т$, подвергнуто воздействию силовых и температурных факторов, вызывающих в нем напряженное состояние, симметричное относительно плоскости расположения трещины. Задача состоит в определении напряженного состояния в таком теле.

Введем прямоугольную систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с плоскостью расположения трещины. В силу симметричности напряженного состояния в теле относительно плоскости расположения трещины $S_т$ определение температурного состояния тела сведется к решению термоупругой задачи для полупространства $z \geqslant 0$, на границе которого $z = 0$ заданы смешанные условия

$$
\begin{gathered}
u_z(x, y, 0) = 0 \quad ((x, y) \in \Delta), \\
\sigma_z(x, y, 0) = -f(x, y) \quad ((x, y) \in S_т), \\
\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0 \quad ((x, y) \in \Delta + S_T).
\end{gathered}
\tag{8.164}
$$

Здесь Δ — область, дополняющая S_T до плоскости $z = 0$; $f(x, y)$ — нормальные напряжения, возникающие в неограниченном теле без трещины при эквивалентном нагружении. При этом считается, что с помощью предложенного в п. 8.9 подхода определена функция распределения температуры в пространстве, которая в плоскости расположения трещины принимает значение $T_s(x, y)$.

Термоупругая задача для полупространства с граничными условиями (8.164) сводится [1] к нахождению гармонической функции $\Phi_3(x, y, z)$, которая на его границе $z = 0$ удовлетворяет условиям

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \Phi_3(x, y, z)}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\alpha G(1+\mu)}{1-\mu} \int_0^\infty T dz \quad ((x, y) \in \Delta), \\
\left(\frac{\partial^2 \Phi_3(x, y, z)}{\partial z^2}\right)_{z=0} = f(x, y) \quad ((x, y) \in S_T).
\end{gathered}
\tag{8.165}
$$

Представим искомую гармоническую функцию $\Phi_3(x, y, z)$ в виде следующего интегрального разложения:

$$
\Phi_3(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-z\sqrt{\xi^2+\eta^2} + i(x\xi + y\eta)\right]}{\xi^2+\eta^2} \Bigg[A(\xi, \eta) -
$$

$$
- \frac{\alpha G(1+\mu)}{4\pi^2(1-\mu)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T_s(x, y) \exp\left[-i(x\xi + y\eta)\right] dxdy\Bigg] d\xi d\eta, \tag{8.166}
$$

где $A(\xi, \eta)$ — неизвестная искомая функция. Подставив выражение (8.156) в равенство (8.155), получим интегральные уравнения для нахож-

дения искомой функции $A\ (\xi, \eta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i\,(x\xi + y\eta)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\, A\,(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = 0 \quad ((x, y) \in \Delta),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,(x\xi + y\eta)\right] A\,(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \frac{\alpha G\,(1 + \mu)}{1 - \mu} + f\,(x, y) \quad ((x, y) \in S_T). \tag{8.167}$$

Пусть область Δ состоит из совокупности областей $S_1, \ldots, S_m$ $\left(\Delta = \sum_{k=1}^{m} S_k\right)$, внешними контурами которых будут окружности кругов Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Будем считать, что в каждой области S_k имеется N_k внутренних контуров (окружностей), которые ограничивают области Δ_{jk} $(k = 1, 2, \ldots, N_k)$.

С помощью известного метода регуляризации [1] дуальные интегральные уравнения (8.167) сведем к следующей системе двухмерных интегральных уравнений II рода:

$$\varphi_k\,(x, y) = -\iint\limits_{\Delta_k^{(0)}} \left[\psi_k\,(\xi, \eta) - \sum_{n=1}^{N_k} \varphi_{kn}\,(\xi, \eta)\right] K_k^{(1)}\,(\xi, \eta, x, y)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{kj}\,(x, y) = \iint\limits_{\Delta_{kj}} \left[\varphi_k\,(\xi, \eta) - \psi_k\,(\xi, \eta) - \sum_{n=1(\neq j)}^{N_k} \varphi_{kn}\,(\xi, \eta)\right] \times$$

$$\times K_k^{(2)}\,(\xi, \eta, x, y)\, d\xi d\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, m; \ \ j = 1, 2, \ldots, N_k), \tag{8.168}$$

где

$$\psi_k\,(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,(1 + \mu)}{2\,(1 - \mu)}\, T_s + \dfrac{f\,(x, y)}{2G} & ((x, y) \in S), \\ \varphi_n\,(x, y) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_{nj}\,(x, y) & ((x, y) \in S_n), \end{cases}$$

а ядра $K_k^{(1)}\,(\xi, \eta, x, y)$, $K_k^{(2)}\,(\xi, \eta, x, y)$ определяются из соотношения (8.144).

Если система интегральных уравнений (8.168) будет решена, то нормальные напряжения $\sigma_z\,(x, y, 0)$, действующие в области, вычисляются через искомые функции $\varphi_k\,(x, y)$, $\varphi_{kj}\,(x, y)$ по формуле

$$\sigma_z\,(x, y, 0) = 2G\left[\varphi_k\,(x, y) + \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_{kj}\,(x, y)\right] - \frac{\alpha G\,(1 + \mu)}{1 - \mu}\, T_\Delta \quad ((x, y) \in S_k;$$

$$k = 1, 2, \ldots, m), \tag{8.169}$$

где T_Δ — значение температуры T в области Δ.

Термоупругое равновесие пространства, ослабленного системой двух круговых трещин. Рассмотрим некоторое упругое пространство, ослабленное системой двух круговых трещин радиуса $r_т$, размещенных в плоскости $z = 0$ прямоугольной системы декартовых координат $Oxyz$ и имеющих координаты центров (0, 0) и ($2h$, 0). Предполагается, что на поверхностях трещин поддерживается постоянная отрицательная температура $-T_0$, а в неограниченно удаленных точках температура равна нулю. Задача состоит в определении нормальных напряжений σ_z (x, y, 0) в плоскости расположения трещин.

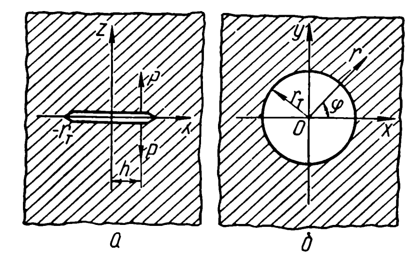


Рис. 8.11. Схема сечения пространства с круговой трещиной, нагруженной сосредоточенными силами, плоскостями xOz (а) и yOx (б).

Так как напряженное состояние и температура в рассматриваемом теле симметричны относительно плоскости расположения трещин $z = 0$, то задача термоупругого равновесия для такого тела сведется к граничной задаче для полупространства с условиями на границе $z = 0$ типа (8.165).

Используя вышеизложенную методику для вычисления нормальных напряжений σ_z (x, y, 0), действующих в плоскости расположения трещины, получаем такую приближенную формулу:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{\alpha G T_0 (1+\mu)}{12\pi(1-\mu)} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{24\pi r_т + 2r_т\delta^3 + 3x_n\delta^4}{\sqrt{r_n^2 - r_т^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\sqrt{r_n^2 - r_т^2}}{r_т} \arcsin \frac{r_т}{r_n}\right) - \frac{r_т^2\delta^4 x_k}{r_k^2\sqrt{r_k^2 - r_т^2}} + \frac{O(\delta^5)}{\sqrt{r_k^2 - r_т^2}} \right] -$$

$$-\frac{\alpha G (1+\mu)}{1-\mu} T_\Delta, \qquad (8.170)$$

где $r_1^2 = x^2 + y^2$; $r_2^2 = (x - 2h)^2 + y^2$; $x_1 = x$; $x_2 = 2h - x$; $\delta = r_т/h$; $O(\delta^5)$ — малая величина порядка δ^5. Распределение температуры T_Δ в плоскости $z = 0$ вне расположения трещины будет определяться формулой (8.149).

Предельное равновесие неограниченного тела с круговой трещиной, подвергнутого воздействию силовых и температурных факторов. Рассмотрим неограниченное упругопластическое тело, ослабленное внутренней круговой трещиной радиуса $r_т$. Система цилиндрических координат $Or\varphi z$ введена так, что ее начало совпадает с центром трещины. Считается, что на поверхностях трещины поддерживается температура $T = T_0 + T_1 (r + r\cos\varphi)$, в бесконечно удаленных точках тела — температура $T = T_0$, а в точках (h, 0, ± 0) приложены сосредоточенные силы P (рис. 8.11). Задача состоит в определении предельного значения внешних усилий $P = P_*$, при достижении которого трещина начинает распространяться.

Решение такой задачи сводится к определению растягивающих напряжений в плоскости трещины, что в свою очередь эквивалентно термоупру-

гой задаче для полупространства с такими смешанными усилиями на границе $z = 0$:

$$u_z(r, \varphi, 0) = \tau_{rz}(r, \varphi, 0) = \tau_{\varphi z}(r, \varphi, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (r > r_т),$$

$$\sigma_r(r, \varphi, 0) = -p\delta(r - h, \varphi), \tau_{rz}(r, \varphi, 0) = \tau_{\varphi z}(r, \varphi, 0) = 0, \quad (8.171)$$

$$T = T_1(r_т + r\cos\varphi) \quad (r \leqslant r_т).$$

Для решения термоупругой задачи (8.171) воспользуемся изложенной выше методикой. В результате найдем, что

$$\sigma_z(r, \varphi, 0) = P\sqrt{r_т^2 - h^2}\,[\sqrt{2r_т(r - r_т)}\,(r_т^2 + h^2 - 2r_т h\cos\varphi)]^{-1} -$$

$$-\sqrt{2}\alpha r_т^2 G T_1(1 + \mu)(3 + 2\cos\varphi)\,[3\pi\sqrt{r_т(r - r_т)}]^{-1} + O(1)\ (r > r_т),$$

$$T = \frac{2T_1}{\pi r_т}\left[(r_т^2 + r^2\cos\varphi)\arcsin\frac{r_т}{r} - r_т\cos\varphi\sqrt{r^2 - r_т^2}\right] + T_0\ (r \geqslant r_т), \quad (8.172)$$

где $O(1)$ — величина, ограниченная при $r \to r_т$.

На основании соотношений (8.2)—(8.5) и (8.172) для вычисления предельного значения внешних сил $P = P_*$ получим формулу

$$P_* = \left[A_0 + A_1\left(T_0 + 2T_1 r_т\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right) + A_2\left(T_0 + 2T_1 r_т\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + A_3\left(2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2} + T_0\right)^3\right][r_т^{-1/2}\sqrt{\pi(r_т^2 - h^2)}\,(r_т^2 h^2 - 2r_т h\cos\varphi_*)^{-1} -$$

$$-2\alpha r_т^2\eta G\,(3\sqrt{\pi r_т})^{-1}(1 + \mu)(3 + 2\cos\varphi_*)]^{-1}, \quad (8.173)$$

где $\eta = T_1 P^{-1}$, а координатный угол $\varphi = \varphi_*$, который характеризует место начального распространения трещины, определяется из уравнения

$$\left[\frac{4\alpha\eta\sqrt{r_т}G(1 + \mu)}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2h\sqrt{\pi(r_т^2 - h^2)}}{\sqrt{r_т}\,(r_т^2 + h^2 - 2r_т h\cos\varphi_*)^2}\right] \times$$

$$\times\left[A_0 + A_1\left(T_0 + 2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right) + A_2\left(T_0 + 2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + A_3\left(T_0 + 2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right)^3\right] + \left[\frac{\sqrt{\pi(r_т^2 - h^2)}}{\sqrt{r_т}\,(r_т^2 + h^2 - 2r_т h\cos\varphi_*)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha r_т^2}{3\sqrt{\pi r_т}}\eta G(1 + \mu)(3 + 2\cos\varphi_*)\right]\left[A_1 T_1 + 2A_2 T_1\left(T_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right) + 3A_3 T_1\left(T_0 + 2r_т T_1\cos^2\frac{\varphi_*}{2}\right)^2\right] = 0. \quad (8.174)$$

В каждом конкретном случае при задании T_0, A_0, A_1, A_2, A_3, η, G, T, μ, α, h уравнение (8.174) может быть легко решено численными методами.

ГЛАВА 9

ПОВЕДЕНИЕ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В этой главе приведены основные уравнения для определения напряженно-деформированного состояния твердого тела с трещинами при учете пиро- и пьезоэлектрического эффектов [1—29]. Рассмотрены также решения задач механики разрушения при наличии электрического поля.

9.1. Уравнения состояния с учетом пиро- и пьезоэлектрического эффектов

Прямой пьезоэлектрический эффект заключается в появлении электрических зарядов на поверхностях кристаллов определенных классов симметрии при воздействии на них механической нагрузки. Экспериментально показано, что компоненты вектора поляризации P_i, равного электрическому моменту, приходящемуся на единицу объема (или поляризационному заряду на единицу площади), линейно связаны с компонентами тензора механических напряжений $\sigma_{kl}(k, l=1, 2, 3)$:

$$P_i = d_{ikl}\sigma_{kl}. \qquad (9.1)$$

Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в том, что компоненты вектора E'_i напряженности электрического поля в кристалле связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} линейными соотношениями вида [1, 2]

$$\varepsilon_{ij} = d_{kij}E'_i. \qquad (9.2)$$

Так как $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, то на основании равенств (9.2) очевидно, что тензор d_{kij} симметричен по паре последних индексов.

В общем случае тензор третьего ранга имеет $3^3 = 27$ независимых компонент, но в силу симметрии тензора d_{kij} по i и k их число уменьшается до 18. Дальнейшее уменьшение числа независимых пьезоэлектрических модулей связано с симметрией кристалла. При наличии центра симметрии кристалл не может быть пьезоэлектриком.

У некоторых кристаллов электрическая поляризация меняется при нагревании или охлаждении, причем изменение компонентов вектора поляризации ΔP_i при небольшом изменении температуры определяется как [2]

$$\Delta P_i = p_i \Delta T, \qquad (9.3)$$

где p_i — пироэлектрические коэффициенты. Это явление называется пироэлектрическим эффектом и наблюдается только у кристаллов, не имеющих центра симметрии. Пироэлектрический эффект также обратим, т. е. возможно изменение количества тепла (энтропии), обусловленное действием электрического поля.

Для реальных пьезоэлектрических кристаллов механические, электрические и тепловые свойства будут взаимосвязаны и их изучение следует

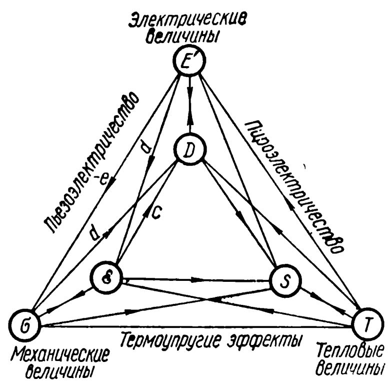


Рис. 9.1. Схема соотношения между тепловыми, электрическими и механическими свойствами кристаллов.

производить совместно. Эту взаимосвязь можно наглядно проиллюстрировать диаграммой, показанной на рис. 9.1 [3]. Если рассматривать температуру T, напряженность электрического поля E' и механические напряжения σ как «внешние силы», действующие на кристалл, то в результате этого воздействия будут изменяться энтропия S, электрическая индукция D и деформации ε. На диаграмме (рис. 9.1) этим так называемым главным эффектам соответствуют линии, соединяющие попарно вершины внешнего треугольника с символами T, E', σ и вершины внутреннего треугольника, где стоят символы S, D, ε. Если соединить вершины различных углов внутреннего и внешнего треугольников, то соответствующие линии будут иллюстрировать сопряженные эффекты, связанные с пьезо- и пироэлектрическими, а также термоупругими явлениями. В частности, на левой части диаграммы (точки σ, ε, D, E') показаны сопряженные пьезоэлектрические эффекты, а линии нижней части (с вершинами в точках σ, ε, S, T) соответствуют эффектам, относящимся к термоупругости. Правая часть диаграммы (точки T, S, D, E') соответствует пироэлектрическому эффекту, который характеризуется зависимостями между компонентами векторов D_i или E'_i и скалярами S или T.

Взаимосвязь механических тепловых и электрических свойств кристаллов изучается с помощью термодинамических методов и различных термодинамических потенциалов [2, 3]. Если выбрать в качестве независимых переменных компоненты тензора деформаций ε_{ij}, вектора напряженности электрического поля E'_i и температуру, то соответствующими зависимыми переменными будут механические напряжения σ_{ij}, электрическая индукция D_i и энтропия S. Для выбранных независимых переменных соответствующим термодинамическим потенциалом является электрическая функция Гиббса [3]

$$G_2 = U - E'_m D_m - ST, \tag{9.4}$$

где U — внутренняя энергия.

Дифференцируя выражение (9.4) и учитывая равенство $dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E'_m dD_m + TdS$, которое вытекает из известных законов термодинамики, получаем

$$dG_2 = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_m dE'_m - SdT = \left(\frac{\partial G_2}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T} d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial G_2}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T} dE'_m + \left(\frac{\partial G_2}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'} dT. \tag{9.5}$$

Индексы при символах частных производных соответствуют величинам, которые остаются постоянными при дифференцировании. Так как термо-

динамический потенциал G_2 является функцией переменных ε_{ij}, E'_m, T, то на основании равенства (9.5) находим

$$\sigma_{ij}=\left(\frac{\partial G_2}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T},\quad D_m=-\left(\frac{\partial G_2}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T},\quad S=-\left(\frac{\partial G_2}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}. \tag{9.6}$$

Отсюда в результате дифференцирования получаем следующие соотношения между производными:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T}=-\left(\frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T},\ \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}=-\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T},\ \left(\frac{\partial D_m}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}=$$
$$=\left(\frac{\partial S}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T}. \tag{9.7}$$

Для данного набора независимых переменных полные дифференциалы σ_{ij}, D_m и S можно записать в виде

$$\begin{aligned}
d\sigma_{ij}&=\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{E',T}d\varepsilon_{kl}+\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T}dE'_m+\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}dT,\\
dD_m&=\left(\frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T}d\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial D_m}{\partial E'_k}\right)_{\varepsilon,T}dE'_k+\left(\frac{\partial D_m}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}dT,\\
dS&=\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{E',T}d\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial S}{\partial E'_k}\right)_{\varepsilon,T}dE'_k+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}dT.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Уравнения (9.8) справедливы при описании любых кристаллов (линейных и нелинейных), но для малой области изменения переменных ε_{kl}, E'_m, T ими можно пренебречь, считая при этом постоянными частные производные в выражениях (9.8). Все девять частных производных в равенствах (9.8) имеют определенный физический смысл. Так, частные производные напряжений σ_{ij} по деформациям ε_{ij}— модули упругости для анизотропного тела и образуют тензор четвертого ранга

$$C^{E',T}_{ijkl}=\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{E',T}. \tag{9.9}$$

Частные производные вида $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T}$ характеризуют изменение механических напряжений за счет электрического поля. Эти величины называются пьезоэлектрическими константами и образуют тензор третьего ранга

$$l^T_{ijm}=-\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E'_m}\right)_{\varepsilon,T}. \tag{9.10}$$

Производные $\left(\frac{\partial D_m}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}$ определяют зависимость электрической индукции от температуры и называются пироэлектрическими коэффициентами

$$p^{\varepsilon}_m=\left(\frac{\partial D_m}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}. \tag{9.11}$$

Величины

$$\varepsilon^{\varepsilon' T}_{mk} = \left(\frac{\partial D_m}{\partial E'_k}\right)_{\varepsilon,T} \tag{9.12}$$

представляют собой компоненты тензора диэлектрических постоянных, а производные $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}$ являются коэффициентами температурных напряжений

$$\lambda^{E'}_{ij} = -\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'}. \tag{9.13}$$

Кроме того, предполагаем, что теплоемкость $C^{\varepsilon,E'}$ при постоянных деформации и напряженности электрического поля также константа, определяемая равенством

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\varepsilon,E'} = \frac{\rho C^{\varepsilon,E'}}{T_0}, \tag{9.14}$$

где T_0 — начальная температура.

Таким образом, с учетом обозначений (9.9) — (9.14) и равенств (9.7) в результате интегрирования выражения (9.8) получим соотношения, связывающие линейной зависимостью компоненты тензора напряжения σ_{ij}, индукцию D_i и приращение энтропии ΔS с деформациями ε_{ij}, напряженностью электрического поля E'_i и изменением температуры $\Delta T = T - T_0$, где T_0 — начальная температура [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C^{E',T}_{ijkl}\varepsilon_{kl} - l^{T}_{ijm}E'_m - \lambda^{E'}_{ij}\,\Delta T, \\ D_m &= \varepsilon^{\varepsilon,T}_{mk}E'_k + l^{T}_{mij}\varepsilon_{ij} + p^{\varepsilon}_m\Delta T, \\ \Delta S &= \lambda^{E'}_{ij}\varepsilon_{ij} + p^{\varepsilon}_m E'_m + \frac{\rho C^{\varepsilon,E'}}{T_0}\,\Delta T. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Уравнения состояния, аналогичные (9.15), можно получить и с помощью других термодинамических потенциалов. В частности, используя дифференциальное соотношение для внутренней энергии U (ε_{ij}, D_{ij}, S)

$$dU = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + E'_m dD_m + TdS, \tag{9.16}$$

будем иметь

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{D,S}, \quad E'_m = \left(\frac{\partial U}{\partial D_m}\right)_{\varepsilon,S}, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D}. \tag{9.17}$$

Для данного термодинамического потенциала независимые переменные — деформации ε_{ij}, электрическая индукция D_m и энтропия S. Тогда переменные σ_{ij}, E'_m и T будут функциями величин ε_{ij}, D_m и S, а полные дифференциалы зависимых переменных будут иметь вид

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{D,S} d\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m}\right)_{\varepsilon,S} dD_m \pm \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} dS, \\ dE'_m &= \left(\frac{\partial E'_m}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{D,S} d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial E'_m}{\partial D_k}\right)_{\varepsilon,S} dD_k + \left(\frac{\partial E'_m}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} dS, \end{aligned} \tag{9.18}$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{D,S} d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial T}{\partial D_m}\right)_{\varepsilon,S} dD_m + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} dS.$$

Учитывая равенства (9.17), вводим следующие обозначения для частных производных, входящих в равенства (9.18):

$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{D,S} = C_{ijkl}^{D,S}$ — тензор модулей упругости (измеренных при постоянной индукции и энтропии);

$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m}\right)_{\varepsilon,S} = \left(\frac{\partial E'_m}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{D,S} = -h_{ijm}^S$ — тензор пьезоэлектрических компонент;

$\left(\frac{\partial E'_m}{\partial D_k}\right)_{\varepsilon,S} = \beta_{mk}^{\varepsilon,S}$ — тензор диэлектрических «непроницаемостей», обратный тензору диэлектрических проницаемостей;

$-\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{D,S} = \gamma_{ij}^D$ — термоупругие константы при постоянной электрической индукции;

$-\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial E'_m}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial D_m}\right) = q_m^{\varepsilon}$ — пироэлектрические константы при постоянных деформациях;

$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{\varepsilon,D} dS = \frac{dQ}{\rho C^{\varepsilon,D}}$.

Здесь Q — интенсивность теплового источника; $C^{\varepsilon,D}$ — теплоемкость при постоянных деформациях и электрической индукции.

Интегрируя теперь равенства (9.18), записываем уравнения состояния в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^{D,S}\varepsilon_{kl} - h_{ijm}^S D_m - \gamma_{ij}^D \Delta Q, \\ E'_m &= -h_{mij}^S \varepsilon_{ij} + \beta_{mk}^{\varepsilon,S} D_k - q_m^{\varepsilon} \Delta Q, \\ \Delta T &= -T_0 \gamma_{ij}^D \varepsilon_{ij} - T_0 q_m^{\varepsilon} D_m + \frac{1}{\rho C^{\varepsilon,D}} \Delta Q. \end{aligned} \tag{9.19}$$

При анализе упругих колебаний пьезоэлектрических сред теплообменом можно пренебречь. Тогда, полагая $\Delta Q = 0$ в равенствах (9.19), получаем соотношения

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{ijm} D_m, \qquad E'_m = -h_{mij}\varepsilon_{ij} + \beta_{mk}^{\varepsilon} D_k. \tag{9.20}$$

При этом последнее равенство (9.19) определяет приращение температуры, обусловленное деформациями и индукцией при отсутствии теплообмена. Если принять за основные независимые переменные компоненты тензора напряжений σ_{ij}, напряженность электрического поля E'_i и температуру T, можно получить и другие формы уравнений состояния, описывающих линейные электротермоупругие свойства пьезоэлектрических кристаллов.

При этом в качестве термодинамического потенциала используется функция Гиббса

$$G_2 = U - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - E'_m D_m - TS, \tag{9.21}$$

для которой справедливо дифференциальное соотношение

$$dG_2 = -\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} - D_i dE'_i - SdT. \tag{9.22}$$

Применяя процедуру, аналогичную описанной выше, получаем следующие равенства [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= S^{E',T}_{ijkl}\sigma_{kl} + d^T_{klj}E'_k + \alpha^{E'}_{ij}\Delta T, \\ D_i &= d^T_{ijk}\sigma_{ij} + \varepsilon^{\sigma,T}_{ij}E'_i + p^\sigma_i\Delta T, \\ \Delta S &= \alpha^{E'}_{ij}\sigma_{ij} + p^\sigma_i E'_i + \frac{C^{\sigma,E'}}{T_0}\Delta T. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Здесь $S^{E'T}_{ijkl}$ — изотермические коэффициенты упругой податливости; d^T_{klj} — пьезоэлектрические модули; $\alpha^{E'}_{ij}$ — коэффициенты теплового расширения; $\varepsilon^{\sigma,T}_{ij}$ — диэлектрические проницаемости; p^σ_i — пироэлектрические коэффициенты; $C^{\sigma,E'}$ — теплоемкость при постоянных напряжениях и напряженности электрического поля.

Для определения связи между пьезомодулями d^T_{klj} и пьезоэлектрическими константами l^T_{mij}, используя (9.15) и (9.23), находим частные производные

$$\frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{ij}} = l^T_{mij}, \quad \frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial D_m}{\partial \sigma_{kl}}\,\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = d^T_{mkl}C^{E',T}_{klij},$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial \sigma_{ij}} = d^T_{mij}, \quad \frac{\partial D_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial D_m}{\partial \varepsilon_{kl}}\,\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = l^T_{mkl}S^{E',T}_{klij}.$$

Отсюда

$$l^T_{mij} = d^T_{mkl}C^{E',T}_{klij}, \quad d^T_{mij} = l^T_{mkl}S^{E'T}_{klij}. \tag{9.24}$$

Таким же образом можно доказать равенства

$$\lambda^{E'}_{ij} = -C^{E'T}_{ijkl}\alpha^T_{kl}, \quad \alpha^{E'}_{ij} = -S^{E'T}_{ijkl}\lambda^{E'}_{kl}. \tag{9.25}$$

При решении некоторых задач механики деформации пьезоэлектрических сред удобно использовать уравнения состояния вида (9.15), записанные в матричной форме. Для этого вводятся обозначения компонентов тензора напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} с одним индексом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} = \sigma_1, & \sigma_{12} = \sigma_6, & \sigma_{13} = \sigma_5 \\ \sigma_{33} = \sigma_3, & \sigma_{22} = \sigma_2, & \sigma_{23} = \sigma_4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon_6, & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ & \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, & \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ & & \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, в силу симметричности тензора C_{ijkl} по двум первым и двум последним индексам можно записать

$$C_{ijkl} = C_{n\beta} \; (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ n,\beta = 1,\ 2, \ldots,\ 6). \qquad (9.26)$$

Следовательно, коэффициенты $C_{n\beta}$ (n, $\beta = 1, 2, \ldots, 6$) образуют квадратную матрицу (6×6).

Учитывая симметричность тензора l_{mij} по паре последних индексов, вводим еще обозначение

$$l_{mij} = l_{mn} \quad (m = 1,\ 2,\ 3; \quad n = 1, 2, \ldots,\ 6) \qquad (9.27)$$

и тогда получим матрицу пьезоэлектрических констант с размерностью (3×6). В результате введения указанных обозначений можно записать уравнения (9.15) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_n &= C_{n\beta}^{E',T} \varepsilon_\beta - l_{nm}^T E'_m - \lambda_n^{E'} \Delta T, \\ D_m &= \varepsilon_{mk}^{\varepsilon,T} E_k + l_{mn}^T \varepsilon_n + p_m^\varepsilon \Delta T, \\ \Delta S &= \lambda_n^{E'} \varepsilon_n + p_m^\varepsilon E'_m + \frac{\rho C^{\varepsilon,E'}}{T_0} \Delta T. \end{aligned} \qquad (9.28)$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, причем $m, k = 1, 2, 3$; $n,\beta = 1, 2, \ldots, 6$, а для коэффициентов температурных напряжений используются обозначения $\lambda_{ij} = \lambda_n$ (i, $j = 1,\ 2,\ 3$; $n = 1,\ 2, \ldots$ $\ldots,\ 6$). Число независимых коэффициентов, входящих в равенства (9.28) и характеризующих упругие, электрические и тепловые свойства среды, зависит от вида симметрии кристалла. В общем случае кристалла триклинной системы уравнения (9.28) содержат 21 упругую константу, 18 пьезоэлектрических постоянных, 6 коэффициентов температурных напряжений, 6 диэлектрических констант и 3 пироэлектрических коэффициента *.

Равенства (9.15) и аналогичные им (9.19) (9.23) были получены при условии линейной зависимости механических напряжений, электрической индукции и энтропии от деформаций, напряженности электрического поля и температуры. Однако представляет интерес изучение нелинейных соотношений, которые позволяют обнаружить некоторые эффекты более высокого порядка. При исследовании эффектов второго порядка будем пренебрегать теплообменом и в качестве основных независимых переменных принимать компоненты тензора деформаций ε_{ij} и электрическую индукцию D_i. Тогда компоненты тензора напряжений σ_{ij} и напряженность электрического поля можно разложить в ряд Маклорена по переменным ε_{ij} и D_i. Ограничиваясь членами второго порядка, получаем

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m}\right)_0 D_m + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{nm}}\right)_0 \varepsilon_{kl} \varepsilon_{nm} + 2\left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial D_m}\right)_0 \varepsilon_{kl} D_m + \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial D_m \partial D_k}\right)_0 D_m D_k\right], \qquad (9.29)$$

* В монографиях [1, 2] представлены виды матриц $C_{n\beta}$, l_{nm}, ε_{mk}, λ_n, p_m для некоторых кристаллографических классов.

$$E'_m = \left(\frac{\partial E'_m}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial E'_m}{\partial D_i}\right)_0 D_i +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 E'_m}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + 2\left(\frac{\partial^2 E'_m}{\partial \varepsilon_{kl}\partial D_i}\right)_0 \varepsilon_{kl} D_i + \left(\frac{\partial^2 E'_m}{\partial D_k \partial D_i}\right)_0 D_k D_i\right]. \quad (9.30)$$

Используя дифференциальное соотношение (9.16) и вытекающие из него равенства

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E'_m = \frac{\partial U}{\partial D_m},$$

вводим следующие обозначения:

$C^D_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0$ — тензор обычных упругих постоянных;

$h_{ijm} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial D_m}\right)_0$ — тензор пьезоэлектрических констант;

$\beta^{\varepsilon}_{mk} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial D_m \partial D_k}\right)_0$ — тензор диэлектрических непроницаемостей;

$C^D_{ijklmn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{mn}}\right)_0$ — тензор нелинейных упругих постоянных шестого ранга;

$h_{ijklm} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial D_m \partial D_k}\right)_0$ — тензор нелинейных пьезоэлектрических коэффициентов;

$\varepsilon_{ijmk} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}\partial D_m}\right)_0$ — электрострикционные коэффициенты (тензор четвертого ранга);

$\beta^{\varepsilon}_{mki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial D_m \partial D_k \partial D_i}\right)_0$ — электрооптические коэффициенты (тензор третьего ранга).

При этих обозначениях выражения (9.29), (9.30) принимают вид

$$\sigma_{ij} = (C^D_{ijkl} + C^D_{ijklmn}\varepsilon_{nm} - h_{ijklm}D_m)\,\varepsilon_{kl} -$$
$$-(h_{ijm} + h_{ijklm}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ijmk}D_k)\,D_m, \quad (9.31)$$

$$E'_m = (-h_{mkl} - h_{ijklm}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{klmi}D_i)\,\varepsilon_{kl} +$$
$$+(\beta^{\varepsilon}_{mi} - \varepsilon_{klmi}\varepsilon_{kl} + \beta^{\varepsilon}_{mki}D_k)\,D_i. \quad (9.32)$$

Запись уравнений состояния в виде (9.31), (9.32) показывает, что учет эффектов второго порядка для пьезоэлектриков приводит к изменению упругих постоянных, пьезоэлектрических констант и диэлектрических не-

проницаемостей. При этом вторые и третьи слагаемые в скобках соотношений (9.31) и (9.32) можно рассматривать как соответствующие поправки к тензорам C_{ijkl}^D, h_{ijm}, β_{ml}^ε. Очевидно, что слагаемое C_{ijklmn}^D в первой скобке выражения (9.31) описывает изменение упругих постоянных в результате деформации кристалла, а слагаемое $h_{ijklm}D_m$ — изменение этих же постоянных под действием электрической индукции.

Аналогично можно считать слагаемые $h_{ijklm}\varepsilon_{kl}$ и $\varepsilon_{ijmk}D_k$ во второй скобке в выражении (9.31) и в первой скобке в выражении (9.32) поправками к пьезоэлектрическим коэффициентам, обусловленными действием деформации и электрической индукции. Изменение тензора диэлектрических непроницаемостей в результате механического деформирования и действия электрической индукции описывается соответственно слагаемыми $\varepsilon_{klmi}\varepsilon_{kl}$ и $\beta_{mki}^\varepsilon D_k$ во второй скобке выражения (9.32).

Тензор четвертого порядка описывает эффект электрострикции, состоящий в возникновении напряжений, пропорциональных квадрату электрической индукции. Тензор ε_{ijmk} симметричен по паре индексов i, j и по паре m, k, причем даже для изотропного материала этот тензор имеет ненулевые компоненты. Таким образом, в противоположность пьезоэлектрическому эффект электрострикции может наблюдаться во всех твердых диэлектриках. Особенно сильно он проявляется в некоторых сегнетоэлектриках, таких, как сегнетова соль и титанат бария, что позволяет использовать их при создании керамических пьезоэлектрических материалов. Искусственно полученные в начале 1950-х гг. пьезокерамические материалы обладают целым рядом замечательных свойств и в некоторых случаях оказываются предпочтительнее естественных пьезокристаллов. Весьма существенное достоинство пьезокерамики — возможность изготовления из нее элементов различной геометрической формы в соответствии с конструктивным назначением преобразователя.

В исходном состоянии пьезокерамика представляет собой поликристаллический твердый раствор титаната бария, цирконата-титаната свинца, содержащий в качестве связующего полимерную стеклофазу. В таком состоянии поликристаллическая керамика имеет более высокую симметрию по сравнению с симметрией отдельных кристаллов и является изотропным диэлектриком. В связи с этим поликристаллическая керамика не обладает пьезоэлектрическим эффектом. Для того чтобы она стала пьезоактивной, необходима предварительная поляризация, которая осуществляется путем создания сильного электрического поля при температуре ниже точки Кюри [4]. Под действием электрического поля происходит изменение направления поляризации доменов, в результате чего большинство из них ориентируется в направлении внешнего поля. При снятии внешнего электрического поля и охлаждении материала в керамике сохраняется поляризация, которая возникла благодаря ориентации по внешнему полю направлений поляризации отдельных доменов. Из-за такой предварительной поляризации (например, по направлению оси x_3) поликристаллическая керамика становится пьезоэлектриком, имеющим симметрию гексагонального класса 6 mn (ось x_3 является осью симметрии 6-го порядка).

9.2. Уравнения линейной электроупругости

Взаимосвязь электрических, тепловых и механических величин в пьезоэлектрической среде, выражаемая уравнениями состояния типа (9.15), описывает взаимодействие упругих, температурных и электрических полей. Подстановка соотношений (9.15) в уравнения динамики, Максвелла и теплопроводности приводит к связанной системе разрешающих уравнений

электротермоупругости. При формулировке уравнений движения пьезоэлектрической среды обычно отбрасываются массовые силы электрической природы; возникающие, например, в результате взаимодействия индуцированных токов с электромагнитным полем. Таким образом, в теории пьезоэлектрических сред уравнения движения Ньютона имеют обычный, принятый в теории упругости, вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{9.33}$$

При отсутствии тока проводимости и свободных зарядов электромагнитное поле в пьезоэлектрике описывается уравнениями Максвелла

$$\varepsilon_{ijk} E'_{j,k} + \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} H_{j,k} - \frac{\partial D_i}{\partial t} = 0, \tag{9.34}$$

$$D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0. \tag{9.35}$$

Здесь ε_{ijk} — антисимметричный единичный тензор ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{321} = 1$, $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$, остальные компоненты равны нулю); $B_i = \mu_0 H_i$ — вектор магнитной индукции; μ_0 — магнитная проницаемость.

Исключив $B_i = \mu_0 H_i$ из уравнений (9.34), можно получить уравнения, связывающие компоненты векторов D_i и E'_i:

$$E'_{k,ki} - E'_{i,kk} = -\mu_0 \frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2}. \tag{9.36}$$

Система уравнений (9.33) и (9.36) вместе с уравнениями состояния (9.55) (при соответствующих граничных и начальных условиях) используется при решении задач, связанных с излучением электромагнитных волн пьезоэлектрической средой. При этом компонент вектора напряженности магнитного поля H_i определяется из первого уравнения (9.34).

Совместные решения уравнений движения (9.33) и уравнений Максвелла (9.34), (9.35) описывают связанные упругоэлектромагнитные волны, т. е. упругие волны, сопровождаемые электрическим полем, и электромагнитные волны, сопровождаемые деформацией среды. Если скорость распространения упругой волны v, то соответствующая скорость электромагнитной волны c будет порядка $10^5\, v$, следовательно, для упругих волн можно пренебречь магнитным полем, которое обусловлено электрическим. Отсюда в большинстве задач, связанных, например, с изучением работы пьезопреобразователей и распространением электроакустических волн, допустимо пренебрежение магнитными эффектами и использование квазистатического приближения для электрического поля, т. е.

$$\varepsilon_{ijk} E'_{j,k} = -\frac{\partial B_i}{\partial t} \cong 0, \quad D_{i,i} = 0. \tag{9.37}$$

Тогда напряженность электрического поля E' выражается через скалярный потенциал φ

$$E'_i = -\varphi_{,i} \tag{9.38}$$

и полная система уравнений для линейной пьезоэлектрической среды без учета температурных эффектов получается в результате подстановки уравнений состояния (9.15) в уравнения движения (9.33) и уравнение электростатики $D_{i,i} = 0$.

Выражение для механических напряжений $\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{E'}\varepsilon_{kl} - l_{kij}E_k'$ после подстановки $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$ и соотношения, характеризующего квазистатическое электрическое поле $E_k' = -\varphi_{,k}$, принимает вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{E'}u_{k,l} + l_{kij}\varphi_{,k}. \qquad (9.39)$$

Соответственно выражение для электрической индукции будет следующим:

$$D_i = l_{ikl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k = l_{ikl}u_{k,l} - \varepsilon_{ik}^S\varphi_{,k}. \qquad (9.40)$$

С учетом (9.39) и (9.40) из уравнений (9.33) и (9.37) получим систему уравнений электроупругости

$$C_{ijkl}^{E'}u_{k,lj} + l_{kij}\varphi_{,kj} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad (9.41)$$

$$l_{ikl}u_{k,li} - \varepsilon_{ik}^S\varphi_{,ki} = 0. \qquad (9.42)$$

Используя двухиндексные обозначения для компонентов тензоров C_{ijkl}, l_{kij}, записываем уравнения (9.41) (9.42) в развернутом виде:

$$(C_{11}^{E'}u_{1,11} + C_{66}^{E'}u_{1,22} + C_{55}^{E'}u_{1,33}) + (C_{16}^{E'}u_{2,11} + C_{26}^{E'}u_{2,22} + C_{45}^{E'}u_{2,33}) +$$
$$+ (C_{15}^{E'}u_{3,11} + C_{46}^{E'}u_{3,22} + C_{35}^{E'}u_{3,33}) + 2C_{56}^{E'}u_{1,23} + 2C_{15}^{E'}u_{1,13} + 2C_{16}^{E'}u_{1,16} +$$
$$+ (C_{46}^{E'} + C_{25}^{E'})u_{2,33} + (C_{14}^{E'} + C_{56}^{E'})u_{2,13} + (C_{12}^{E'} + C_{66}^{E'})u_{2,12} +$$
$$+ (C_{36}^{E'} + C_{45}^{E'})u_{3,23} + (C_{13}^{E'} + C_{55}^{E'})u_{3,13} + (C_{14}^{E'} + C_{56}^{E'})u_{3,12} +$$
$$+ (l_{11}\varphi_{,11} + l_{62}\varphi_{,22} + l_{53}\varphi_{,33}) + (l_{63} + l_{52})\varphi_{,23} +$$
$$+ (l_{13} + l_{51})\varphi_{,13} + (l_{12} + l_{61})\varphi_{,12} = \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \qquad (9.43)$$

$$(C_{16}^{E'}u_{1,11} + C_{26}^{E'}u_{1,22}^{E'} + C_{45}^{E'}u_{1,33}) + (C_{66}^{E'}u_{2,11} + C_{22}^{E'}u_{2,22} + C_{44}^{E'}u_{2,33}) +$$
$$+ (C_{56}^{E'}u_{3,11} + C_{24}^{E'}u_{3,22} + C_{34}^{E'}u_{3,33}) + 2C_{24}^{E'}u_{2,23} + 2C_{46}^{E'}u_{2,13} +$$
$$+ 2C_{26}^{E'}u_{2,12} + (C_{25}^{E'} + C_{46}^{E'})u_{1,23} + (C_{56}^{E'} + C_{14}^{E'})u_{1,13} + (C_{12}^{E'} + C_{66}^{E'})u_{1,21} +$$
$$+ (C_{23}^{E'} + C_{44}^{E'})u_{3,23} + (C_{36}^{E'} + C_{45}^{E'})u_{3,13} + (C_{46}^{E'} + C_{25}^{E'})u_{3,12} +$$
$$+ (l_{61}\varphi_{,11} + l_{22}\varphi_{,22} + l_{43}\varphi_{,33}) + (l_{23} + l_{42})\varphi_{,23} +$$
$$+ (l_{63} + l_{41})\varphi_{,13} + (l_{62} + l_{21})\varphi_{,12} = \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \qquad (9.44)$$

$$(C_{15}^{E'}u_{1,11} + C_{46}^{E'}u_{1,22} + C_{34}^{E'}u_{2,33}) + (C_{56}^{E'}u_{2,11} + C_{24}^{E'}u_{2,22} + C_{34}^{E'}u_{2,33}) +$$
$$+ (C_{55}^{E'}u_{3,11} + C_{44}^{E'}u_{3,22} + C_{33}^{E'}u_{3,33}) + 2C_{34}^{E'}u_{3,23} + 2C_{35}^{E'}u_{3,13} +$$

$$+ 2C^{E'}_{45} u_{3,12} + (C^{E'}_{45} + C^{E'}_{36}) u_{1,23} + (C^{E'}_{55} + C^{E'}_{13}) u_{1,13} + (C^{E'}_{56} + C^{E'}_{14}) u_{1,12} +$$
$$+ (C^{E'}_{44} + C^{E'}_{23}) u_{2,23} + (C^{E'}_{45} + C^{E'}_{36}) u_{2,13} + (C^{E'}_{25} + C^{E'}_{46}) u_{2,12} +$$
$$+ (l_{51}\varphi_{,11} + l_{42}\varphi_{,22} + l_{33}\varphi_{,33}) + (l_{43} + l_{32})\,\varphi_{,23} +$$
$$+ (l_{53} + l_{31})\,\varphi_{,13} + (l_{52} + l_{41})\,\varphi_{,12} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \tag{9.45}$$

$$(l_{11}u_{1,11} + l_{62}u_{1,22} + l_{53}u_{1,33}) + (l_{61}u_{2,11} + l_{22}u_{2,22} + l_{43}u_{2,33}) +$$
$$+ (l_{51}u_{3,11} + l_{42}u_{3,22} + l_{33}u_{3,33}) + (l_{52} + l_{63})\,u_{1,23} + (l_{13} + l_{51})\,u_{1,13} +$$
$$+ (l_{21} + l_{62})\,u_{2,21} + (l_{43} + l_{32})\,u_{3,23} + (l_{53} + l_{31})\,u_{3,13} + (l_{52} + l_{41})\,u_{3,12} -$$
$$- (\varepsilon^S_{11}\varphi_{,11} + \varepsilon^S_{22}\varphi_{,22} + \varepsilon^S_{33}\varphi_{,33}) - 2\varepsilon^S_{23}\varphi_{,23} - 2\varepsilon^S_{13}\varphi_{,13} - 2\varepsilon^S_{12}\varphi_{,12} +$$
$$+ (l_{21} + l_{61})\,u_{1,12} + (l_{23} + l_{42})\,u_{2,23} + (l_{63} + l_{41})\,u_{2,13} = 0. \tag{9.46}$$

При рассмотрении пьезоэлектрических материалов определенных классов симметрии система основных уравнений электроупругости (9.43)—(9.46) значительно упрощается, так как некоторые компоненты тензоров модулей упругости, пьезоэлектрических и диэлектрических констант будут равны нулю. В частности, для пьезоэлектриков гексагональной симметрии класса 6 *mm* (типа поляризованной керамики) матрицы упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных имеют вид

$$\| C^{E'}_{n\beta} \| = \begin{Vmatrix} C^{E_i}_{11} & C^{E_i}_{12} & C^{E_i}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C^{E_i}_{12} & C^{E_i}_{11} & C^{E_i}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C^{E_i}_{13} & C^{E_i}_{13} & C^{E_i}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{E_i}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{E_i}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C^{E_i}_{11} - C^{E_i}_{12}) \end{Vmatrix},$$

$$\| l_{nk} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & l_{13} \\ 0 & 0 & l_{13} \\ 0 & 0 & l_{33} \\ 0 & l_{15} & 0 \\ l_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \| \varepsilon^s_{ij} \| = \operatorname{diag}[\varepsilon^s_{11}, \varepsilon^s_{11}, \varepsilon^s_{33}],$$

тогда уравнения состояния для пьезоэлектрической среды класса 6 *mm*

будут следующими:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}^{E'} u_{1,1} + C_{12}^{E'} u_{2,2} + C_{13}^{E'} u_{3,3} + l_{13}/\varphi_{,3};\\
\sigma_{22} &= C_{12}^{E'} u_{1,1} + C_{11}^{E'} u_{2,2} + C_{13}^{E'} u_{3,3} + l_{13}\varphi_{,3};\\
\sigma_{33} &= C_{13}^{E'} u_{1,1} + C_{13}^{E'} u_{2,2} + C_{33}^{E'} u_{3,3} + l_{33}\varphi_{,3};\\
\sigma_{23} &= C_{44}^{E'} (u_{2,3} + u_{3,2}) + l_{15}\varphi_{,2};\\
\sigma_{13} &= C_{44}^{E'} (u_{1,3} + u_{3,1}) + l_{15}\varphi_{,1};\\
\sigma_{12} &= \frac{1}{2} (C_{11}^{E'} - C_{12}^{E'}) (u_{1,2} + u_{2,1});
\end{aligned}\right\} \quad (9.47)$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= l_{15} (u_{1,3} + u_{3,1}) - \varepsilon_{11}^{S}\varphi_{,1};\\
D_2 &= l_{15} (u_{2,3} + u_{3,2}) + \varepsilon_{22}^{S}\varphi_{,2};\\
D_3 &= l_{31} (u_{1,1} + u_{2,2}) + l_{33}u_{3,3} - \varepsilon_{33}^{S}\varphi_{,3}.
\end{aligned} \quad (9.48)$$

С учетом соотношений (9.47) и (9.48) система уравнений электроупругости для пьезоэлектрической среды класса 6 *mm* (ось симметрии 6-го порядка совпадает с осью x_3) принимает вид

$$C_{11}^{E'} u_{1,11} + C_{44}^{E'} u_{1,33} + (C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) u_{3,13} + \frac{1}{2} (C_{11}^{E'} - C_{12}^{E'}) u_{1,22} + $$
$$+ \frac{1}{2} (C_{11}^{E'} + C_{12}^{E'}) u_{2,12} + (l_{13} + l_{15}) \varphi_{,13} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad (9.49)$$

$$\frac{1}{2} (C_{11}^{E'} + C_{12}^{E'}) u_{1,12} + \frac{1}{2} (C_{11}^{E'} - C_{12}^{E'}) u_{2,11} + C_{11}^{E'} u_{2,22} + C_{44}^{E'} u_{2,33} +$$
$$+ (C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) u_{3,23} + (l_{13} + l_{15}) \varphi_{,23} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \quad (9.50)$$

$$(C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) u_{1,13} + C_{44}^{E'} (u_{3,11} + u_{3,22}) + C_{33}^{E'} u_{3,33} + (C_{44}^{E'} + C_{13}^{E'}) u_{2,23} +$$
$$+ l_{15} (\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) + l_{33}\varphi_{,33} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (9.51)$$

$$(l_{15} + l_{13}) u_{1,13} + l_{15} (u_{3,11} + u_{3,22}) + l_{33}u_{3,33} + (l_{13} + l_{15}) u_{2,23} -$$
$$- \varepsilon_{11}^{S}\varphi_{,11} - \varepsilon_{11}^{S}\varphi_{,22} - \varepsilon_{33}^{S}\varphi_{,33} = 0 \quad (9.52)$$

Дальнейшее упрощение уравнений электроупругости для указанного класса симметрии возможно при исследовании, например, плоской деформации или осесимметричного состояния. Полагая в уравнениях (9.49)—(9.52) $u_2 = 0$, $u_1 = u_1 (x_1, x_2)$, $\varphi = \varphi (x_1, x_3)$, $u_3 = u_3 (x_1, x_3)$, получаем основные

уравнения плоской деформации

$$C_{11}^{E'}u_{1,11}+C_{44}^{E'}u_{1,33}+(C_{13}^{E'}+C_{44}^{E'})\,u_{3,13}+(l_{13}+l_{15})\;\varphi_{,3}=\rho\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$(C_{13}^{E'}+C_{44}^{E'})\,u_{1,33}+C_{44}^{E'}u_{3,11}+C_{33}^{E'}u_{3,33}+l_{15}\varphi_{,11}+l_{33}\varphi_{,33}=\rho\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$(l_{15}+l_{13})\,u_{1,13}+l_{15}u_{3,11}+l_{33}u_{3,33}-\varepsilon_{11}^{S}\varphi_{,11}-\varepsilon_{33}^{S}\varphi_{,33}=0. \qquad (9.53)$$

Для осесимметричного электроупругого состояния (ось симметрии совпадает с осью $z=x_3$) уравнения состояния пьезоэлектрической среды класса 6 *mm* записываются в виде

$$\sigma_{rr}=C_{11}^{E'}u_{r,r}+C_{12}^{E'}\,\frac{u_r}{r}+C_{13}^{E'}u_{z,z}+l_{31}\varphi_{,z},$$

$$\sigma_{\theta\theta}=C_{12}^{E'}\,u_{r,r}+C_{11}^{E'}\,\frac{u_r}{r}+C_{13}^{E'}u_{z,z}+l_{31}\varphi_{,z}, \qquad (9.54)$$

$$\sigma_{zz}=C_{13}^{E'}\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)+C_{33}^{E'}\,u_{z,z}+l_{33}\varphi_{,z},$$

$$\sigma_{rz}=C_{44}^{E'}\,(u_{r,z}+u_{z,r})+l_{15}\varphi_{,z},$$

$$D_r=l_{15}\,(u_{r,z}+u_{z,r})-\varepsilon_{11}^{S}\varphi_{,r},$$

$$D_z=l_{13}\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)+l_{33}u_{z,z}-\varepsilon_{33}\varphi_{,z}, \qquad (9.55)$$

где $\varphi_{,r}=\partial\varphi/\partial r,\;\; \varphi_{,z}=\partial\varphi/\partial z.$

Подставляя (9.54) и (9.55) в уравнения движения и электростатики, получаем систему дифференциальных уравнений осесимметричной задачи электроупругости

$$C_{11}^{E'}\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r}\,u_{r,r}-\frac{1}{r^2}\,u_r\right)+C_{44}^{E'}\,u_{r,zz}+(C_{13}^{E'}+C_{44}^{E'})\,u_{z,rz}+$$
$$+(l_{13}+l_{15})\;\varphi_{,rz}=\rho\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};$$

$$(9.56)$$

$$C_{44}^{E'}\left(u_{z,rr}+\frac{1}{r}\,u_{z,r}\right)+C_{33}^{E'}u_{z,zz}+\left(C_{13}^{E'}+C_{44}^{E'}\right)\left(u_{r,zr}+\frac{1}{r}\,u_{rz}\right)+$$
$$+l_{15}\left(\varphi_{,rr}+\frac{1}{r}\,\varphi_{,r}\right)+l_{33}\varphi_{,zz}=\rho\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};$$

$$l_{15}\left(u_{z,rr}+\frac{1}{r}\,u_z\right)+l_{33}u_{z,zz}+(l_{15}+l_{13})\left(u_{r,rz}+\frac{1}{r}\,u_{r,z}\right)-$$
$$-\varepsilon_{11}^{S}\left(\varphi_{,rr}+\frac{1}{r}\,\varphi_{,r}\right)-\varepsilon_{33}^{S}\varphi_{,zz}=0.$$

При решении системы уравнений (9.49)—(9.52) возможно также выделение

состояния антиплоской деформации, которое определяется равенствами $u_1 \equiv 0$; $u_2 \equiv 0$; $u_3 = u_3(x_1, x_2)$; $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$.

В этом случае система (9.49)—(9.52) сводится к уравнениям

$$C_{44}\nabla^2 u_3 + l_{15}\nabla^2\varphi = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$l_{15}\nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^S\nabla^2\varphi = 0, \tag{9.57}$$

где $\nabla^2(...) = (...)_{,11} + (...)_{,22}$.

Для учета пироэлектрического эффекта в пьезоэлектрических средах к уравнениям движения и электростатики необходимо добавить уравнение теплопроводности, которое следует из локального закона сохранения энергии

$$h_{i,i} = -T\frac{dS}{dt} \tag{9.58}$$

и феноменологического закона Фурье для анизотропного тела

$$h_i = -\lambda_{\tau ij}T_{,j}, \tag{9.59}$$

где h_i — компоненты вектора теплового потока; $\lambda_{\tau ij}$ — коэффициенты теплопроводности.

При малом изменении температуры ($\Delta T/T_0 \ll 1$) из уравнений (9.58), (9.59) с учетом последнего равенства (9.15) получим

$$\lambda_{ij}^{E'}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + p_i^{\varepsilon}\frac{\partial E'}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\Delta T}{\partial t} = \frac{\lambda_{tij}}{T_0}\Delta T_{,ij}\quad\left(\alpha = \frac{\rho C}{T_0}\right). \tag{9.60}$$

Таким образом, связанные уравнения электро- и термоупругости с учетом пьезо- и пироэлектрического эффектов будут иметь вид

$$C_{ijkl}^{E',\Delta T}u_{k,lj} + l_{mij}^{\Delta T}\varphi_{,mj} - \lambda_{ij}^{E'}\Delta T_{,j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};$$

$$l_{ikl}^{\Delta T}u_{k,li} - \varepsilon_{ij}^S\varphi_{,ij} + p_i^{\varepsilon}\Delta T_{,i} = 0; \tag{9.61}$$

$$\lambda_{ij}^{E'}\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} - p_i^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial\Delta T}{\partial t} = \frac{\lambda_{tij}}{T_0}\Delta T_{,ij}.$$

В общем случае, когда поверхность пьезоэлектрического тела граничит с внешней средой (например, с воздухом), к уравнениям (9.41) или (9.61) необходимо присоединить уравнения Максвелла для данной среды и учесть непрерывность касательной составляющей вектора напряженности электрического поля E_i' и нормальной составляющей вектора электрической индукции D_i на поверхность раздела S' если на ней нет свободных электрических зарядов. В частном случае, когда внешняя среда является вакуумом или воздухом, для которого диэлектрическая проницаемость значительно меньше постоянных ε_{ij}^S для некоторых пьезоактивных материалов, условие непрерывности нормальной составляющей вектора D_i можно заменить приближенным равенством [5, 6]

$$D_i n_i \cong 0 \quad \text{на} \quad S', \tag{9.62}$$

где n_i — компонент единичной нормали к поверхности S'.

Для пьезоэлектрических материалов, подобных поляризованным керамикам, $\varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0 = 700 \div 1000$, $\varepsilon_{33}^S/\varepsilon_0 = 700 \div 850$, следовательно, на границе пьезокерамики с вакуумом можно использовать приближенное условие (9.62).

Для определения граничных условий составляющих электрического поля на берегах трещины, расположенной в пьезоэлектрической среде, воспользуемся решением элементарной плоской задачи о распределении электрического поля в изотропном диэлектрике с эллиптическим отверстием при наличии постоянного электрического поля напряженностью E_0' на бесконечности (рис. 9.2). Если ввести эллиптическую систему координат ξ, η

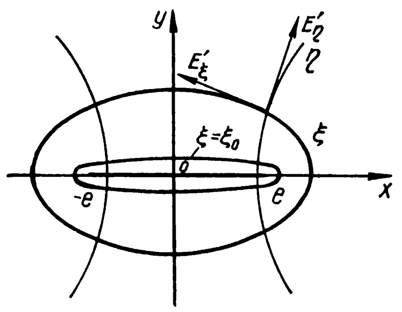


Рис. 9.2. Эллиптическая система координат, нанесенная на среду с трещиной.

$$x + iy = l\,\mathrm{ch}\,(\xi + i\eta)$$

$$(\xi_0 < \xi < \infty, \quad -\pi < \eta < \pi), \tag{9.63}$$

то из решения уравнений электростатики для области диэлектрика с диэлектрической постоянной ε_1 и для отверстия с диэлектрической постоянной ε_0 (ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума) получим следующие выражения для потенциала:

$$\varphi_1(\xi, \xi_0, \eta) = -E_0' l\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta - \frac{(1 - \varepsilon_0/\varepsilon_1)\, E_0' l e^{\xi_0}\mathrm{ch}\,\xi_0}{[(\varepsilon_0/\varepsilon_1)\,\mathrm{cth}\,\xi_0 + 1]}\, e^{\xi}\sin\eta$$

$$(\xi_0 < \xi < \infty); \tag{9.64}$$

$$\varphi_0(\xi, \xi_0, \eta) = -\frac{\varepsilon_1 E_0' l e^{\xi_0}\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta}{(\varepsilon_0\mathrm{ch}\,\xi_0 + \varepsilon_1\mathrm{sh}\,\xi_0)} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0). \tag{9.65}$$

Решения (9.64), (9.65) получены с использованием условия непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции и касательной составляющей напряженности электрического поля на границе диэлектрика и вакуума. Кроме того, для области отверстия предполагалось, что

$$\varphi_0(0, \xi_0, \eta) = \varphi_0(0, \xi_0, -\eta),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_0(\xi, \xi_0, \eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = -\left.\frac{\partial\varphi_0(\xi, \xi_0, -\eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}. \tag{9.66}$$

Соответствующие выражениям (9.64) и (9.65) компоненты вектора напряженности электрического поля будут иметь вид

$$E_{1\xi}'(\xi, \xi_0, \eta) = \frac{E_0'\mathrm{ch}\,\xi \sin\eta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta}} -$$

$$- \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, E_0 e^{\xi_0}\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta}\,(\varepsilon_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0 + \varepsilon_1\mathrm{sh}\,\xi_0)}\, e^{-\xi}\sin\eta, \tag{9.67}$$

$$E'_{1\eta}(\xi, \xi_0, \eta) = \frac{E'_0 \operatorname{sh}\xi \cos\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}} +$$

$$+ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_0 e^{\xi_0} \operatorname{sh}\xi_0 \operatorname{ch}\xi_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}\,(\varepsilon_0 \operatorname{ch}\xi_0 + \varepsilon_1 \operatorname{sh}\xi_0)} e^{-\xi}\cos\eta \qquad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty);$$

$$E'_{1\xi}(\xi, \xi_0, \eta) = \frac{\varepsilon_1 E'_0 e^{\xi_0} \operatorname{ch}\xi \sin\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}\,(\varepsilon_0 \operatorname{ch}\xi_0 + \varepsilon_1 \operatorname{sh}\xi_0)}, \tag{9.68}$$

$$E'_{1\eta}(\xi, \xi_0, \eta) = \frac{\varepsilon_1 E'_0 e^{\xi_0} \operatorname{sh}\xi \cos\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}\,(\varepsilon_0 \operatorname{ch}\xi_0 + \varepsilon_1 \operatorname{sh}\xi_0)} \qquad (0 \leqslant \xi < \xi_0).$$

Если пренебречь раскрытием берегов трещины под действием механической нагрузки, то, рассматривая трещину как математический разрез и полагая $\xi_0 \to 0$ в уравнениях (9.67), получаем условия, выражающие непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции $D_{1\xi}(\xi, 0, \eta) = \varepsilon_1 E'_{1\xi}(\xi, 0, \eta)$ и касательной составляющей напряженности электрического поля $E'_{1\eta}(\xi, 0, \eta)$ на линии разреза [25].

Таким образом, предположение о наличии трещины в форме математического разреза не изменяет однородное электрическое поле, заданное на бесконечности. Однако для реальных трещин, имеющих конечное раскрытие под действием механической нагрузки, электрический потенциал на берегах трещины не будет непрерывным, если учесть, что отношение $\varepsilon_0/\varepsilon_1$ при таких условиях мало. Для материалов, например, подобных пьезокерамике, величина $\varepsilon_0/\varepsilon_1$ имеет порядок 10^{-3}, причем даже малое раскрытие трещины (порядка 10^3) приводит к тому, что величина $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \operatorname{cth}\xi_0$ будет сравнима с единицей. Так как на основании равенства (9.64) скачок потенциала на берегах раскрытой трещины определяется уравнением

$$\varphi_1(\xi_0, \xi_0, \eta) - \varphi_1(\xi_0, \xi_0, -\eta) = -2E'_0 l \sin\eta \left[\frac{(1 - \varepsilon_0/\varepsilon_1)\operatorname{ch}\xi_0}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\operatorname{cth}\xi_0 + 1\right)} + \operatorname{sh}\xi_0 \right], \tag{9.69}$$

то при $\xi_0 \sim 10^{-3}$ и $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \sim 10^{-3}$ получаем

$$\varphi_1(\xi_0, \xi_0, \eta) - \varphi_1(\xi_0, \xi_0, -\eta) \cong -E'_0 l \sin\eta. \tag{9.70}$$

Следовательно, условие непрерывности электрического потенциала на берегах трещины не выполняется для реальных раскрытых трещин в материалах с большим (по сравнению с вакуумом) значением диэлектрической постоянной. В этом случае можно рассматривать трещину как полость, заполненную вакуумом (воздухом), и при малых значениях отношения $\varepsilon_0/\varepsilon_1$ использовать условие равенства нулю нормальной составляющей вектора электрической индукции на линии трещины. Данное условие получается из первой формулы (9.67), если полагать $\varepsilon_0 = 0$. Тогда

$$E'_{1\xi}(\xi, \xi_0, \eta) = \frac{E'_0 \sin\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}} \left[\operatorname{ch}\xi - e^{-(\xi - \xi_0)} \operatorname{ch}\xi_0\right]$$

и при $\xi \to \xi_0$ будем иметь

$$D_{1\xi}(\xi_0, \xi_0, \eta) = \varepsilon_1 E'_{1\xi}(\xi_0, \xi_0, \eta) = 0. \tag{9.71}$$

При $\varepsilon_0 = 0$ скачок электрического потенциала, определенный по формуле (9.69), будет ненулевым и равным

$$\varphi_1(\xi_0, \xi_0, \eta) - \varphi_1(\xi_0, \xi_0, -\eta) \cong -2E'_0 l \sin \eta. \tag{9.72}$$

9.3. О применении методов механики разрушения к пьезоэлектрическим материалам. ПК-критерий и инвариантный Г-интеграл

Наличие в реальных материалах дефектов (трещин, надрезов, узких полостей и т. д.) может привести в некоторых случаях к их быстрому развитию и разрушению всего тела. Математическая теория трещин, основанная на энергетическом подходе А. А. Гриффитса, оказалась весьма плодотворной для теоретического изучения различных аспектов процесса разрушения и при разработке практических методов расчета на прочность элементов конструкций. К настоящему времени достигнут также существенный прогресс в исследовании разрушения материалов при действии механических и тепловых нагрузок. Однако разрушение материалов при наличии связанных полей различной природы (например, упругого, теплового и электрического) до сих пор изучено недостаточно. Поэтому представляет интерес обобщение методов механики разрушения на пьезоэлектрические материалы.

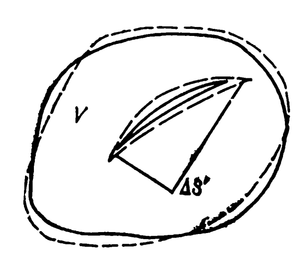


Рис. 9.3. Два деформированных состояния пьезоэлектрического тела с трещиной (сплошная линия — состояние «0», штриховая — состояние «1»).

В теории трещин наиболее важна формулировка условия локального разрушения в данной точке контура трещины [7, 8]. Это условие можно, например, получить в результате определения потока энергии при образовании новой поверхности разрыва.

Рассмотрим два деформированных состояния пьезоэлектрического тела объемом V, содержащего трещину произвольной формы. Будем предполагать, что объемные силы и свободные заряды отсутствуют. Пусть $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ — компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора смещений, а также электрический потенциал в некотором начальном состоянии тела «0», а $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ — соответствующие величины в состоянии «1», для которого часть двусторонней поверхности S' трещины получает приращение $\Delta S'$ (рис. 9.3). Запишем выражения для внутренней энергии тела в состояниях «0» и «1»

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)} + E_j'^{(k)} D_j^{(k)})\, dV \tag{9.73}$$

и найдем приращение внутренней энергии при переходе из состояния «0»

в состояние «1»

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int\limits_V [\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)} + E_j'^{(1)}D_j^{(1)} - \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} - E_j'^{(0)}D_j^{(0)}]\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V [(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(0)}) + (E_j'^{(1)} + E_j'^{(0)})(D_j^{(1)} - D_j^{(0)})]\,dV -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_V [\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)} + E_j'^{(0)}D_j^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)} - E_j'^{(1)}D_j^{(0)}]\,dV. \qquad (9.74)$$

Учитывая соотношение взаимности

$$\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)} + E_j'^{(0)}D_j^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(0)} + E_j'^{(1)}D_j^{(0)}, \qquad (9.75)$$

преобразовываем формулу (9.74) следующим образом:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int\limits_V [(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(0)}) + (E_j'^{(1)} + E_j'^{(0)})(D_j^{(1)} - D_j^{(0)})]\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V [((\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)})(u_{ij}^{(1)} - u_{ij}^{(0)}))_{,j} - ((D_j^{(1)} - D_j^{(0)})(\varphi^{(1)} + \varphi^{(0)}))_{,j}]\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S+\Delta S'} [(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)})\,n_j(u_i^{(1)} + u_i^{(0)}) - (D_j^{(1)} - D_j^{(0)})\,n_j(\varphi^{(1)} + \varphi^{(0)})]\,dS'.$$

Здесь учтено, что $\sigma_{ij,j}^{(k)} = 0$, $D_{i,i}^{(k)} = 0$, $E_j'^{(k)} = -\varphi_{,j}^{(k)}$ $(k = 0, 1)$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\Delta U = \Delta A_{S'} + \frac{1}{2}\int\limits_{S'} (\sigma_{ij}^{(0)}\,n_j u_i^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(0)} - D_j^{(1)} n_j \varphi^{(0)} + D_j^{(0)} n_j \varphi^{(1)})\,dS' +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta S'} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)})\,n_j(u_i^{(1)} - u_i^{(0)})\,dS' - \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta S'} (D_j^{(1)} - D_j^{(0)})\,n_j \times$$

$$\times (\varphi^{(1)} + \varphi^{(0)})\,dS', \qquad (9.76)$$

где

$$\Delta A_{S'} = \frac{1}{2}\int\limits_{S'} (\sigma_{ij}^{(1)}\,n_j u_i^{(1)} - D_i^{(1)} n_j \varphi^{(1)})\,dS - \frac{1}{2}\int\limits_{S'} (\sigma_{ij}^{(0)}\,n_j u_i^{(0)} - D_j^{(1)} n_j \varphi^{(0)})\,dS'$$

— приращение работы внешних сил и электрического поля на поверхности S'. Используя соотношение (9.75), легко показать, что

$$\int\limits_{S'} [\sigma_{ij}^{(0)}\,n_j u_i^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)}\,n_j u_i^{(0)} - D_j^{(1)} n_j \varphi^{(0)} + D_j^{(0)} n_j \varphi^{(1)}]\,dS' = 0.$$

Кроме того, с учетом непрерывности $u_i^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$, $D_i^{(0)}$ имеем

$$\int\limits_{\Delta S'} \sigma_{ij}^{(0)}\,n_j u_i^{(0)} dS' = 0, \quad \int\limits_{\Delta S'} D_j^{(0)} n_j \varphi^{(0)} dS' = 0.$$

Таким образом, при отсутствии внешней нагрузки на поверхности трещины получим

$$\Delta U = \Delta A_{\Delta S'} + \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S} \sigma_{ij}^{(0)} n_j u_i^{(1)} dS' + \frac{1}{2} D_j^{(0)} n_j \varphi^{(1)} dS' -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S'} D_j^{(1)} n_j (\varphi^{(1)} + \varphi^{(0)})\, dS'.$$

Величина

$$\Delta A_{\Delta S'} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S} (\sigma_{ij}^{(0)} n_j u_i^{(1)} + D_j^{(0)} n_j \varphi^{(1)})\, dS' - \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S'} D_j^{(1)} n_j (\varphi^{(1)} + \varphi^{(0)})\, dS', \tag{9.77}$$

входящая в приращение внутренней энергии, определяет поток энергии при образовании разрыва $\Delta S'$, причем интегрирование в равенстве (9.77) совершается по двум поверхностям $\Delta S_1'$ и $\Delta S_2'$ дополнительного разрыва, а нормали на $\Delta S_1'$ и $\Delta S_2'$ направлены внутрь трещины. С учетом формулы (9.77) запишем условие распространения трещины [9]

$$\gamma (\Delta S_1' + \Delta S_2') = -\Delta A_{\Delta S'}. \tag{9.78}$$

Выполняя интегрирование по двусторонней поверхности $\Delta S'$ в формуле (9.77), получаем с учетом непрерывности $\varphi^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)} n_j$, $D_j^{(0)} n_j$ на $\Delta S'$ следующее выражение:

$$\Delta A_{\Delta S'} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_1'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j (u_i^{(1)+} - u_i^{(1)-})\, dS' +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_1'} D_j^{(0)} n_j (\varphi^{(1)+} - \varphi^{(1)-})\, dS' - \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_1'} (D_j^{(1)+} \varphi^{(1)+} - D_j^{(1)-} \varphi^{(1)-}) \times$$

$$\times n_j dS' - \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_1'} (D_j^{(1)+} - D_j^{(1)-})\, n_j \varphi^{(0)}\, dS'. \tag{9.79}$$

Знаки $\pm$ здесь соответствуют предельным значениям величин $u_i^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, $D_j^{(1)}$ на двусторонней поверхности $\Delta S'$, а интегрирование ведется по одной стороне этой поверхности.

Формулировка критерия распространения трещины в пьезоэлектрической среде, очевидно, зависит от вида граничных условий для компонентов электрического поля на линии трещины. Если принимать условие непрерывности электрического потенциала $\varphi^{(1)}$ и нормальной составляющей вектора электрической индукции $D_j^{(1)} n_j$ на поверхности $\Delta S'$ [25], то поток энергии при образовании разрыва будет определяться по формуле

$$\Delta A_{\Delta S'} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta S_1'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j (u_i^{(1)+} - u_i^{(1)-})\, dS'. \tag{9.80}$$

В этом случае условие (9.78) можно записать в виде

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta S_1' \to 0} \frac{1}{\Delta S_1'} \int\limits_{\Delta S_1'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j (u_i^{(1)+} - u_i^{(1)-})\, dS'. \tag{9.81}$$

Следовательно, с учетом непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора электрической индукции на линии трещины условие локального разрушения для пьезоэлектрической среды совпадает с известным условием разрушения упругого тела [9].

Как отмечалось выше (см. п. 9.2), на берегах раскрытой трещины в пьезоэлектрических материалах, подобных поляризованной керамике, возникает скачок электрического потенциала. Поэтому для расчета трещин в пьезокерамике можно использовать условия $D_j' n_j \cong 0$ на $\Delta S_1'$, с учетом которого из формулы (9.78) получается

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta S_1' \to 0} \frac{1}{\Delta S_1'} \int\limits_{\Delta S_1'} [\sigma_{ij}^{(0)} n_j (u_i^{(1)+} - u_i^{(1)-}) + D_j^{(0)} n_j (\varphi^{(1)+} - \varphi^{(1)})]\, dS'. \tag{9.82}$$

В малой (по сравнению с размерами тела и трещины) окрестности произвольной точки контура трещины среда находится в условиях плоской задачи, и при изучении процесса деформирования можно рассматривать трещину как полубесконечную и прямолинейную. При этом для напряжений, смещений, электрического потенциала и напряженности электрического поля можно использовать соответствующие асимптотические представления в малой окрестности точки контура трещины.

Пусть пьезоэлектрическая среда отнесена к произвольно ориентированной прямоугольной системе координат x_k $(k = 1, 2, 3)$, а прямолинейная трещина шириной $2l$ $(|x_1| < l)$ расположена в плоскости $x_2 = 0$. Предполагая, что электроупругое состояние не зависит от координаты x_3, а на берегах трещины отсутствует механическая нагрузка и выполняется приближенное равенство $D_j n_j \cong 0$, условие распространения трещины (9.82) запишем так:

$$2\gamma = \frac{1}{2} \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \int\limits_{l}^{l+\Delta l} \{\sigma_{i2}^{+}(x_1, 0, l)\, [u_i(x_1, 0, l+\Delta l)] + \\ + D_2^{+}(x_1, 0, l)\, [\varphi(x_1, 0, l+\Delta l)]\}\, dx_1. \tag{9.83}$$

Здесь $\sigma_{i2}^{+}(x_1, 0, l)$, $D_2^{+}(x_1, 0, l)$—компоненты напряжений и нормальная составляющая вектора электрической индукции на продолжении трещины длины $2l$; $[u_i]$, $[\varphi]$ — скачок вектора смещений и электрического потенциала на трещине длиной $2(l + \Delta l)$. Второе слагаемое в правой части формулы (9.83) будет равно нулю, если принять условие непрерывности электрического потенциала на линии трещины. Таким образом, для пьезоэлектрических материалов (подобных поляризованной керамике) получается условие разрушения (ПК-критерий), отличное от условия (9.81).

Край трещины является своеобразным энергостоком освобождающейся энергии, распределенным вдоль контура трещины. Следуя работам [7, 10], введем вектор плотности энергостока $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ для пьезоэлектрической среды в условиях плоской статической задачи. Компоненты Γ_k $(k =$

$= 1, 2)$ этого вектора определяются по формулам

$$\Gamma_k = \oint_C [H_{nk} - \sigma_{ij} n_i u_{j,k} + D_i n_i E'_k]\, dS, \tag{9.84}$$

где C — произвольный замкнутый контур, окружающий конец трещины; $H = U - E'_i D_i$ — электрическая энтальпия; n_k — компоненты вектора единичной нормали к C. Покажем, что интегралы Γ_k не зависят от выбора контура C, если на поверхности трещины выполняются условия $D_i n_i = 0$, $\sigma_{ij} n_j = 0$. Для этого рассмотрим интеграл Γ_1 по замкнутому контуру, состоящему из произвольных кривых C, C_1 и прямолинейных участков на берегах трещины (рис. 9.4). Учитывая, что подынтегральное выражение в (9.84) равно нулю на краях трещины, и принимая во внимание равенства $\sigma_{ij,j} = 0$, $D_{i,i} = 0$, $H_k = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} - D_i E'_{i,k}$, получаем

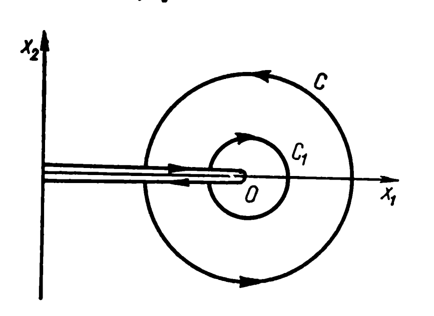


Рис. 9.4. Замкнутый контур, состоящий из произвольных кривых C и C_1 и прямолинейных участков на берегах трещины.

$$\Gamma_1|_C - \Gamma_1|_{C_1} = \oint_{C+C_1} [H_{n1} - \sigma_{ij} n_i u_{j,1} + D_i n_i E'_1]\, dS =$$

$$= \iint_D [H_{,1} - (\sigma_{ij} u_{j,1})_{,i} + (D_i E'_1)_{,1}]\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_D [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} - D_i E'_{i,1} - \sigma_{ij} u_{j,1i} + D_i E'_{1,i}]\, dx_1 dx_2 = 0. \tag{9.85}$$

Аналогично можно показать независимость от выбора контура C интеграла Γ_2.

Если развитие трещины в пьезоэлектрической среде происходит в ее первоначальной плоскости $x_2 = 0$, то условие разрушения принимает вид

$$\Gamma_1 = 2\gamma. \tag{9.86}$$

В общем случае анизотропии материала величина γ зависит, очевидно, от положения точки 0 и ориентации плоскости трещины в этой точке. Для трещины, которая отклоняется на угол θ от своего первоначального положения, величина энергостока равна проекции вектора Γ на направление роста трещины, тогда критерий, определяющий начало развития трещины, будет

$$\Gamma_1 \cos\theta + \Gamma_2 \sin\theta = 2\gamma(\theta), \tag{9.87}$$

где $\gamma(\theta)$ — определяемая из эксперимента функция.

9.4. Решение задач механики разрушения при наличии электрического поля

Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с прямолинейной трещиной [29]. Рассмотрим пьезоэлектрическую среду, отнесенную к произвольно ориентированной прямоугольной системе координат x_k ($k = 1, 2, 3$). Пусть в плоскости $x_2 = 0$ расположена прямолинейная туннельная трещина шириной $2l$ ($|x_1| < l$), в которой края ориентированы в направлении оси x_3. и пусть на бесконечности заданы компоненты вектора механического смещения и электрический потенциал

$$u_k^{(0)} = A_k^{(0)} x_1 + B_k^{(0)} x_2, \quad \varphi^{(0)} = C_0 x_1 + D_0 x_2, \tag{9.88}$$

где $A_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, C_0, D_0 — известные постоянные. Формулы (9.88) определяют однородное на бесконечности электроупругое состояние, для которого тензор напряжений и вектор электрической индукции имеют вид

$$\sigma_{\beta j}^{(0)} = C_{\beta jk1} A_k^{(0)} + C_{\beta jk2} B_k^{(0)} + e_{1\beta j} C_0 + e_{2\beta j} D_0,$$

$$D_\beta^{(0)} = e_{\beta k1} A_k^{(0)} + e_{\beta k2} B_k^{(0)} - \varepsilon_{\beta 1}^{(S)} C_0 - \varepsilon_{\beta 2}^{(S)} D_0 \quad (\beta, j = 1, 2, 3). \tag{9.89}$$

Искомое электроупругое состояние пьезоэлектрической среды представим в виде суммы однородного решения (9.88) и величин u_k, φ ($k = 1, 2, 3$), которые обеспечивают соответствующие граничные условия в плоскости трещины. Предполагая, что компоненты u_k ($k = 1, 2, 3$) и электрический потенциал φ не зависят от координаты x_3, записываем уравнения равновесия и электростатики пьезоэлектрического тела в виде

$$C_{\beta 1k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + (C_{\beta 1k2} + C_{\beta 2k1}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{\beta 2k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} +$$

$$+ e_{1\beta 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + (e_{1\beta 2} + e_{2\beta 1}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{2\beta 2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3); \tag{9.90}$$

$$e_{1k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + (e_{1k2} + e_{2k1}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{2k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} -$$

$$- \varepsilon_{11}^{(S)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 2\varepsilon_{12}^{(S)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \varepsilon_{22}^{(S)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0. \tag{9.91}$$

При формулировке условий в плоскости трещины $x_2 = 0$ необходимо учесть, что в общем случае анизотропии материала напряженное состояние и электрическое поле в окрестности трещины не обладают симметрией относительно плоскости $x_2 = 0$, поэтому необходимо рассматривать решения уравнений (9.90), (9.91) отдельно для $x_2 > 0$ и для $x_2 < 0$.

Применяя преобразование Фурье по x_1, получаем из уравнений (9.90) и (9.91) следующие выражения для смещений и электрического потенциала:

$$u_k^{\pm}(x_1, x_2) = 2\mathrm{Re} \int_0^\infty e^{-i\upsilon x_1} \sum_{s=1}^{4} a_{ks}^{\pm} C_s^{\pm}(\upsilon)\, e^{\mp \upsilon p_s^{\pm} x_2} d\upsilon \quad (k = 1, 2, 3); \tag{9.92}$$

$$\varphi^{\pm}(x_1, x_2) = 2\text{Re}\int\limits_0^\infty e^{-i\upsilon x_1}\sum_{s=1}^4 a_{4s}^{\pm}C_s^{\pm}(\upsilon)\, e^{\pm\upsilon p_s^{\pm}x_2}d\upsilon. \qquad (9.93)$$

Здесь $p_s^+ = p_s$, $p_s^- = \bar{p}_s$, $p_s = p_s^{(1)} + ip_s^{(2)}$ — корни характеристического уравнения линейной системы уравнений ($p_s^{(1)} > 0$)

$$[-C_{\beta 1k1} + (C_{\beta 1k2} + C_{\beta 2k1})\, ip + C_{\beta 2k2}p^2]\, a_k - [e_{1\beta 1} -$$

$$-(e_{1\beta 2} + e_{2\beta 1})\, ip - e_{2\beta 2}p^2]\, a_4 = 0 \quad (\beta,\ k = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3, 4), \qquad (9.94)$$

$$[-e_{1k1} + (e_{1k2} + e_{2k1})\, ip + e_{2k2}p^2]\, a_k - [-\varepsilon_{11}^{(S)} + 2i\varepsilon_{12}^{(S)}p + \varepsilon_{22}^{(S)}p^2]\, a_4 = 0;$$

a_{ks}, a_{4s} — значения a_k, a_4, удовлетворяющие уравнению (9.94) при

$$p = p_s,\ a_{ks}^+ = a_{ks},\ a_{ks}^- = \bar{a}_{ks},\ a_{4s}^+ = a_{4s},\ a_{4s}^- = \bar{a}_{4s};\ C_s^{\pm}(\upsilon) -$$

искомые функции, определяемые из граничных условий, а знаки $\pm$ относятся к верхней ($x_2 > 0$) и нижней ($x_2 < 0$) полуплоскостям соответственно.

Используя формулы плоской задачи

$$\sigma_{\beta j} = C_{\beta jk1}\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + C_{\beta jk2}\frac{\partial u_k}{\partial x_2} + e_{1\beta j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + e_{2\beta j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad (9.95)$$

$$D_\beta = e_{\beta k1}\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + e_{\beta k2}\frac{\partial u_k}{\partial x_2} - \varepsilon_{\beta 1}^{(S)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \varepsilon_{\beta 2}^{(S)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad (9.96)$$

определяем с помощью выражений (9.92) и (9.93) компоненты механических напряжений и вектора электрической индукции для верхней и нижней полуплоскостей:

$$\sigma_{2j}^+ = 2\text{Re}\int\limits_0^\infty\sum_{s=1}^4 \upsilon C_s^+(\upsilon)\, [-C_{\beta jk1}a_{ksi} - C_{\beta jk2}a_{ks}p_s -$$

$$-ie_{1\beta j}a_{4s} - e_{2\beta j}a_{4s}p_s]\, e^{-i\upsilon x_1 - \upsilon p_s x_2}d\upsilon;$$

$$D_\beta^+ = 2\text{Re}\int\limits_0^\infty\sum_{s=1}^4 \upsilon C_s^{(+)}(\upsilon)\, [-e_{\beta k1}a_{ks}i - e_{\beta k2}a_{ks}p_s +$$

$$+ i\varepsilon_{\beta 1}^{(S)}a_{4s} + \varepsilon_{\beta 2}^{(S)}a_{4s}p_s]\, e^{-i\upsilon x_1 - \upsilon p_s x_2}d\upsilon; \qquad (9.97)$$

$$\sigma_{\beta j}^- = 2\text{Re}\int\limits_0^\infty\sum_{s=1}^4 \upsilon C_s^-(\upsilon)\, [-C_{\beta jk1}\bar{a}_{ks}i + C_{\beta jk2}\bar{a}_{ks}\bar{p}_s -$$

$$-ie_{1\beta j}\bar{a}_{4s} + e_{2\beta j}\bar{a}_{4s}p_s]\, e^{-i\upsilon x_1 + \upsilon p_s x_2}d\upsilon; \qquad (9.98)$$

$$D_\beta^- = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \sum_{s=1}^4 vC_s^-(v)\,[-e_{\beta k1}\bar{a}_{ks}i + e_{\beta k2}\bar{a}_{ks}\bar{p}_s +$$

$$+ i\varepsilon_{\beta 1}^{(s)}\bar{a}_{4s} - \varepsilon_{\beta 2}^{(s)}\bar{a}_{4s}\bar{p}_s]\, e^{-ivx_1+v\bar{p}_s x_2}dv.$$

Составляющие вектора напряженности электрического поля при $x_2 >$ > 0 и при $x_2 < 0$ определяются по формулам

$$E_1^+ = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \sum_{s=1}^4 vC_s^+(v)\, ia_{4s}e^{-ivx_1-vp_sx_2}dv;$$

$$E_2^+ = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \sum_{s=1}^4 vC_s^+(v)\, a_{4s}p_se^{-ivx_1-vp_sx_2}dv; \tag{9.99}$$

$$E_1^- = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty vC_s^-(v)\, i\bar{a}_{4s}e^{-ivx_1+v\bar{p}_sx_2}dv;$$

$$E_2^- = -\,2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty vC_s^-(v)\, \bar{a}_{4s}\bar{p}_se^{-ivx_1+v\bar{p}_sx_2}dv. \tag{9.100}$$

Перейдем к формулировке граничных условий в плоскости $x_2 = 0$. Очевидно, что вне трещины ($x_2 = 0$, $|x_1| > l$) должны быть непрерывными компоненты смещений, напряжения, а также составляющие $E_1(x_1, 0)$ и $D_2(x_1, 0)$. Будем считать, что на берегах трещины отсутствует механическая нагрузка. Вид электрических граничных условий на берегах трещины зависит от величины $\varepsilon_{ij}^{(s)}/\varepsilon_0$ и относительного раскрытия трещины w. В связи с этим рассмотрим сначала решение указанной задачи при условиях, которые соответствуют непрерывности $E_1(x_1, 0)$ и $D_2(x_1, 0)$ на линии трещины. Если использовать приближенную оценку для скачка электрического потенциала на берегах раскрытой трещины [27, 29], то можно считать, что данные условия реализуются в пьезоэлектрических материалах, для которых $\varepsilon_{ij}^{(s)}/\varepsilon_0 \sim 10$ и $\omega \sim 10^{-3}$. Таким образом, будем искать решение задачи при условиях вида

$$\sigma_{2k}^+(x_1, 0) - \sigma_{2k}^-(x_1, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \tag{9.101}$$

$$D_2^+(x_1, 0) - D_2^-(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| < \infty), \tag{9.102}$$

$$E_1^+(x_1, 0) - E_1^-(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| < \infty), \tag{9.103}$$

$$\sigma_{2k}^+(x_1, 0) = -\,\sigma_{2k}^{(0)} \quad (|x_1| < l),$$

$$u_k^+(x_1, 0) - u_k^-(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| > l;\quad k = 1, 2, 3). \tag{9.104}$$

На основании равенств (9.97), (9.98) из формул (9.101)—(9.104) получим

$$\sum_{s=1}^{4} [ie_{2k1}(C_s^+(v)a_{ks} - C_s^-(v)\bar{a}_{ks}) + e_{2k2}(C_s^+(v)a_{ks}p_s +$$

$$+ C_s^-(v)\bar{a}_{ks}\bar{p}_s) - i\varepsilon_{21}^{(s)}(C_s^+(v)a_{4s} - C_s^-(v)\bar{a}_{4s}) -$$

$$- \varepsilon_{22}^{(s)}(C_s^+(v)a_{4s}p_s + C_s^-(v)\bar{a}_{4s}\bar{p}_s)] = 0; \qquad (9.105)$$

$$\sum_{s=1}^{4} [ie_{122}(C_s^+(v)a_{4s} - C_s^-(v)\bar{a}_{4s} + e_{222}(C_s^+(v)a_{4s}p_s +$$

$$+ C_s^-(v)\bar{a}_{4s}p_s) + iC_{22k1}(C_s^+(v)a_{ks} - C_s^-(v)\bar{a}_{ks}) + C_{22k2})C_s^+a_{ks}\bar{p}_s +$$

$$+ C_s^-(v)\bar{a}_{ks}\bar{p}_s)] = 0; \qquad (9.106)$$

$$\sum_{s=1}^{4} [iC_{12k1}(C_s^+(v)a_{ks} - C_s^-(v)a_{ks}) + C_{12k2}(C_s^+(v)a_{ks}p_s +$$

$$+ C_s^-(v)\bar{a}_{ks}\bar{p}_s) + ie_{112}(C_s^+(v)a_{4s} - C_s^-(v)\bar{a}_{4s}) +$$

$$+ e_{212}(C_s^+(v)a_{4s}p_s + C_s^-(v)\bar{a}_{4s}\bar{p}_s)] = 0; \qquad (9.107)$$

$$\sum_{s=1}^{4} [iC_{23k1}(C_s^+(v)a_{ks} - C_s^-(v)\bar{a}_{ks}) + C_{23k2}(C_s^+(v)a_{ks}p_s +$$

$$+ C_s^-(v)\bar{a}_{ks}\bar{p}_s) + ie_{123}(C_s^+(v)a_{4s} - C_s^-(v)\bar{a}_{4s}) +$$

$$+ e_{223}(C_s^+(v)a_{4s}p_s + C_s^-(v)\bar{a}_{4s}\bar{p}_s)] = 0; \qquad (9.108)$$

$$\sum_{s=1}^{4} (C_s^+(v)a_{4s} - C_s^-(v)\bar{a}_{4s}) = 0. \qquad (9.109)$$

Если ввести обозначения

$$N_m(v) = \sum_{s=1}^{4} (C_s^+(v)a_{ms} - C_s^-(v)\bar{a}_{ms}),$$

$$M_m(v) = \sum_{s=1}^{4} (C_s^+(v)a_{ms}p_s + C_s^-(v)a_{ms}p_s) \quad (m = 1, 2, 3, 4), \qquad (9.110)$$

то из равенств (9.105) — (9.109) находим

$$N_4(v) = 0, \quad M_m(v) = -i\sum_{j=1}^{4} t_{mj}N_j(v) \quad (m = 1, 2, 3, 4). \qquad (9.111)$$

Здесь t_{mj} — элементы матрицы $R = R_1^{-1} R_2$, где

$$R_1 = \begin{pmatrix} e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\varepsilon_{22}^{S} \\ C_{2212} & C_{2222} & C_{2232} & e_{222} \\ C_{1212} & C_{1222} & C_{1232} & e_{212} \\ C_{2312} & C_{2322} & C_{2332} & e_{223} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} e_{211} & e_{221} & e_{231} & -\varepsilon_{21}^{(s)} \\ C_{2211} & C_{2221} & C_{2231} & e_{122} \\ C_{1211} & C_{1221} & C_{1231} & \varepsilon_{112} \\ C_{2311} & C_{2321} & C_{2331} & e_{123} \end{pmatrix}.$$

С учетом (9.111) формулы (9.110) можно записать в матричном виде

$$\begin{gathered} AC^{+}(\upsilon) - \overline{A}C^{-}(\upsilon) = N(\upsilon), \\ APC^{+}(\upsilon) + \overline{AP}C^{-}(\upsilon) = -iRN(\upsilon), \end{gathered} \qquad (9.112)$$

где $A = \| a_{mn} \|$ $(m, n = 1, 2, 3, 4)$, $P = \operatorname{diag} \| p_1, \dots, p_4 \|$, $C^{\pm}(\upsilon) = \{C_1^{\pm}(\upsilon), \dots, C_4^{\pm}(\upsilon)\}$, $N(\upsilon) = \{N_1(\upsilon), N_2(\upsilon), N_3(\upsilon), 0\}$ — четырехмерные векторы.

Из уравнений (9.112) найдем

$$\begin{gathered} C^{+}(\upsilon) = BN(\upsilon), \; C^{-}(\upsilon) = -\overline{B}N(\upsilon), \\ B = \| \beta_{sm} \| = A^{-1}(APA^{-1} + \overline{APA}^{-1})^{-1}(-iR + \overline{APA}^{-1}), \quad (s, m = \overline{1, 4}). \end{gathered} \qquad (9.113)$$

Таким образом, на основании формул (9.113) можно выразить все физические величины через функции $N_j(\upsilon)$ $(j = 1, 2, 3)$. В частности, при $x_2 = 0$ получим

$$\begin{aligned} D_2^{+}(x_1 0) = D_2^{-}(x_1 0) &= 2\operatorname{Re} \int_0^\infty S_{1j} N_j(\upsilon)\, e^{-i\upsilon x_1} \upsilon\, d\upsilon; \\ \sigma_{22}^{+}(x_1 0) = \sigma_{22}^{-}(x_1 0) &= 2\operatorname{Re} \int_0^\infty S_{2j} N_j(\upsilon)\, e^{-i\upsilon x_1} \upsilon\, d\upsilon; \\ \sigma_{12}^{+}(x_1 0) = \sigma_{23}^{-}(x_1 0) &= 2\operatorname{Re} \int_0^\infty S_{3j} N_j(\upsilon)\, e^{-i\upsilon x_1} \upsilon\, d\upsilon; \qquad (9.114) \\ \sigma_{23}^{+}(x_1 0) = \sigma_{23}^{-}(x_1 0) &= 2\operatorname{Re} \int_0^\infty S_{4j} N_j(\upsilon)\, e^{-i\upsilon x_1} \upsilon\, d\upsilon. \end{aligned}$$

Здесь S_{kj} — элементы матрицы $S = -iR_2AB - R_1APB$, причем с учетом равенств $AB + \overline{A}\overline{B} = E_4$, $APB - \overline{A}\overline{B}\overline{P} = -iR$ (E_4 — единичная матрица 4×4) можно показать, что коэффициенты S_{kj} являются действительными числами. Обратимся теперь к смешанным граничным условиям (9.104). На основании выражений (9.114) эти условия приводят к системе

нарных интегральных уравнений следующего вида:

$$\int_0^\infty \upsilon\,[S_{kj}N_j(\upsilon)\,e^{-i\upsilon x_1}+S_{kj}\overline{N}_j(\upsilon)\,e^{i\upsilon x_1}]\,d\upsilon=-F_k^{(0)}\quad (|x_1|<l;\ k=2,3,4), \tag{9.115}$$

$$\int_0^\infty [N_j(\upsilon)\,e^{-i\upsilon x_1}+\overline{N}_j(\upsilon)\,e^{i\upsilon x_1}]\,d\upsilon=0\quad (|x_1|>l), \tag{9.116}$$

где $F_2^{(0)}=\sigma_{22}^{(0)};\ F_3^{(0)}=\sigma_{12}^{(0)};\ F_4^{(0)}=\sigma_{23}^{(0)}$. Решение (9.115), (9.116) определяется по формулам

$$N_j(\upsilon)=-\frac{l}{2}\sum_{m=2}^{4}S_{jm}^{*}F_m^{(0)}\frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon}\quad (j=1,2,3). \tag{9.117}$$

Здесь S_{jm}^{*} — элементы матрицы, обратной к матрице

$$S_1=\begin{pmatrix} S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\\ S_{41} & S_{42} & S_{43}\end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы S вычеркиванием первой строки и последнего столбца; $J_1(\upsilon l)$ — функция Бесселя первого рода. Подставляя формулы (9.117) в (9.113), получаем

$$C_s^{+}(\upsilon)=\frac{l}{2}\frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon}f_s,\quad C_s^{-}(\upsilon)=-\frac{l}{2}\frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon}\bar{f}_s, \tag{9.118}$$

где $f_s=-\sum_{m=2}^{4}\beta_{sj}S_{jm}^{*}F_m^{(0)}$ $(s=1,2,3,4)$. Используя значение интегралов [11]

$$\int_0^\infty J_1(\upsilon l)\,e^{-i\upsilon x_1-\upsilon\rho_s x_2}\,d\upsilon=\frac{1}{l}\left[1-\frac{\rho_s x_2+ix_1}{\sqrt{l^2+(\rho_s x_2+ix_1)^2}}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon}\,e^{-i\upsilon x_1-\upsilon\rho_s x_2}\,d\upsilon=\frac{1}{l}\left[\sqrt{l^2+(\rho_s x_2+ix_1)^2}-(\rho_s x_2+ix_1)\right]$$

и формулы (9.92), (9.93), (9.97) — (9.100), можно определить компоненты смещений, электрический потенциал, механические напряжения и вектор электрической индукции в окрестности трещины. В частности, при

$$u_k^{+}(x_1,0)-u_k^{-}(x_1,0)=2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty N_k(\upsilon)\,e^{-i\upsilon x_1}d\upsilon=$$

$$=-\left(\sum_{m=2}^{4}S_{km}^{*}F_m^{(0)}\right)\sqrt{l^2-x_1^2}\quad (|x_1|<l); \tag{9.119}$$

$$\sigma_{nj}^{+}(x_1, 0) = -\sigma_{nj}^{(0)} + \frac{\sigma_{nj}^{(0)}|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - l^2}} \quad (|x_1| > l;\ n\ \ j = 22,\ 12,\ 23); \qquad (9.120)$$

$$D_2^{+}(x_1 0) = \begin{cases} -\sum_{m=2}^{4} S_{1j} S_{jm}^{*} F_m^{(0)} & (|x_1| < l) \\ -\sum_{m=2}^{4} S_{1j} S_{jm}^{*} F_m^{(0)} + \sum_{m=2}^{4} S_{1j} S_{jm}^{*} F_m^{(0)} \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - l^2}} & (|x_1| > l), \end{cases} \qquad (9.121)$$

$$\varphi^{+}(x_1, 0) = 2\mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{-i v x_1} \sum_{s=1}^{4} a_{4s} C_s^{+}(v)\, dv =$$

$$= \begin{cases} x_1 \mathrm{Im}\left(\sum_{s=1}^{4} a_{4s} f_s\right) & (|x_1| < l) \\ \mathrm{Im}\left(\sum_{s=1}^{4} a_{4s} f_s\right)(x_1 - \sqrt{x_1^2 - l^2}) & (|x_1| > l). \end{cases} \qquad (9.122)$$

Подставляя (9.119), (9.120) в формулу (9.83) и учитывая, что электрический потенциал в данном случае не имеет разрыва на линии трещины, получаем следующее условие распространения трещины:

$$4\gamma = \frac{\pi l}{2} \sigma_{k2}^{(0)} \sum_{m=2}^{4} (-S_{km}^{*}) F_m^{(0)}. \qquad (9.123)$$

Правая часть условия (9.123) — квадратическая форма переменных $\sigma_{22}^{(0)}$, $\sigma_{12}^{(0)}$, $\sigma_{23}^{(0)}$, следовательно, равенство (9.123) аналогично известным критериям разрушения для анизотропных материалов [7]. Если ввести коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_j = \lim_{x_1 \to l} \sqrt{2\pi (x_1 - l)}\, \sigma_{nj}^{+}(x_1, 0) = \sqrt{\pi l}\, \sigma_{nj}^{(0)} \quad (j = \mathrm{I, II, III}), \qquad (9.124)$$

то локальный критерий разрушения пьезоэлектрической среды (9.123) можно записать в виде

$$4\gamma = \alpha_{sm} K_s K_m, \qquad (9.125)$$

где α_{sm} — известные константы материала

Рассмотрим второй вариант решения задачи о прямолинейной трещине в пьезоэлектрической среде, для которой $\varepsilon_{ij}^{(s)}/\varepsilon_0 \sim 10^3$. В этом случае можно предполагать, что раскрытая трещина является полостью, заполненной вакуумом (воздухом), тогда на ее берегах будет приближенно выпол-

няться условие

$$D_2^+(x_1, 0) = -D_2^{(0)} \quad (|x_1| < l), \tag{9.126}$$

а на продолжении трещины должна быть непрерывной составляющая $E_1(x_1, 0)$, т. е.

$$E_1^+(x_1, 0) - E_1^-(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| > l). \tag{9.127}$$

Таким образом, в данном варианте условие (9.103) необходимо заменить на (9.126) и (9.127). При этом общая схема решения задачи остается неизменной, но $N_4(\upsilon) \neq 0$ и для определения вспомогательных функций $N_j(\upsilon)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ можно использовать систему парных интегральных уравнений (9.115) и (9.116), где следует полагать $k, j = 1, 2, 3, 4$ и $F_1^{(0)} = D_2^{(0)}$, $F_2^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)}$, $F_3^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)}$, $F_4^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)}$. Решение этой системы теперь имеет вид

$$N_j(\upsilon) = -\frac{l}{2} \sum_{m=1}^{4} S_{jm}^* F_m^{(0)} \frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{9.128}$$

где $\| S_{jm}^* \|$ $(j, m = 1, 2, 3, 4)$ — матрица, обратная к матрице S и элементы S_{jm}^* — действительные числа.

С учетом равенства (9.128) по формулам (9.113) находим

$$C_s^+(\upsilon) = \frac{k}{2} \frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon} f_s, \quad C_s^-(\upsilon) = -\frac{l}{2} \frac{J_1(\upsilon l)}{\upsilon} \bar{f}_s \quad (s = 1, 2, 3, 4). \tag{9.129}$$

Здесь f_s — элементы четырехмерного вектора столбца $-BS^{-1}F^{(0)}$, $F^{(0)} = \{D_2^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}, \sigma_{23}^{(0)}\}$. На основании формул (9.129) и выражений (9.92), (9.93), (9.97) определим скачок смещений и электрического потенциала на линии трещины

$$u_k^+(x_1, 0) - u_k^-(x_1, 0) = 2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{4} a_{ks} f_s \sqrt{l^2 - x_1^2}, \tag{9.130}$$

$$\varphi^+(x_1, 0) - \varphi^-(x_1, 0) = 2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{4} a_{4s} f_s \sqrt{l^2 - x_1^2} \quad (|x_1| < l), \tag{9.131}$$

а также напряжения $\sigma_{nj}^+(x_1, 0)$ $(nj = 22, 12, 23)$ и составляющую $D_2^+(x_1, 0)$ вектора электрической индукции на продолжении трещины. Для вычисления $D_2^+(x_1, 0)$, $\sigma_{22}^+(x_1, 0)$, $\sigma_{12}^+(x_1, 0)$ и $\sigma_{23}^+(x_1, 0)$ при $x_1 > l$ можно воспользоваться формулами (9.114). В результате получим

$$\sigma_{nj}^+(x_1, 0) = -\sigma_{nj}^{(0)} + \sigma_{nj}^{(0)} \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - l^2}},$$

$$D_2^+(x_1, 0) = -D_2^{(0)} + D_2^{(0)} \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - l^2}} \quad (|x_1| > l). \tag{9.132}$$

Подставляя уравнения (9.130)—(9.132) в (9.83), находим условие распространения прямолинейной трещины в пьезоэлектрической среде для слу-

чая, когда на берегах трещины выполняется приближенное равенство $D_2^+(x_1, 0) \cong 0$:

$$4\gamma = \pi l \left[\sigma_{k2}^{(0)} \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{4} a_{ks} f_s + D_2^{(0)} \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{4} a_{4s} f_s\right]. \tag{9.133}$$

Элементы f_s линейно зависят от величин $\sigma_{22}^{(0)}$, $\sigma_{12}^{(0)}$, $\sigma_{23}^{(0)}$, $D_2^{(0)}$ и, следовательно, правая часть условия (9.133) является квадратичной формой этих величин с коэффициентами, зависящими от упругих, пьезо- и диэлектрических постоянных материала. Равенству (9.133) можно придать вид, аналогичный (9.125), если ввести коэффициенты интенсивности напряжений K_j (j = I, II, III) по формулам (9.124) и коэффициент интенсивности электрической индукции

$$K_4 = \lim_{x_1 \to l} \sqrt{2\pi (x_1 - l)}\, D_2^+(x_1, 0) = \sqrt{\pi l}\, D_2^{(0)}. \tag{9.134}$$

Тогда условие (9.133) можно записать так:

$$4\gamma = \sum_{s=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \alpha_{sm} K_s K_m, \tag{9.135}$$

где α_{sm} — известные константы материала.

Плоская задача для неограниченной пьезоэлектрической среды гексагонального класса $6mm$ **с трещиной в плоскости симметрии** [29]. Для более детального изучения особенностей распределения механических напряжений и электростатических полей в пьезоэлектрических материалах с трещинами рассмотрим электроупругое состояние в окрестности туннельной трещины в неограниченной среде гексагонального класса $6mm$. Пусть прямолинейная трещина располагается в плоскости симметрии $z = 0$ на участке $|x| < e$, $|y| < \%$, причем ось z совпадает с осью симметрии материала. Предполагая, что компоненты вектора смещений $\mathbf{u} = (u_x, 0, u_z)$ и электрический потенциал φ — функции x, z, записываем уравнения состояния (9.45) для данного класса симметрии в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}^{E'} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13}^{E'} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= C_{13}^{E'} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33}^{E'} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= C_{44}^{E'} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \tag{9.136}$$

$$D_x = e_{15} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) - e_{11}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_z = e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - e_{33}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Соответствующая система уравнений статической электроупругости будет

$$C_{11}^{E'} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{44}^{E'} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$(C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + C_{44}^{E'} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + C_{33}^{E'} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$(e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z} - \varepsilon_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (9.137)$$

Пусть на бесконечности заданы постоянные напряжения $\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma$, $\sigma_{xz}^{(0)} = 0$, которые соответствуют следующим значениям электрического потенциала, механических смещений и электрической индукции:

$$u_x^{(0)} = 0; \qquad u_z^{(0)}(z) = \frac{e_{31}}{C_{33}^{E'} e_{31} - C_{13}^{E'} e_{33}} \sigma z;$$

$$D_x^{(0)} = 0; \qquad D_z^{(0)} = \frac{e_{33} e_{31} + C_{13}^{E'} \varepsilon_{33}^s}{e_{31} C_{33}^{E'} - C_{13}^{E'} e_{33}} \sigma = d_0 \sigma;$$

$$\varphi^{(0)}(z) = \frac{C_{13}^{E'}}{C_{13}^{E'} e_{33} - C_{33}^{E'} e_{31}} \sigma z. \qquad (9.138)$$

С учетом симметрии электроупругого состояния относительно плоскости $z = 0$ решение (9.137) будем искать в области $z > 0$. Применяя преобразование Фурье к уравнениям (9.137), получаем при $z > 0$

$$u_x^+(x, z) = \int_0^\infty [\alpha_1 A_1^+(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\alpha_{21} B_1^+(\xi) - \alpha_{22} C_1^+(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$

$$+ (\alpha_{22} B_1^+(\xi) + \alpha_{21} C_1^+(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] \sin \xi x d\xi, \qquad (9.139)$$

$$u_z^+(x, z) = \int_0^\infty [\beta_1 A_1^+(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\beta_{21} B_1^+(\xi) - \beta_{22} C_1^+(\zeta)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$

$$+ (\beta_{22} B_1^+(\xi) + \beta_{21} C_1^+(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] \cos \xi x d\xi + u_z^{(0)}(z), \qquad (9.140)$$

$$\varphi^+(x, z) = -\int_0^\infty [\gamma_1 A_1^+(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\gamma_{21} B_1^+(\xi) - \gamma_{22} C_1^+(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$

$$+ (\gamma_{22} B_1^+(\xi) + \gamma_{21} C_1^+(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] \cos \xi x d\xi + \varphi^{(0)}(z), \qquad (9.141)$$

где $\alpha(k) = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$; $\beta(k) = -a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}$; $\gamma(k) = a_{11} a_{22} + a_{12}^2$; $\alpha_1 = \alpha(k_1)$, $\beta_1 = \beta(k_1)$; $\gamma_1 = \gamma(k_1)$; $\alpha_{21} + i\alpha_{22} = \alpha(\delta + i\omega)$; $\beta_{21} + i\beta_{22} = \beta(\delta + i\omega)$; $\gamma_{21} + i\gamma_{22} = \gamma(\delta + i\omega)$; $\pm k_1$, $\pm(\delta + i\omega)$ — корни характеристического уравнения

$$\det \| a_{jl} \| = 0 \quad (j, l = 1, 2, 3). \qquad (9.142)$$

Здесь

$$a_{11} = C_{44}^E k^2 - C_{11}, \quad a_{12} = -a_{21} = (C_{13}^{E'} + C_{44}^{E'}) k, \quad a_{22} = C_{33}^{E'} k^2 - C_{44}^{E'},$$

$$a_{13} = a_{31} = -(e_{31} + e_{15}) k, \quad a_{23} = -a_{32} = e_{15} - e_{33} k^2, \quad a_{33} = \varepsilon_{33}^2 k^2 - \varepsilon_{11}^s. \qquad (9.143)$$

На основании равенств (9.139)—(9.141) и (9.136) найдем значения смещений, потенциала, механических напряжений и электрической индукции в плоскости $z = 0$:

$$u_x^+(x, 0) = \int_0^\infty [\alpha_1 A_1^+(\xi) + \alpha_{21} B_1^+(\xi) - \alpha_{22} C_1^+(\xi)] \sin \xi x d\xi;$$

$$u_z^+(x, 0) = \int_0^\infty [\beta_1 A_1^+(\xi) + \beta_{21} C_1^+(\xi) - \beta_{22} C_1^+(\xi)] \cos \xi x d\xi;$$

$$\varphi^+(x, 0) = -\int_0^\infty [\gamma_1 A_1^+(\xi) + \gamma_{21} B_1^+(\xi) - \gamma_{22} C_1^+(\xi)] \cos \xi x d\xi; \qquad (9.144)$$

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = \int_0^\infty \xi (m_1 A_1^+(\xi) + m_2 B_1^+(\xi) - m_3 C_1^+(\xi)] \sin \xi x d\xi;$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = \sigma + \int_0^\infty \xi \left[\frac{m_1}{k_1} A_1^+(\xi) + \frac{m_2\delta + m_3\omega}{\delta^2 + \omega^2} B_1^+(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{m_3\delta - m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} C_1^+(\xi)\right] \cos \xi x d\xi; \qquad (9.145)$$

$$D_z^+(x, 0) = \sigma d_0 + \int_0^\infty \xi \left[\frac{n_1}{k} A_1^+(\xi) + \frac{n_2\delta + n_3\omega}{\delta^2 + \omega^2} B_1^+(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{n_3\delta - n_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} C_1^+(\xi)\right] \cos \xi x d\xi;$$

Здесь введены обозначения

$$m_1 = e_{15}\gamma_1 - C_{44}^{E'} (k_1\alpha_1 + \beta_1); \qquad n_1 = -\varepsilon_{11}^s\gamma_1 - e_{15} (k_1\alpha_1 + \beta_1);$$

$$m_2 = e_{15}\gamma_{21} - C_{44}^{E'} (\alpha_{21}\delta - \alpha_{22}\omega + \beta_{21});$$

$$n_2 = -\varepsilon_{11}^s\gamma_{21} - e_{15} (\alpha_{21}\delta - \alpha_{22}\omega + \beta_{21});$$

$$m_3 = e_{15}\gamma_{22} - C_{44}^{E'} (\alpha_{22}\delta + \alpha_{21}\omega + \beta_{22});$$

$$n_3 = -\varepsilon_{11}^s\gamma_{22} - e_{15} (\alpha_{22}\delta + \alpha_{21}\omega + \beta_{22})$$

и учтены равенства

$$\frac{n_1}{k_1} = e_{31}\alpha_1 - e_{33}k_1\beta_1 - \varepsilon_{33}^s k_1\gamma_1; \qquad \frac{m_1}{k_1} = C_{13}^{E'}\alpha_1 - C_{33}^{E'}k_1\beta_1 + e_{33}k_1\gamma_1;$$

$$\frac{n_2\delta + n_3\omega}{\delta^2 + \omega^2} = e_{31}\alpha_{21} - e_{33}(\beta_{21}\delta - \beta_{22}\omega) - \varepsilon_{33}^s(\gamma_{21}\delta - \gamma_{22}\omega);$$

$$\frac{n_3\delta - n_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} = e_{31}\alpha_{22} - e_{33}(\beta_{22}\delta + \beta_{21}\omega) - \varepsilon_{33}^s(\gamma_{22}\delta + \gamma_{21}\omega);$$

$$\frac{m_2\delta + m_3\omega}{\delta^2 + \omega^2} = C_{13}^{E'}\alpha_{21} - C_{33}^{E'}(\beta_{21}\delta - \beta_{22}\omega) + e_{33}(\gamma_{21}\delta - \gamma_{22}\omega);$$

$$\frac{m_3\delta - m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} = C_{13}^{E'}\alpha_{22} - C_{33}^{E'}(\beta_{22}\delta + \beta_{21}\omega) + e_{33}(\gamma_{22}\delta + \gamma_{21}\omega).$$

Если для пьезоэлектрической среды гексагонального класса $6mm$ $\varepsilon_y^s/\varepsilon_0 \sim 10$, а относительное раскрытие трещины имеет порядок 10^{-3}, то электрические граничные условия на линии трещины соответствуют непрерывности потенциала $\varphi(x, z)$ и составляющей $D_2(x, z)$ при $z = 0$, $|x| < l$. Таким образом, с учетом симметрии электроупругого состояния относительно плоскости $z = 0$ и при отсутствии механической нагрузки на берегах трещины имеем следующие условия в плоскости $z = 0$:

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = 0, \ \varphi^+(x, 0) = 0 \ (-\infty < x < \infty); \tag{9.146}$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = 0 \ \ (|x| < l); \ u_z^+(x, 0) = 0 \ \ (|x| > l). \tag{9.147}$$

Используя представления (9.145) из равенств (9.146), находим

$$B_1^+(\xi) = -\frac{q_{21}}{q_{22}}A_1^+(\xi), \ C_1^+(\xi) = \frac{m_1\gamma_{21} - m_2\gamma_1}{q_{22}}A_1^+(\zeta), \tag{9.148}$$

где $q_{21} = m_3\gamma_1 - m_1\gamma_{22}$; $q_{22} = m_3\gamma_{21} - m_2\gamma_{22}$, а из условий (9.147) получаем парные уравнения для определения

$$\int_0^\infty \xi A_1^+(\xi)\cos\xi x d\xi = -\frac{\sigma q_{22}}{(S_{11}q_{22} - S_{12}q_{21})} \ \ (|x| < l); \tag{9.149}$$

$$\int_0^\infty A_1^+(\xi)\cos\xi x d\xi = 0 \ \ (|x| > l). \tag{9.150}$$

Здесь

$$S_{11} = \frac{m_1}{k_1} - \frac{m_1}{m_3}\left(\frac{m_3\delta - m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2}\right); \ S_{12} = \frac{(m_3^2 + m_2^2)\,\omega}{m_3(\delta^2 + \omega^2)}.$$

Решая уравнения (9.149) и (9.150), находим

$$A_1^+(\xi) = \frac{\sigma l q_{22}}{(S_{11}q_{22} - S_{12}q_{21})}\frac{J_1(\xi l)}{\xi}. \tag{9.151}$$

Смещения, напряжения и нормальная составляющая вектора электри-

ческой индукции в плоскости $z = 0$ будут следующими:

$$u_x^+(x, 0) = \sigma U \begin{cases} x & (x < l) \\ x - \sqrt{x^2 - l^2} & (x > l); \end{cases} \quad (9.152)$$

$$u_z^+(x, 0) = \sigma W \begin{cases} \sqrt{l^2 - x^2} & (x < l); \\ 0 & (x > l)' \end{cases} \quad (9.153)$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} \quad (x > l). \quad (9.154)$$

$$D_z^+(x, 0) = \sigma \left(d_0 - \frac{S_{21}q_{22} - S_{22}q_{21}}{S_{11}q_{22} - S_{12}q_{21}} \right) + \sigma \left(\frac{S_{21}q_{22} - S_{22}q_{21}}{S_{11}q_{22} - S_{12}q_{21}} \right) \times$$

$$\times \begin{cases} 0 & (x < l), \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} & (x > l). \end{cases} \quad (9.155)$$

Здесь

$$U = \frac{(\alpha_{21}m_3 - \alpha_{22}m_2)\, q_{21} - (\alpha_1 m_3 - \alpha_{22}m_1)\, q_{22}}{m_3 (S_{11}q_{22} - S_{12}q_{21})};$$

$$W = \frac{q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12}}{m_3 (S_{12}q_{21} - S_{11}q_{22})}.$$

При этом условие локального разрушения (9.83) принимает вид

$$4\gamma = \pi\sigma^2 lW. \quad (9.156)$$

Для исследования поведения раскрытых трещин нормального отрыва в материалах, подобных пьезокерамике, рассмотрим второй вариант решения указанной задачи при граничных условиях в плоскости $z = 0$ вида

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \quad (9.157)$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = 0 \quad (|x| < l); \quad u_z^+(x, 0) = 0 \quad (|x| > l); \quad (9.158)$$

$$D_z^+(x, 0) = 0 \quad (|x| < l); \quad \varphi^+(x, 0) = 0 \quad (|x| > l). \quad (9.159)$$

С учетом условий (9.157)—(9.159) смещения, электрический потенциал, напряжения и электрическая индукция при $z = 0$ определяются по формулам

$$u_x^+(x, 0) = pU' \begin{cases} x & (x < l) \\ x - \sqrt{x^2 - l^2} & (x > l), \end{cases}$$

$$u_z^+(x, 0) = pW' \begin{cases} \sqrt{l^2 - x^2} & (x < l) \\ 0 & (x > l), \end{cases} \quad (9.160)$$

$$\varphi^+(x, 0) = \sigma\Phi' \begin{cases} \sqrt{l^2 - x^2} & (x < l) \\ 0 & (x > l)' \end{cases} \quad D_z^+(x, 0) =$$

$$= \sigma d_0 \begin{cases} 0 & (x < l) \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} & (x > l)' \end{cases} \quad \sigma_{zz}^+(x, 0) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - l^2}} \quad (x > l),$$

где

$$U' = \frac{1}{m_3\Delta_1}[(\alpha_{21}m_3 - \alpha_{22}m_2)(S_{21} - d_0S_{11}) - (\alpha_1 m_3 - \alpha_{22}m_1)(S_{22} - d_0S_{12})];$$

$$W' = \frac{1}{m_3\Delta_1}[q_{12}(S_{21} - d_0S_{11}) - q_{11}(S_{22} - d_0S_{12})];$$

$$\Phi' = \frac{1}{m_3\Delta_1}[q_{21}(S_{22} - d_0S_{12}) - q_{22}(S_{21} - d_0S_{11})];$$

$$\Delta_1 = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}; \quad q_{11} = m_3\beta_1 - m_1\beta_{22}; \quad q_{12} = m_3\beta_{21} - m_2\beta_{22};$$

$$S_{21} = \frac{n_1}{k_1} - \frac{m_1}{m_3}\left(\frac{n_3\delta - n_1\omega}{\delta^2 + \omega^2}\right); \; S_{22} = \frac{(m_3n_2 - m_2n_3)\delta + (m_3n_3 + m_2n_2)\omega}{m_3(\delta^2 + \omega^2)}.$$

Условия (9.159) обеспечивают существование скачка электрического потенциала на берегах трещины

$$\varphi^+(x, 0) - \varphi^-(x, 0) = 2\sigma\Phi'\sqrt{l^2 - x^2} \quad (x < l), \qquad (9.161)$$

в этом случае условие локального разрушения принимает вид

$$4\gamma = \pi\sigma^2 l(W' + d_0\Phi'). \qquad (9.162)$$

Прямолинейная трещина в плоскости параллельной оси симметрии 6-го порядка (пьезоэлектрическая среда класса 6 *mm*) [29]. Для пьезоэлектрической среды гексагонального класса 6*mm* характер электроупругого состояния в окрестности трещины существенно зависит от ее ориентации по отношению к оси симметрии. В связи с этим представляет интерес решение плоской задачи электроупругости для неограниченной области с трещиной нормального отрыва, расположенной в плоскости, которая параллельна оси симметрии 6-го порядка. Пусть неограниченная пьезоэлектрическая среда гексагонального класса 6*mm* содержит туннельную трещину на участке $|z| < l$ плоскости $x = 0$, причем ось z декартовой системы координат совпадает с осью симметрии 6-го порядка. Для равномерного растяжения на бесконечности в направлении оси x электроупругое состояние плоскости без трещины определяется формулами

$$u_x^{(0)} = \frac{\sigma}{C_{11}^{E'}}x; \; u_z^{(0)} = 0; \; \varphi^{(0)} = 0;$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma; \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \frac{C_{13}^{E'}}{C_{11}^{E'}}\sigma; \; \sigma_{xz}^{(0)} = 0; \qquad (9.163)$$

$$D_x^{(0)} = 0; \quad D_z^{(0)} = \frac{e_{31}}{C_{11}^{E'}}\sigma.$$

Применяя преобразование Фурье, представляем решение уравнений (9.137) при $x > 0$ в виде

$$u_x(x, z) = \int_0^\infty [\alpha_1F_1^+(\xi)e^{-k_1'\xi x} + (\alpha_{21}L_1^+(\xi) - \alpha_{22}G_1^+(\xi))e^{-\delta'\xi x}\cos\omega'\xi x -$$

$$-(\alpha_{22}L_1^+(\xi) + \alpha_{21}G_1^+(\xi))e^{-\delta'\xi x}\sin\omega'\xi x]\cos\xi z d\xi, \qquad (9.164)$$

$$u_z(x, z) = \int_0^\infty [\beta_1 F_1^+(\xi) e^{-k_1'\xi x} + (\beta_{21} L_1^+(\xi) - \beta_{22} G_1^+(\xi)) e^{-\delta\xi x} \cos \omega'\xi x -$$

$$- (\beta_{22} L_1^+(\xi) + \beta_{21} G_1^+(\xi)) e^{-\delta'\xi x} \sin \omega'\xi x] \sin \xi z d\xi, \qquad (9.165)$$

$$\varphi(x, z) = - \int_0^\infty [\gamma_1 F_1^+(\xi) e^{-k_1'\xi x} + (\gamma_{21} L_1^+(\xi) - \gamma_{22} G_1^+(\xi)) e^{-\delta'\xi x} \times$$

$$\times \cos \omega'\xi x - (\gamma_{22} L_1^+(\xi) + \gamma_{21} G_1^+(\xi)) e^{-\delta'\xi x} \sin \omega'\xi x] \sin \xi z d\xi, \qquad (9.166)$$

где $k_1' = \frac{1}{k_1}$; $\delta' = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2}$; $\omega' = \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2}$. На основании равенств (9.164)—(9.166) найдем выражения для смещений, напряжений, электрического потенциала и составляющей D_x вектора электрической индукции в плоскости трещины $x = 0$:

$$u_x(0, z) = \int_0^\infty [\alpha_1 F_1^+(\xi) + \alpha_{21} L_1^+(\xi) - \alpha_{22} G_1^+(\xi)] \cos \xi z d\xi,$$

$$u_z(0, z) = \int_0^\infty [\beta_1 F_1^+(\xi) + \beta_{21} L_1^+(\xi) - \beta_{22} G_1^+(\xi) \sin \xi z dz,$$

$$\sigma_{xx}(0, z) = \int_0^\infty \xi [m_1 F_1^+(\xi) + m_2 L_1^+(\xi) - m_3 G_1^+(\xi)] \cos \xi z dz + p,$$

$$\sigma_{xz}(0, z) = \int_0^\infty \xi [m_1' F_1^+(\xi) + m_2 L_1^+(\xi) + m_3' G_1^+(\xi)] \sin \xi z d\xi,$$

$$(9.167)$$

$$\varphi(0, z) = - \int_0^\infty [\gamma_1 F_1^+(\xi) + \gamma_{21} L_1^+(\xi) - \gamma_{22} G_1^+(\xi)] \sin \xi z d\xi,$$

$$D_x(0, z) = \int_0^\infty \xi [n_1' F_1^+(\xi) + n_2' L_1^+(\xi) + n_3' G_1^+(\xi)] \sin \xi z d\xi,$$

где $m_1' = m_1 k_1'$; $m_2' = \delta' m_2 + \omega' m_3$; $m_3' = -\delta' m_3 + \omega' m_2$; $n_1' = n_1 k_1'$; $n_2' = \delta' n_2 + \omega' n_3$; $n_3' = -\delta n_3 \omega' n_2$.

В формулах (9.167) были использованы следующие тождественные соотношения между материальными константами среды: $-C_{11}^{E'} k_1' \alpha_1 + C_{13}^{E} \beta_1 - e_{31}\gamma_1 = m_1$; $C_{11}^{E'} (\delta' \alpha_{22} - \omega \alpha_{21}) - C_{13}^{E'} \beta_{22} + e_{31}\gamma_{22} = -m_3$; $C_{11} (\delta' \alpha_{21} + \omega' \alpha_{22}) - C_{13}^{E'} \beta_{21} + e_{31}\gamma_{21} = -m_2$; $C_{44}^{E'} (\alpha_{21} + \delta' \beta_{21} + \omega' \beta_{22}) - e_{15}(\delta' \gamma_{21} + \omega' \gamma_{22}) = -(\delta' m_2 + \omega' m_3)$; $C_{44}^{E'} (\alpha_{22} + \delta' \beta_{22} - \omega' \beta_{21}) - e_{15}(\delta' \gamma_{22} - \omega' \gamma_{21}) = -\delta' m_3 + \omega' m_2$; $-e_{15}(\alpha_{21} + \delta' \beta_{21} + \omega' \beta_{22}) - \varepsilon_{11}^{s}(\delta' \gamma_{21} + \omega' \gamma_{22}) = \delta' n_2 +$

$+\omega' n_3$; $-e_{15}(\alpha_{22}+\delta'\beta_{22}-\omega'\beta_{21})-\varepsilon_{11}^{s}(\delta'\gamma_{22}-\omega'\gamma_{21})=\delta' n_3-\omega' n_2$; $-e_{15}(\beta_1+k_1\alpha_1)-\varepsilon_{11}^{s}\gamma_{21}=n_1$.

Функции $F_1^{+}(\xi)$, $L_1^{+}(\xi)$, $G_1^{+}(\xi)$ определим из граничных условий при $x=0$, которые соответствуют отсутствию механической нагрузки на берегах трещины, а также непрерывности потенциала и составляющей вектора D_x электрической индукции на линии трещины.

С учетом симметрии электроупругого состояния условия в плоскости $x=0$ записываются в виде

$$\sigma_{xz}(0,z)=0,\quad D_x(0,z)=0\quad(-\infty<z<\infty);\tag{9.168}$$

$$\sigma_{xx}(0,z)=0\quad(|x|<l);\quad u_x(0,z)=0\quad(|x|>l).\tag{9.169}$$

На основании выражений (9.167) из условий (9.168), (9.169) находим

$$\begin{aligned}F_1^{+}(\xi)&=(m_2'n_3'-m_3'n_2')F(\xi);\\ L_1^{+}(\xi)&=(m_3'n_1'-m_1'n_3')F(\xi);\\ G_1^{+}(\xi)&=(m_1'n_2'-m_2'n_1')E(\xi),\end{aligned}\tag{9.170}$$

причем функция $F(\xi)$ определяется из решения парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \xi F(\xi)\cos\xi z d\xi=\frac{\sigma}{Q}\quad(z<l),\\ &\int_0^\infty F(\xi)\cos\xi z d\xi=0\quad(z>l),\end{aligned}\tag{9.171}$$

где $Q=-m_1(m_2'n_3'-m_3'n_2')-m_2(m_3'n_1'-m_1'n_3')+m_3(m_1'n_2'-m_2'n_1')$. Поскольку

$$F(\xi)=\frac{\sigma l}{Q}\frac{J_1(\xi l)}{\xi},\tag{9.172}$$

то выражения для определения электроупругого состояния в плоскости трещины $x_2=0$ будут следующими:

$$\sigma_{xx}(0,z)=\begin{cases}0 & (z<l)\\ \dfrac{\sigma z}{\sqrt{z^2-l^2}} & (z>l),\end{cases}$$

$$\sigma_{xz}(0,z)=0,\tag{9.173}$$

$$u(0,z)=\sigma U_0\begin{cases}\sqrt{l^2-z^2} & (z<l)\\ 0 & (z>l),\end{cases}$$

$$D_x(0,z)=0,\tag{9.174}$$

$$\varphi(0,z)=\sigma\Phi_0\begin{cases}z & (z<l)\\ z-\sqrt{z^2-l^2} & (z>l).\end{cases}\tag{9.175}$$

Здесь введены обозначения

$$U_0 = \frac{1}{Q}\left[\alpha_1 (m_2' n_3' - m_3 n_2') + \alpha_{21} (m_3' n_1' - m_1' n_3') - \alpha_{22} (m_1' n_2' - m_2' n_1')\right];$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{Q}\left[- \gamma_1 (m_2' n_3' - m_3' n_2') - \gamma_{21} (m_3' n_1' - m_1' n_3') + \gamma_{22} (m_1' n_2' - m_2' n_1')\right].$$

Используя выражения (9.173)—(9.175), записываем условие локального разрушения для трещины, плоскость которой параллельна оси симметрии 6-го порядка пьезоэлектрической среды класса $6mm$:

$$4\gamma = \pi\sigma U_0 l^2. \tag{9.176}$$

Прямолинейная туннельная трещина, расположенная на границе пьезоэлектрика с проводником [26, 28]. Рассмотрим плоскую деформацию пьезоэлектрического полупространства $z > 0$, скрепленного по плоскости $z = 0$ с упругим проводником. Пусть на границе $z = 0$ расположена плоская трещина длиной $2l$, берега которой свободны от внешней нагрузки и деформация составного тела (пьезоэлектрик — упругий изотропный проводник) происходит под действием постоянных и параллельных оси z напряжений σ, заданных на бесконечности. Такая схема соответствует, например, сочленению пьезоэлемента с массивной металлической деталью, когда в процессе монтажа на поверхности контакта образовался участок воздушного включения.

Для неограниченного полупространства $z > 0$ из пьезоэлектрического материала гексагонального класса 6 mm (ось z совпадает с осью симметрии) уравнения состояния имеют вид (9.136). Для упругого изотропного полупространства $z < 0$ имеем известные соотношения

$$\sigma_{xx}^{-} = (\lambda + 2G)\frac{\partial u_x^{-}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_z^{-}}{\partial z}; \quad \sigma_{xz}^{-} = G\left(\frac{\partial u_z^{-}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{-}}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{zz}^{-} = (\lambda + 2G)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_x^{-}}{\partial x}. \tag{9.177}$$

Здесь $u_x^{-}(x, z)$, $u_z^{-}(x, z)$ — составляющие вектора смещения в области $z < 0$.

В случае равномерного растяжения на бесконечности в направлении оси z компоненты вектора смещений и электрический потенциал для пьезоэлектрического полупространства $z > 0$ определяются из уравнений равновесия и электростатики по формулам (9.139)—(9.141).

Решение уравнений теории упругости для изотропного полупространства $z < 0$ представим в виде

$$u_x^{-}(x, z) = \int_0^\infty [A_2(\xi) + \xi z B_2(\xi)]\, e^{\xi z} \sin \xi x\, d\xi;$$

$$u_z^{-}(x, z) = \frac{\sigma z}{(\lambda + 2G)} + \int_0^\infty \left[- A_2(\xi) + \left(\frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} - \xi z\right) B_2(\xi)\right] e^{\xi z} \cos \xi x\, d\xi. \tag{9.178}$$

На основании (9.178) находим

$$u_x^-(x, 0) = \int_0^\infty A_2(\xi) \sin \xi x d\xi;$$

$$u_z^-(x, 0) = \int_0^\infty \left[-A_2(\xi) + \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} B_2(\xi)\right] \cos \xi x d\xi;$$

$$\sigma_{xz}^-(x, 0) = 2G \int_0^\infty \left[A_2(\xi) - \frac{G}{\lambda + G} B_2(\xi)\right] \xi \sin \xi x d\xi;$$

$$\sigma_{zz}^-(x, 0) = \sigma + 2G \int_0^\infty \left[-A_2(\xi) + \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} B_2(\xi)\right] \xi \cos \xi x d\xi. \quad (9.179)$$

При этом значения $u_x^+(x, 0)$, $u_z^+(x, 0)$, $\sigma_{xz}^+(x, 0)$, $\sigma_{zz}^+(x, 0)$ определяются по формулам (9.144).

На границе раздела двух сред имеем следующие условия:

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) - \sigma_{zz}^-(x, 0) = 0;$$

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) - \sigma_{xz}^-(x, 0) = 0; \quad \varphi^+(x, 0) = 0 \quad (|x| < \infty). \quad (9.180)$$

Удовлетворяя «сквозным» условиям (9.180), получаем

$$C_1(\xi) = \frac{\gamma_1}{\gamma_{22}} A_{11}^+(\xi) + \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}} B_1^+(\xi);$$

$$B_2(\xi) = \frac{(q_{31} - q_{21})}{2G\gamma_{22}} A_1^+(\xi) + \frac{(q_{32} - q_{22})}{2G\gamma_{22}} B_1^+(\xi);$$

$$A_2(\xi) = \frac{Gq_{31} - (\lambda + 2G) q_{21}}{2G\gamma_{22}(\lambda + G)} A_1^+(\xi) + \frac{Gq_{32} - (\lambda + 2G) q_{22}}{2G\gamma_{22}(\lambda + G)} B_1^+(\xi). \quad (9.181)$$

Здесь

$$q_{31} = \frac{m_1}{k_1} \gamma_{22} - \frac{m_3\delta - m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} \gamma_1; \quad q_{32} = \frac{m_2\delta + m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} \gamma_{22} - \frac{m_3\delta - m_2\omega}{\delta^2 + \omega^2} \gamma_{21}.$$

Кроме того, при $z = 0$ должны выполняться условия

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xz}^+(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l), \quad (9.182)$$

$$u_x^+(x, 0) - u_x^-(x, 0) = 0, \quad u_z^+(x, 0) - u_z^-(x, 0) = 0 \quad (x > l), \quad (9.183)$$

которые соответствуют отсутствию механической нагрузки на берегах трещины $|x| < l$ и равенству компонентов вектора смещения при $|x| > l$, $z = 0$.

Для решения задачи введем функции

$$u_z(x) = u_z^+(x, 0) - u_z^-(x, 0) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{41}A_1^+(\xi) + q_{42}B_1^+(\xi)] \cos \xi x d\xi,$$

$$u_x(x) = u_x^+(x, 0) - u_x^-(x, 0) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{51}A_1^+(\xi) + q_{52}B_1^+(\xi)] \sin \xi x d\xi, \tag{9.184}$$

где

$$q_{41} = \beta_1\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_1 + \frac{q_{21}}{2(\lambda + G)} - \frac{q_{31}(\lambda + 2G)}{2G(\lambda + G)};$$

$$q_{42} = \beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21} + \frac{q_{22}}{2(\lambda + G)} - \frac{q_{32}(\lambda + 2G)}{2\mu(\lambda + G)};$$

$$q_{51} = \alpha_1\gamma_{22} - \alpha_{22}\gamma_1 + \frac{q_{21}(\lambda + 2G)}{2G(\lambda + G)} - \frac{q_{31}}{2(\lambda + G)};$$

$$q_{52} = \alpha_{21}\gamma_{22} - \alpha_{22}\gamma_{21} + \frac{q_{22}(\lambda + 2G)}{2G(\lambda + G)} - \frac{q_{32}}{2(\lambda + G)}.$$

Удовлетворяя теперь условиям (9.182) и (9.183), получаем систему парных интегральных уравнений для нахождения функций $A_1^+(\xi)$ и $B_1^+(\xi)$:

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty [q_{21}A_1^+(\xi) + q_{22}B_1^+(\xi)] \cos \xi x d\xi = 0 \quad (0 < x < l),$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = p + \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty [q_{31}A_1^+(\xi) + q_{32}B_1^+(\xi)] \sin \xi x d\xi = 0; \tag{9.185}$$

$$u_z(x) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{41}A_1^+(\xi) + q_{42}B_1^+(\xi)] \cos \xi x d\xi = 0 \quad (l < x < \infty),$$

$$u_x(x) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{51}A_1^+(\xi) + q_{52}B_1^+(\xi)] \sin \xi x d\xi = 0. \tag{9.186}$$

Можно показать, что система парных интегральных уравнений (9.185) и (9.186) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши. Действительно, обращая равенства (9.186), получаем

$$q_{41}A_1^+(\xi) + q_{42}B_1^+(\xi) = \gamma_{22} \frac{2}{\pi} \int_0^l u_z(\eta) \cos \xi\eta d\eta,$$

$$q_{51}A_1^+(\xi) + q_{52}B_1^+(\xi) = \gamma_{22} \frac{2}{\pi} \int_0^l u_x(\eta) \sin \xi\eta d\eta. \tag{9.187}$$

Подставим теперь $A_1^+(\xi)$, $B_1^+(\xi)$ из равенств (9.187) в равенства (9.185) и используем при этом интегральные представления вида [12, 13]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\xi\eta\sin\xi x d\xi = \delta(x-\xi), \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\xi\eta\cos\xi x d\xi = \delta(x-\xi),$$

$$\int_0^\infty \sin\xi\eta\cos\xi x d\xi = \frac{\eta}{\eta^2 - x^2}$$

(последний интеграл необходимо брать в смысле главного значения). В резьултате получим

$$\frac{d}{dx}\left[g_{11}u_z(x) + g_{12}\frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{u_x(\eta)\,d\eta}{\eta^2 - x^2}\right] = 0 \quad (0 \leqslant x < l); \qquad (9.188)$$

$$\frac{d}{dx}\left[-g_{21}\frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{u_z(\eta)\,d\eta}{\eta^2 - x^2} + g_{22}u_x(x)\right] = \sigma \quad (0 \leqslant x < l). \qquad (9.189)$$

Здесь $g_{11} = \frac{1}{\Delta}(-q_{51}q_{22} + q_{52}v_{21})$; $q_{12} = \frac{1}{\Delta}(-q_{42}q_{21} + q_{41}q_{22})$; $q_{21} = \frac{1}{\Delta}(q_{51}q_{32} - q_{52}q_{31})$; $g_{22} = \frac{1}{\Delta}(q_{42}q_{31} - q_{41}q_{32})$; $\Delta = q_{41}q_{52} - q_{51}q_{42}$.

Выполняя интегрирование в уравнениях (9.188), (9.189) и учитывая, что $u_z(-x) = u_z(x)$, $u_x(x) = -u_x(x)$, можно записать уравнения (9.188) и (9.189) в виде системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши

$$g_{11}u_z(x) + g_{12}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{u_x(\eta)\,d\eta}{\eta - x} = C_1', \qquad (9.190)$$

$$g_{22}u_x(x) - g_{21}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{u_z(\eta)\,d\eta}{\eta - x} = \sigma x, \qquad (9.191)$$

где C_1' — постоянная, которая определяется в процессе решения уравнений. Если ввести функцию $f(x) = u_z(x) + ig_1u_x(x)$, $g_1 = \sqrt{g_{12}g_{22}/g_{21}g_{11}}$, то система уравнений (9.190), (9.191) преобразуется к одному интегральному уравнению

$$f(x) + g\frac{1}{\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta - x} = \frac{C_1}{g_{11}} + i\frac{g_1\sigma}{g_{22}}x \quad (|x| < l), \qquad (9.192)$$

где $g = \frac{g_{21}}{g_{22}}g_1$.

Из формул Сохоцкого —Племеля [14] следует, что уравнение (8.192) эк-

вивалентно краевой задаче Римана

$$F^{+}(x)+\frac{g-1}{g+1}F^{-}(x)=\frac{C_1}{(g+1)g_{11}}+\frac{ig_1\sigma x}{(g+1)g_{22}}\quad (|x|<l),\quad (9.193)$$

где $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-l}^{l}\frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta-z}$ — функция, аналитическая в плоскости с разрезом по отрезку $-l<x<l$ действительной оси. Учитывая, что для реальных пьезоэлектрических материалов (например, поляризованной керамики) и упругих сред $g>1$, записываем частное решение однородной задачи (9.193), ограниченной вблизи концов $x=\pm l$, в виде

$$X(z)=(z+l)^{1/2-i\varkappa}(z-l)^{1/2+i\varkappa},\quad (9.194)$$

где $\varkappa=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{g+1}{g-1}$, причем

$$X^{+}(x)=i\sqrt{l^2-x^2}\,e^{-\pi\varkappa}\left(\frac{l-x}{l+x}\right)^{i\varkappa},\qquad X^{-}(x)=-X^{+}(x)\,e^{2\pi\varkappa}\quad (9.195)$$

— предельные значения канонической функции $X(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза $|x|<l$ соответственно. На основании формул (9.194) и (9.195) находим общее решение задачи (9.193)

$$F(z)=\frac{C_1'}{2gg_{11}}+\frac{ig_1\sigma}{2gg_{22}}(z-X(z))\quad (9.196)$$

и определяем постоянную C_1 из условия $F(\infty)=0$.
Тогда

$$C_1'=\frac{g_1\sigma\varkappa l}{gg_{22}},\quad (9.197)$$

$$F(z)=\frac{ig_1\sigma}{2gg_{22}}(z-X(z)-2i\varkappa l).\quad (9.198)$$

С помощью формулы (9.198) получаем

$$f(x)=F^{+}(x)-F^{-}(x)=-\frac{ig_1\sigma}{g_{22}(g-1)}X^{+}(x)=$$

$$=\frac{\sigma g_1e^{-\pi\varkappa}}{g_{22}(g-1)}\sqrt{l^2-x^2}\left[\cos\left(\varkappa\ln\frac{l-x}{l+x}\right)+i\sin\left(\varkappa\ln\frac{l-x}{l+x}\right)\right].\quad (9.199)$$

Следовательно,

$$u_z(x)=\frac{\sigma g_1e^{-\pi\varkappa}}{g_{22}(g-1)}\sqrt{l^2-x^2}\cos\left(\varkappa\ln\frac{l-x}{l+x}\right)\quad (|x|<l),\quad (9.200)$$

$$u_x(x)=\frac{\sigma e^{-\pi\varkappa}}{g_{22}(g-1)}\sqrt{l^2-x^2}\sin\left(\varkappa\ln\frac{l-x}{l+x}\right)\quad (|x|<l).\quad (9.201)$$

Из формул (9.200) и (9.201) следует, что смещения в окрестности вершины трещины $x=l$, расположенной на границе пьезоэлектрической среды и упругого проводника, имеют характерную осциллирующую особенность,

которой можно пренебречь, если считать $\varkappa \simeq 0$. Для реальных композиций пьезокерамика — металл параметр $\varkappa$ мал ($\varkappa \sim 0{,}005 \div 0{,}012$).

Для вычисления напряжений в плоскости $z = 0$ на продолжении трещины воспользуемся формулами

$$\sigma_{xz}^{+}(x, 0) = -g_{12}\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{u_x(\eta)\,d\eta}{\eta - x} \quad (x > l),$$
$$\sigma_{zz}^{+}(x, 0) = \sigma + g_{21}\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{u_z(\eta)\,d\eta}{\eta - x} \quad (x > l) \tag{9.202}$$

и соотношением

$$\frac{1}{g_{21}}\sigma_{zz}^{+}(x, 0) - \frac{ig_1}{g_{12}}\sigma_{xz}^{+}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-l}^{l}\frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta - x} + \frac{\sigma}{g_{21}} \quad (x > l). \tag{9.203}$$

Так как при $x > l$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta - x} = 2iF(x) = -\frac{g_1\sigma}{gg_{22}}(x - X(x) - 2i\varkappa l),$$

$$X(x) = \sqrt{x^2 - l^2}\left[\cos\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right) + i\sin\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right)\right] \quad (x > l),$$

то на основании равенств (9.203) находим

$$\sigma_{zz}^{+}(x, 0) = \sigma\frac{1}{\sqrt{x^2 - l^2}}\left[x\cos\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right) - 2\varkappa l\sin\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right)\right]$$
$$(x > l), \tag{9.204}$$
$$\sigma_{xz}^{+}(x, 0) = -\frac{g_{12}\sigma}{gg_{22}}\frac{1}{\sqrt{x^2 - l^2}}\left[x\sin\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\varkappa l\cos\left(\varkappa\ln\frac{x-l}{x+l}\right)\right] \quad (x > l).$$

Переходя к формулировке условия локального разрушения, полагаем $\varkappa = 0$ ($g \gg 1$), тогда в соответствии с выражениями (9.200) и (9.204) получаем

$$8\gamma = \frac{\sigma^2\pi l}{g_{21}}. \tag{9.205}$$

Дисковидная трещина на границе пьезоэлектрика и упругого проводника [27, 28]. Рассмотрим случай осесимметричной деформации пьезоэлектрического полупространства $z > 0$, скрепленного по плоскости $z = 0$ с упругим изотропным полупространством так, что на границе $z = 0$ располагается дисковидная трещина радиуса $r_т$. Будем предполагать, что берега трещины свободны от нагрузки и составное бесконечное тело находится под действием растягивающих напряжений $\sigma_{zz} = \sigma$ при $|z| \to \infty$. Для полупространства $z > 0$, обладающего симметрией 6 *mm* (ось

совпадает с осью симметрии), уравнения состояния в цилиндрических координатах r, θ, z будут иметь вид

$$\sigma_{rr}^{+}(r, z) = C_{11}^{E'} \frac{\partial u_r^{+}}{\partial r} + C_{12}^{E'} \frac{u_r^{+}}{r} + C_{13}^{E'} \frac{\partial u_z^{+}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{+}(r, z) = C_{12}^{E'} \frac{\partial u_r^{+}}{\partial r} + C_{11}^{E'} \frac{u_r^{+}}{r} + C_{13}^{E'} \frac{\partial u_z^{+}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz}^{+}(r, z) = C_{13}^{E'} \left(\frac{\partial u_r^{+}}{\partial r} + \frac{u_r^{+}}{r}\right) + C_{33}^{E'} \frac{\partial u_z^{+}}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = C_{44}^{E'} \left(\frac{\partial u_r^{+}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{+}}{\partial r}\right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad (9.206)$$

$$D_r(r, z) = e_{15}\left(\frac{\partial u_r^{+}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{+}}{\partial r}\right) - \varepsilon_{11}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$D_z(r, x) = e_{31}\left(\frac{\partial u_r^{+}}{\partial r} + \frac{u_r^{+}}{r}\right) + e_{33} \frac{\partial u_z^{+}}{\partial z} - \varepsilon_{33}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где $u_r^{+}(r, z)$, $u_z^{+}(r, z)$ — составляющие вектора перемещения в области $z > 0$; $\varphi(r, z)$ — электрический потенциал. Для упругого изотропного полупространства $z < 0$ имеем

$$\sigma_{rr}^{-}(r, z) = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_r^{-}}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial u_z^{-}}{\partial z} + \frac{u_r^{-}}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{-}(r, z) = (\lambda + 2G) \frac{u_r^{-}}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_z^{-}}{\partial z} + \frac{\partial u_r^{-}}{\partial r}\right),$$

$$\sigma_{zz}^{-}(r, z) = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_z^{-}}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r^{-}}{\partial r} + \frac{u_r^{-}}{r}\right), \qquad (9.207)$$

$$\sigma_{rz}^{-}(r, z) = G\left(\frac{\partial u_r^{-}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{-}}{\partial r}\right).$$

Применяя преобразование Ханкеля, можно представить функции $u_r^{+}(r, z)$, $u_z^{+}(r, z)$, $\varphi(r, z)$ в виде

$$u_r^{+}(r, z) = \int_0^\infty [\alpha_1 A_1^{+}(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\alpha_{21} B_1^{+}(\xi) - \alpha_{22} C_1^{+}(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$

$$+ (\alpha_{22} B_1^{+}(\xi) + \alpha_{21} C_1^{+}(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] J_1(\xi r)\, d\xi, \qquad (9.208)$$

$$u_z^{+}(r, z) = \int_0^\infty [\beta_1 A_1^{+}(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\beta_{21} B_1^{+}(\xi) - \beta_{22} C_1^{+}(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$

$$+ (\beta_{22} B_1^{+}(\xi) + \beta_{21} C_1^{+}(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] J_0(\xi r)\, d\xi, \qquad (9.209)$$

$$\varphi(r, z) = -\int_0^\infty [\gamma_1 A_1^+(\xi) e^{-k_1\xi z} + (\gamma_{21} B_1^+(\xi) - \gamma_{22} C_1^+(\xi)) e^{-\delta\xi z} \cos\omega\xi z +$$

$$+ (\gamma_{22} B_1^+(\xi) + \gamma_{21} C_1^+(\xi)) e^{-\delta\xi z} \sin\omega\xi z] J_0(\xi r)\, d\xi, \qquad (9.210)$$

$$u_r^-(r, z) = \int_0^\infty [A_2(\xi) + \xi z B_2(\xi)] e^{\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi, \qquad (9.211)$$

$$u_z^-(r, z) = \int_0^\infty \left[-A_2(\xi) + \left(\frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} - \xi z\right) B_2(\xi)\right] e^{\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi. \qquad (9.212)$$

Удовлетворяя граничным условиям в плоскости $z = 0$

$$\sigma_{zz}^+(r, 0) - \sigma_{zz}^-(r, 0) = 0, \quad \sigma_{rz}^+(r, 0) - \sigma_{rz}^-(r, 0) = 0,$$

$$E_0'(r, 0) = 0 \quad (0 \leqslant r < \infty),$$

получаем соотношения (9.181), с помощью которых вводим функции

$$u_z(r) = u_z^+(r, 0) - u_z^-(r, 0) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{41} A(\xi) + q_{42} B_1(\xi)] J_0(\xi r)\, d\xi,$$

$$(9.213)$$

$$u_r(r) = u_r^+(r, 0) - u_r^-(r, 0) = \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^\infty [q_{51} A_1(\xi) + q_{52} B_1(\xi)] J_1(\xi r)\, d\xi$$

и определяем напряжения в плоскости трещины

$$\sigma_{rz}^+(r, 0) = -\frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dr} \int_0^\infty [q_{21} A_1^+(\xi) + q_{22} B_1^+(\xi)] J_0(\xi r)\, d\xi,$$

$$(9.214)$$

$$\sigma_{zz}^+(r, 0) = \sigma + \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \int_0^\infty [q_{31} A_1^+(\xi) + q_{32} B_1^+(\xi)] J_1(\xi r)\, d\xi.$$

С учетом выражений (9.213) и (9.214) граничные условия вида

$$\sigma_{rz}^+(r, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}^+(r, 0) = 0 \quad (0 \leqslant r < r_т),$$

$$(9.215)$$

$$u_r(r) = 0, \quad u_z(r) = 0 \quad (r_т < r < \infty)$$

приводят к следующей системе парных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dr} \int_0^\infty [q_{21} A_1^+(\xi) + q_{22} B_1^+(\xi)] J_0(\xi r)\, d\xi = 0 \quad (0 \leqslant r < r_т),$$

$$(9.216)$$

$$\frac{1}{\gamma_{22}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \int_0^\infty [q_{31} A_1^+(\xi) + q_{32} B_1^+(\xi)] J_1(\xi r)\, d\xi = -\sigma,$$

$$\frac{1}{\gamma_{22}}\int\limits_0^\infty [q_{41}A_1^+(\xi)+q_{42}B_1^+(\xi)]\,J_0(\xi r)\,d\xi=0\quad (r_т<r<\infty),$$

$$\frac{1}{\gamma_{22}}\int\limits_0^\infty [q_{51}A_1^+(\xi)+q_{52}B_1^+(\xi)]\,J_1(\xi r)\,d\xi=0. \tag{9.217}$$

Для решения системы уравнений (9.216) и (9.217) введем вспомогательные функции $p(\tau)$ и $q(\tau)$ с помощью соотношений

$$q_{41}A_1^+(\xi)+q_{42}B_1^+(\xi)=\gamma_{22}\int\limits_0^{r_т} p(\tau)\sin\xi\tau d\tau,$$

$$q_{51}A_1^+(\xi)+q_{52}B_1^+(\xi)=\gamma_{22}\int\limits_0^{r_т} q(\tau)(\cos\xi\tau-\cos\xi r_т)\,d\tau. \tag{9.218}$$

При этом равенства (9.217) удовлетворяются тождественно, а подстановка $A_1^+(\xi)$, $B_1^+(\xi)$ из равенств (9.218) в (9.216) приводит после изменения порядка интегрирования к двум интегральным уравнениям относительно $p(\upsilon)$, $q(\upsilon)$:

$$\frac{d}{dr}\left\{g_{11}\int\limits_r^{r_т}\frac{p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}+g_{12}\int\limits_0^r\frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r^2-\tau^2}}\right\}=0\quad (0\leqslant r<r_т); \tag{9.219}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{g_{21}\int\limits_0^r\frac{p(\tau)\,\tau d\tau}{\sqrt{r^2-t^2}}+g_{22}\left[\int\limits_0^{r_т}q(\tau)\,d\tau-\int\limits_r^{r_т}\frac{q(\tau)\,\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right]-\right.$$

$$\left.-g_{22}\left(1-\frac{r_т}{\sqrt{r_т^2-r^2}}\right)\int\limits_0^{r_т}q(\tau)\,d\tau\right\}=\sigma r\quad (0\leqslant r<r_т). \tag{9.220}$$

Интегрируя уравнения (9.219) и (9.220) по r, находим

$$g_{11}\int\limits_r^{r_т}\frac{p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}+g_{12}\int\limits_0^r\frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r^2-\tau^2}}=g_{11}C_1'\quad (0\leqslant r<r_т), \tag{9.221}$$

$$g_{21}\int\limits_0^r\frac{\tau p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r^2-\tau^2}}+g_{22}\left[\int\limits_0^{r_т}q(\tau)\,d\tau-\int\limits_r^{r_т}\frac{q(\tau)\,\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right]=$$

$$=g_{22}\left(1-\frac{r_т}{\sqrt{r_т^2-r^2}}\right)\int\limits_0^{r_т}q(\tau)\,d\tau+\frac{\sigma r^2}{2}\quad (0\leqslant r<r_т), \tag{9.222}$$

где C_1^* — постоянная, значение которой будет определено ниже. Применяя оператор $\frac{d}{dv}\int\limits_t^a \frac{r(\ldots)\,dr}{\sqrt{r^2-v^2}}$ к равенствам (9.221) и (9.222), получаем интегральные уравнения вида

$$p_0(v)-\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r_т}^{r_т}\frac{q_0(\tau)\,d\tau}{\tau-v}=\frac{2C_1'}{\pi}v, \tag{9.223}$$

$$q_0(v)+\frac{g_{21}}{g_{22}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r_т}^{r_т}\frac{p_0(\tau)\,d\tau}{\tau-v}=\frac{\sigma}{\pi g_{22}}(r_т^2-2v^2). \tag{9.224}$$

Здесь $p_0(v)=p(v)\sqrt{r_т^2-v^2}$; $q_0(\tau)=q(v)\sqrt{r_т^2-v^2}$. По аналогии с плоской задачей можно показать, что решение уравнений (9.223) и (9.224) эквивалентно решению следующей задачи Римана:

$$F_0^+(v)+\frac{g+1}{g-1}F_0^-(v)=-\frac{2C_1'}{\pi(g-1)}v-\frac{i\sigma g_1}{\pi g_{22}(g-1)}(r_т^2-2v^2), \tag{9.225}$$

где $F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-r_т}^{r_т}\frac{f_0(\tau)\,d\tau}{\tau-z}$ — функция, аналитическая в плоскости с разрезом по отрезку $[-r_т, r_т]$ действительной оси и $f_0(v)=p_0(v)+$ $+ig_1q_0(v)$.

Определяя решение (9.225) в классе функций ограниченных и обращающихся в нуль на концах $v=\pm r_т$, находим

$$F_0(z)=-\frac{C_1'}{\pi g}(z-X(z))-\frac{i\sigma g_1}{2\pi g_{22}g}[r_т^2-2z^2+2(z-2i\varkappa r_т)X(z)],$$

$$X(z)=(z+r_т)^{1/2+i\varkappa}(z-r_т)^{1/2-i\varkappa}, \tag{9.226}$$

$$f_0(v)=\frac{2C_1'}{\pi(g+1)}X^+(v)-\frac{2i\sigma g_1}{\pi g_{22}(g+1)}(v-2i\varkappa r_т)X^+(v),$$

$$X^+(v)=i\sqrt{r_т^2-v^2}\left(\frac{r_т+v}{r_т-v}\right)^{i\varkappa}e^{\pi\varkappa}. \tag{9.227}$$

Из условия $F_0(\infty)=0$ находим

$$C_1'=\frac{\sigma g_1}{g_{22}}\varkappa r_т. \tag{9.228}$$

Таким образом, окончательно получим

$$f_0(\upsilon) = \frac{2\sigma g_1 e^{\pi\varkappa}}{\pi g_{22}(g+1)}(\upsilon - i\varkappa r_{\text{т}})\sqrt{r_{\text{т}}^2 - \upsilon^2}\left[\cos\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right) - \right.$$

$$\left. - i \sin\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right)\right], \tag{9.229}$$

$$p(\upsilon) = \frac{2\sigma g_1 e^{\pi\varkappa}}{\pi g_{22}(g+1)}\left[\upsilon \cos\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right) - \varkappa r_{\text{т}} \sin\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right)\right], \tag{9.230}$$

$$q(\upsilon) = -\frac{2\sigma e^{\pi\varkappa}}{\pi g_{22}(g+1)}\left[\varkappa r_{\text{т}} \cos\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right) + \upsilon \sin\left(\varkappa \ln \frac{r_{\text{т}} - \upsilon}{r_{\text{т}} + \upsilon}\right)\right]. \tag{9.231}$$

Заметим, что $\int\limits_0^{r_{\text{т}}} q(\upsilon)\, d\upsilon = 0$ и скачки смещений на берегах трещины определяются по формулам

$$u_z(r) = u_z^+(r, 0) - u_z^-(r, 0) = \int\limits_r^{r_{\text{т}}} \frac{p(\upsilon)\, d\upsilon}{\sqrt{\upsilon^2 - r^2}}, \tag{9.232}$$

$$u_{\text{т}}(r) = u_r^+(r, 0) - u_r^-(r, 0) = -\frac{1}{r}\int\limits_r^{r_{\text{т}}} \frac{q(\upsilon)\, \upsilon d\upsilon}{\sqrt{\upsilon^2 - r^2}} \tag{9.233}$$

Напряжения на продолжении разреза также можно выразить через функции $p(\upsilon)$, $q(\upsilon)$

$$\sigma_{zz}^+(r, 0) = \sigma - g_{21}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{r_{\text{т}}} \frac{p(\upsilon)\, \upsilon d\upsilon}{\sqrt{r^2 - \upsilon^2}} \quad (r > r_{\text{т}}), \tag{9.234}$$

$$\sigma_{rz}^+(r, 0) = g_{12}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{r_{\text{т}}} \frac{q(\upsilon)\, d\upsilon}{\sqrt{r^2 - \upsilon^2}} \quad (r > r_{\text{т}}). \tag{9.235}$$

При малых значениях параметра $\varkappa$ используем приближенные выражения

$$p(\upsilon) \cong \frac{2}{\pi}\sigma\frac{1}{g_{21}}\upsilon, \quad q(\upsilon) \cong 0,$$

$$u_z(r) \cong \frac{2}{\pi}\frac{\sigma}{g_{21}}\sqrt{r_{\text{т}}^2 - r^2}, \quad u_r(r) \cong 0 \quad (r < r_{\text{т}}),$$

$$\sigma_{zz}^+(r, 0) \cong \sigma + \frac{2\sigma}{\pi}\left[\frac{r_{\text{т}}}{\sqrt{r^2 - r_{\text{т}}^2}} - \arcsin\frac{r_{\text{т}}}{r}\right] \quad (r > r_{\text{т}}), \tag{9.236}$$

$$\sigma_{rz}^+(r, 0) \cong 0 \quad (r > r_{\text{т}}),$$

с помощью которых можно записать условие разрушения

$$2\gamma = \frac{1}{r_\varphi} \lim_{\Delta r_т \to 0} \frac{1}{\Delta r_т} \int\limits_{r_т}^{r_т+\Delta r_т} \sigma_{zz}^{+}(r, 0, r_т)' u_z(r, r_т + \Delta r_т)\, r dr,$$

где $\sigma_{zz}^{+}(r, 0, r_т)$ — нормальные напряжения на продолжении дисковидной трещины радиуса $r_т$; $u_z(r, r_т + \Delta r_т)$ — скачок нормальных смещений берегов трещины радиуса $r_т + \Delta r_т$. Подставляя выражения (9.236) в последнюю формулу, получаем (с учетом, что $g \gg 1$ и $\varkappa \sim 0$)

$$\gamma = \frac{\sigma^2 r_т}{\pi g_{21}}. \qquad (9.237)$$

9.5. Решение плоской краевой задачи электроупругости для пьезоэлектрической среды с криволинейными разрезами

В работе [22] сопряженные поля в пьезоэлектрической среде класса $6mm$ с криволинейными разрезами определяются с использованием аналитических функций комплексных переменных, которые можно ввести для плоской деформации такой среды в плоскости x_1Ox_2. Представим компоненты напряжений плоской задачи в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xz} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \qquad (9.238)$$

где ψ — функция напряжений, и введем обычным образом электрический потенциал

$$E_x' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_z' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (9.239)$$

Подставляя выражения (9.238) и (9.239) в уравнения состояния (9.23), получаем выражения для компонентов деформаций ε_{xx}, ε_{zz}, ε_{xz} и составляющих вектора электрической индукции, содержащие функцию напряжений ψ и электрический потенциал φ. Так как с учетом выражений (9.238) уравнения равновесия среды удовлетворяются тождественно, то подстановка ε_{xx}, ε_{zz}, ε_{xz}, D_x и D_z в уравнения неразрывности и электростатики приводит к следующей системе дифференциальных уравнений плоской задачи электростатики [22]:

$$e_{11}\psi + e_{12}\varphi = 0, \quad e_{12}\psi + e_{22}\varphi = 0. \qquad (9.240)$$

Здесь

$$e_{11} = a_{10}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_{12}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + a_{14}\frac{\partial^4}{\partial z^4}; \quad e_{12} = e_{21} = a_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} +$$

$$+ a_{23}\frac{\partial^3}{\partial z^3}; \quad e_{22} = a_{20}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad a_{10} = S_{33} - S_{13}^2/S_{11};$$

$$a_{12} = S_{44} + 2S_{13}(1 - S_{12}/S_{11}).; \quad a_{14} = S_{11} - S_{12}^2/S_{11}; \quad a_{21} =$$

$= S_{13}d_{13}/S_{11} - d_{33} + d_{15}; \qquad a_{23} = d_{13}\,(S_{12}/S_{11} - 1); \qquad a_{20} = \varepsilon^s_{11},$

$$a_{22} = \varepsilon^s_{33} - d^2_{31}/S_{11};$$

S_{ik} — коэффициенты упругой податливости; d_{ik} — пьезоэлектрические модули.

Общее решение системы уравнений (9.240) выражается через три аналитические функции трех комплексных переменных

$$\psi = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\int\Phi_k(z_k)\,dz_k,$$
$$\varphi = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Phi_k(z_k), \qquad (9.241)$$

где $z_k = x + \mu_k z$; $\gamma_k = a_{20} + a_{22}\mu_k^2$; $\lambda_k = a_{21}\mu_k + a_{23}\mu_k^3$; μ_k — корни характеристического уравнения

$$(a_{10} + a_{12}\mu^2 + a_{14}\mu^4)(a_{20} + a_{22}\mu^2) - \mu^2(a_{21} + a_{23}\mu^2)^2 = 0$$
$$(\mathrm{Im}\,\mu_k \neq 0;\; k = 1, 2, 3). \qquad (9.242)$$

Используя теперь представления (9.241) и уравнения (9.238), (9.239) находим

$$\sigma_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^2\Phi'_k(z_k), \quad \sigma_{zz} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi'_k(z_k);$$
$$\sigma_{xz} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k\Phi'_k(z_k); \qquad (9.243)$$

$$E'_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Phi'_k(z_k), \quad E'_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_k\Phi'_k(z_k); \qquad (9.244)$$

$$D_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\mu_k\Phi'_k(z_k), \quad D_z = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\Phi'_k(z_k); \qquad (9.245)$$

$$u_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}p_k\Phi_k(z_k), \quad u_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\Phi_k(z_k). \qquad (9.246)$$

Здесь $p_k = a_{14}\gamma_k\mu_k^2 + \frac{1}{2}(a_{12} - S_{44})\,\gamma_k - a_{23}\lambda_k\mu_k$; $q_k = \frac{1}{2}(a_{12} - S_{44}) \times \times\, \gamma_k\mu_k + a_{10}\gamma_k/\mu_k - (a_{21} - d_{15})\,\lambda_k$; $r_k = a_{20}\lambda_k/\mu_k - d_{15}\gamma_k$. Рассмотрим неограниченную плоскость с произвольными криволинейными разрезами L_j, на берегах которых заданы усилия $\sigma^{\pm}_{nx}$, $\sigma^{\pm}_{nz}$ и значения электрического потенциала $\varphi^+ = \varphi^- = \varphi$ (рис. 9.5). Тогда с учетом выражений

(9.244) и (9.245) краевые условия на контурах L_j записываются в виде

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}\Phi_k'(\tau_k)\right\}^{\pm}=W_n^{\pm}(\tau)\quad (n=1,2,3),\qquad (9.247)$$

где $\tau_k=\mathrm{Re}\,\tau+\mu_k\,\mathrm{Im}\,\tau$ $(\tau\in L)$; $L=\bigcup\limits_{j=1}^{r}L_j$; $\alpha_{1k}=\gamma_k\mu_k(\mu_k\cos\Psi-\sin\Psi)$; $\alpha_{2k}=\gamma_k(\mu_k\cos\Psi-\sin\Psi)$; $\alpha_{3k}=\lambda_k(\mu_k\cos\Psi-\sin\Psi)$; $W_1^{\pm}=\mp X_n^{\pm}$; $W_2^{\pm}=\mp Z_n^{\pm}$; $W_3^{\pm}=\frac{d\varphi}{dS}$; Ψ — угол между нормалью к левому берегу L_j (при движении от a_j до b_j) и осью x.

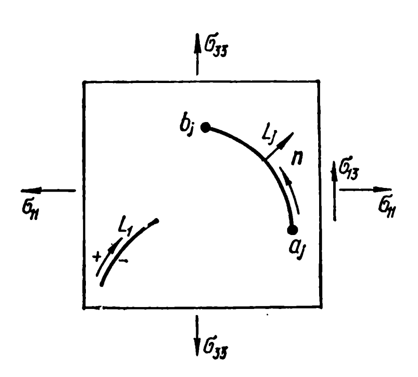


Рис. 9.5. Плоскость с разрезами L_j и заданными значениями усилия и электрического потенциала.

Если предположить, что на бесконечности действует однородное поле механических напряжений $\sigma_{xx}^{(0)}$, $\sigma_{zz}^{(0)}$, $\sigma_{xz}^{(0)}$, а $E_x^{\infty}=E_z^{\infty}$, то функции $\Phi_k'(z_k)$ можно искать в виде

$$\Phi_k'(z_k)=A_k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_k(\tau_k)}{\tau_k-z_k}d\tau_k\quad (k=1,2,3),\qquad (9.248)$$

где постоянные A_k определяются из условий на бесконечности

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^2A_k=\sigma_{xx}^{(0)},\quad 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_kA_k=-\sigma_{xz}^{(0)},$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_kA_k=\sigma_{zz}^{(0)},\quad \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kA_k=0,\qquad (9.249)$$

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_kA_k=0,$$

Подставляя функцию (9.248) в краевое условие (9.247), получаем после некоторых преобразований систему трех интегральных уравнений вида

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}^0\left[2A_k+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_k(\tau_k)}{\tau_k-\tau_{k0}}d\tau_k\right]=W_n^{(2)}(\tau_0),\qquad (9.250)$$

где $W_n^{(2)}(\tau)=W_n^{+}(\tau)+W_n^{-}(\tau)$; $\tau_{k0}=\mathrm{Re}\,\tau_0+\mu_k\,\mathrm{Im}\,\tau_0$; $\alpha_{nk}^0=\alpha_{nk}(\tau_0)$

здесь $\tau_0 \in L$; $n = 1, 2, 3$), и линейные алгебраические соотношения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{3} \alpha_{nk} \omega_k (\tau) = W_n^{(1)} (\tau),$$
$$W_n^{(1)} (\tau) = W_n^{+} - W_n^{-} \quad (\tau \in L). \qquad (9.251)$$

С учетом соотношений (9.251) уравнения (9.250) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \int_L \{g_{nk} (\tau, \tau_0) \omega_k (\tau) + G_{nk} (\tau, \tau_0) \overline{\omega_k (\tau)}\} d\tau = N_n (\tau_0). \qquad (9.252)$$

Здесь

$$g_{nk} (\tau, \tau_0) = \frac{\alpha_{nk}}{\tau - \tau_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_{nk}^0}{\tau_k - \tau_{k0}} \frac{d\tau_k}{d\tau} - \frac{\alpha_{nk}}{\tau - \tau_0} \right];$$

$$G_{nk} (\tau, \tau_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\overline{\alpha_{nk}}}{\tau - \tau_0} - \frac{\alpha_{nk}^0}{\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_{k_0}} \frac{\overline{d\tau_k}}{d\tau} \right] \quad (n, k = 1, 2, 3),$$

$$N_n (\tau_0) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{W_n^{(1)} d\tau}{\tau - \tau_0} + W_n^{(2)} + M_n \quad (\tau_0 \in L),$$

$$M_1 = -2 (\sigma_{xx}^{(0)} \cos \Psi_0 + \sigma_{xz}^{(0)} \sin \Psi_0), \quad M_3 = 0,$$

$$M_2 = 2 (\sigma_{xz}^{(0)} \cos \Psi_0 + \sigma_{zz}^{(0)} \sin \Psi_0), \quad \Psi_0 = \Psi (\tau_0).$$

К уравнениям (9.252) необходимо добавить условия однозначности смещений и равенства нулю потока вектора электрической индукции через любой замкнутый контур, охватывающий L_j, которые с учетом формул (9.241), (9.245) и (9.248) можно записать так:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{3} p_{nk} \int_{L_j} \omega_k (\tau_k) d\tau_k = 0 \quad (n = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, \ldots, r),$$
$$p_{1k} = p_k, \quad p_{2k} = q_k, \quad p_{3k} = \lambda_k a_{20}/\mu_k - \gamma_k d_{15}. \qquad (9.253)$$

Таким образом, искомые функции $\omega_k(\tau)$ однозначно определяются из уравнений (9.251)—(9.253).

Аналогично используется представление решения плоской задачи электроупругости с помощью аналитических функций $\Phi_k' (z_k)$ в работах [23, 24], в которых электрические граничные условия на берегах разрезов даны в виде [25]

$$E_s'^{+} = E_s'^{-}, \quad D_n^{+} = D_n^{-}. \qquad (9.254)$$

9.6. Результаты экспериментального изучения характеристик трещиностойкости пьезокерамик

В настоящее время экспериментальные данные по характеристикам разрушения пьезоэлектрических материалов практически отсутствуют (только в последние годы опубликовано несколько работ, посвященных

исследованию разрушения пьезокерамических материалов). Основные трудности определения характеристик разрушения пьезокерамик заключаются в создании начальной трещины и измерении ее длины, поскольку в пьезокерамических материалах усталостную трещину выращивать невозможно из-за отсутствия заметных пластических деформаций. Кроме того, анизотропия упругих и прочностных свойств поляризованной керамики приводит к дополнительным трудностям в определении характеристик разрушения.

При разрушении хрупких материалов, например стекла или керамики, разрушающее напряжение можно связать с размерами характерных особенностей излома. Для таких материалов в результате испытаний круглых образцов на изгиб установлено следующее эмпирическое отношение между разрушающим напряжением $\sigma_р$ и радиусом $r_з$ зеркальной зоны излома [15, 16]:

$$\sigma_р r_з^{1/2} = K'. \tag{9.255}$$

Здесь константа K' соответствует критическому коэффициенту интенсивности напряжений для начала ветвления трещины, а под зеркальной зоной понимается относительно гладкий участок поверхности разрушения, прилегающий к зародышу трещины нормального отрыва. Зависимость (9.238) совместно с соотношением [16]

$$\sigma_р = 0{,}79 \frac{K_{IC}}{\sqrt{a}}, \tag{9.256}$$

где a — глубина начального дефекта, позволяет получить значение критического коэффициента интенсивности для материала типа пьезокерамики. Данный метод использовался в работе [16] для исследования характеристики разрушения поляризованной керамики состава ЦТБС-3. Эксперимент проводился на цилиндрических образцах, вырезанных таким образом, что их ось была перпендикулярна оси симметрии поляризованной керамики. При длинах трещины, равных среднему размеру естественного дефекта в материале (около 30 мкм), в работе [16] было получено значение $K_{IC} = 0{,}7$ МН/м$^{3/2}$.

Для керамических материалов одним из наиболее простых и надежных методов определения K_{IC} является метод двойного кручения [17, 18].

Среднее значение K_{IC}, полученное с помощью указанного метода, при распространении трещины в плоскости параллельной оси остаточной поляризации для материала ЦТБС-3 составляет 0,957 МН/м$^{3/2}$ [17].

Существует методика определения характеристик разрушения хрупких материалов методом вдавливания инденторов, которые используются при стандартных измерениях твердости. Достоинство такой методики — возможность определения характеристик разрушения непосредственно на конструкционном элементе. Кроме того, она позволяет исследовать анизотропию характеристик разрушения. В качестве индентора обычно используется четырехгранная алмазная пирамида Виккерса и значение K_{IC} определяется по эмпирической формуле

$$P r_т^{-3/2} = \beta K_{IC}, \tag{9.257}$$

где P — нагрузка на индентор; $r_т$ — радиус дискообразной трещины, образуемой индентором (рис. 9.6); β — эмпирическая безразмерная константа, зависящая от материала образца и формы индентора.

Как следует из формулы (9.257), точность определения значений K_{IC} зависит от точности определения длины трещины у отпечатка и константы β. Так, для пьезокерамики ЦТБС-3 среднее значение K_{IC}, полученное методом вдавливания, на 10 % выше, чем значение, полученное методом двойного кручения [17]. Однако, учитывая простоту метода вдавливания, можно считать его весьма перспективным.

Исследование возможностей метода вдаливания для определения характеристик разрушения поляризованных керамик отечественных составов содержится в [19]. Там же проведено определение критических коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, плоскости которых раз-

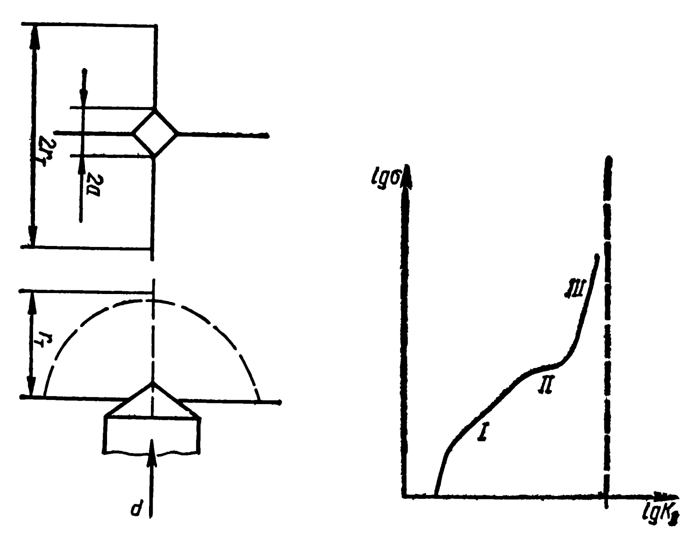


Рис. 9.6. Схема растрескивания у отпечатка пирамиды Виккерса.

Рис. 9.7. Диаграмма усталостного разрушения.

лично ориентированы по отношению к оси симметрии поляризованной керамики. В результате вдавливания алмазной четырехгранной пирамиды в образец поляризованной керамики на его поверхности образуются две взаимно перпендикулярные дисковидные трещины, которые при произвольной ориентации ребер пирамиды (относительно оси симметрии материала) имеют различную глубину.

Результаты измерения глубины трещин, развивающихся в плоскостях, параллельных и перпендикулярных оси поляризации материала, позволяют определить по формуле (9.257) соответствующие значения $K_{IC}^{\parallel}$, $K_{IC}^{\perp}$ для ряда составов пьезокерамик, которые представлены в табл. 9.1. В этой таблице указано также промежуточное значение K_{IC} для трещин, плоскость которых составляет угол 45° с осью симметрии среды.

В поляризованном состоянии все пьезокерамики имеют существенную анизотропию характеристик трещиностойкости При этом у всех составов в плоскости, перпендикулярной оси остаточной поляризации, значения K_{IC} меньше и, следовательно, трещина легче всего распространяется именно в этой плоскости.

Таблица 9.1. Характеристики трещиностойкости пьезокерамических материалов

Материал	Пьезомодуль $d_{31} \cdot 10^{12}$, кН$^{-1}$	Плоскость развития трещины по отношению к направлению поляризации	K_{IC}, МПа×$\times$м$^{1/2}$
ЦТКНС-1, поляризованный	~140	⊥	1,06±0,22
		‖	1,44±0,1
		45°	0,97±0,9
ЦТЦНС-1, поляризованный	~160	⊥	0,87±0,26
		‖	1,29±0,23
		45°	0,97±0,21
ЦТС-19, неполяризованный	—	—	1,01±0,18
ЦТС-23, поляризованный	100	—	1,07±0,17
ЦТБС-3, неполяризованный	—	—	0,99±0,15
ЦТБС-3, поляризованный	158	⊥	0,57±0,1
		‖	1,23±0,1
		45°	0,85±0,08
ЦТБС-3, располяризованный	—	—	1,09±0,14
ЦТСНВ-1, неполяризованный	—	—	0,73±0,6
ЦТНСВ-1, обычная поляризация	163	⊥	0,59±0,04
		‖	1,15±0,13
		45°	0,98±0,16
ЦТСНВ-1, поляризованный в точке Кюри	195	⊥	0,65±0,06
		‖	1,4±0,15
		45°	0,82±0,06

Примечание. ⊥ — перпендикулярно; ‖ — параллельно; 45° — под углом 45°.

В работе [19] представлен также расчет плотности поверхностной энергии (энергии разрушения) γ для состава ЦТБС-3 по формуле $\gamma = \frac{1}{2} K_{IC}^2 S_1$, где S_1 — податливость для соответствующего направления развития трещины.

Для пьезокерамики ЦТБС-3 энергия разрушения в плоскости, перпендикулярной оси остаточной поляризации, составляет 2,4 Дж·м$^{-2}$, в плоскости, параллельной этой оси,— 7,44, а для неполяризованной керамики — 4,05 Дж·м$^{-2}$.

Кроме того, данные, представленные в табл. 9.1, указывают на необратимые изменения, происходящие в материале ЦТБС-3 под действием сильного электрического поля: при возвращении в исходное состояние первоначально поляризованного образца значение K_{IC} располяризованного материала выше, чем неполяризованного.

Так как в пьезокерамических материалах трещины докритического размера [20] растут медленно, то для обеспечения надежности и предсказания срока службы изделий из пьезокерамики необходимо знать характеристики докритического роста трещин в таких материалах. Обычно для описания поведения трещины в процессе ее медленного роста используют данные эксперимента, позволяющие установить вид зависимости скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений. Для боль-

шинства керамических материалов эта зависимость, представленная в логарифмических координатах, имеет вид, указанный на рис. 9.7 [20, 21], причем наиболее важен участок I (на него приходится большая часть времени роста трещины до критического размера). При изучении медленного роста трещин в пьезокерамике ЦТБС-3 в работе [20] предполагалось, что скорость роста трещины v зависит от коэффициента интенсивности $K_{\rm I}$ следующим образом:

$$v = AK_{\rm I}^{n}, \tag{9.258}$$

где постоянные A и n, определяются экспериментально (для трещины, распространяющейся в плоскости, параллельной оси остаточной поляризации, $A = 2{,}377 \cdot 10^{-4}$, $n = 47$).

ГЛАВА 10

ПОВЕДЕНИЕ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В главе приведены основные уравнения для определения напряженно-деформированных состояний твердых тел с трещинами-разрезами при воздействии на тело силовых и электромагнитных полей [1—12].

10.1. Основные уравнения магнитотермоупругости

Природа взаимодействия электромагнитного поля с упругим телом, содержащим трещину, разнообразна и зависит прежде всего от свойств материала тела. В электропроводящем упругом теле, не обладающем намагниченностью, напряженное состояние в окрестности вершины трещины исследуется на основе линейных уравнений магнитоупругости. Задача связанной магнитоупругости для изотропного упругого тела, которое подвержено действию механических нагрузок и находится в переменном магнитном поле, решается с использованием уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_e,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad (10.1)$$

и уравнений движения упругой электропроводящей среды, дополненных массовой силой Лоренца и силой, обусловленной существованием свободных зарядов в электрическом поле,

$$\sigma_{ij,j} + \rho_e E_i + (\mathbf{J}\times\mathbf{B})_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \qquad (10.2)$$

Здесь **E**, **H** — векторы напряженностей электрического и магнитного полей; **J** — вектор плотности тока; ρ_e —плотность свободных электрических зарядов; σ_{ij} — тензор напряжений; u_i — компоненты вектора упругого смещения **u**.

К уравнениям (10.1) и (10.2) необходимо добавить уравнение, выражающее закон Гука для линейного упругого тела,

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (10.3)$$

и уравнения состояния для движущейся изотропной среды [1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon'\mathbf{E} + \alpha'\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_1\mathbf{H} - \alpha'\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{E}. \qquad (10.4)$$

Здесь ε', μ_1 — электричекая и магнитная проницаемость материала; $\alpha' = \varepsilon'\mu_1 - \varepsilon_0\mu_0$; ε_0, μ_0 — электрическая и магнитная проницаемость вакуума.

Для движущейся среды вектор плотности электрического тока $\mathbf{J}$ определяется обобщенным законом Ома

$$\mathbf{J} = \rho_e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sigma_{\text{пр}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right), \tag{10.5}$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ — проводимость среды.

Уравнения (10.1)—(10.5) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений магнитоупругости для однородной изотропной среды. Они должны быть решены при заданных начальных условиях и с учетом граничных условий на поверхности раздела двух сред. В общем случае поверхность S, ограничивающая упругое тело, является границей раздела двух сред с различными электромагнитными свойствами. При отсутствии на ней поверхностных токов и зарядов граничные условия для электромагнитного поля имеют вид

$$\left[\mathbf{E}_\tau + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}_\tau \right] = 0, \quad \left[\mathbf{H}_\tau - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{D}_\tau \right] = 0,$$

$$[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\sigma_{\text{пр}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{n} + \rho_e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{10.6}$$

Здесь символ [ ] означает скачок соответствующей величины на поверхности S; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S; $\mathbf{E}_\tau$, $\mathbf{D}_\tau$, $\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{B}_\tau$ — составляющие векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, параллельные плоскости, касательной к поверхности S. Последнее равенство системы (10.6) соответствует условию непротекания электрического тока через поверхность S и для его выполнения необходимо, чтобы электрическая проводимость среды, окружающей тело, была равна нулю.

При формулировке граничных условий для механических напряжений следует учесть максвелловские напряжения

$$\sigma_{ij}^{\text{M}} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E_k D_k + H_k B_k), \tag{10.7}$$

где E_i, D_i, H_i, B_i — компоненты соответствующих векторов. Так как полные напряжения в теле равны сумме упругих и максвелловских напряжений, то граничные условия на поверхности S можно записать в виде

$$[\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{M}}]\, n_j = 0. \tag{10.8}$$

Стационарное электромагнитное поле, которое действует на покоящееся тело, определяется из решения уравнений электро- и магнитостатики

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J}_0 = 0, \end{gathered} \tag{10.9}$$

$$D_0 = \varepsilon' \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B}_0 = \mu_1 H_0, \quad \mathbf{J}_0 = \sigma_{\text{пр}} \mathbf{E}_0 \tag{10.10}$$

при условиях

$$[\mathbf{E}_{0\tau}] = 0, \quad [\mathbf{H}_{0\tau}] = 0, \quad [\mathbf{B}_0]\cdot\mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{D}_0]\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{10.11}$$

а соответствующее напряженно-деформированное состояние тела находится из уравнений статической теории упругости

$$\sigma^0_{ij,j} + (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0)_i = 0. \tag{10.12}$$

Подставляя компоненты электромагнитного поля в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}, \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{d}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j}, \end{gathered} \tag{10.13}$$

где векторы h, e, d, b, j соответствуют малым возмущениям электромагнитного поля, в выражения (10.1)—(10.5) и пренебрегая квадратами и произведениями малых возмущений, получаем линейную систему дифференциальных уравнений магнитоупругости

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{d} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{h} - \frac{\partial d}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{b} = 0; \end{gathered} \tag{10.14}$$

$$\sigma_{ij,j} + (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{b} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0)_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \tag{10.15}$$

$$\mathbf{j} = \sigma_{\text{пр}}\left(\mathbf{e} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right); \tag{10.16}$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon'\mathbf{e} + \alpha' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{b} = \mu_1\mathbf{h} - \alpha' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{E}_0. \tag{10.17}$$

С учетом выражений (10.3), (10.16) и (10.17) системы уравнений (10.14) и (10.15) принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{e} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \alpha' \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \times \mathbf{E}_0 = 0, \tag{10.18}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} - \varepsilon' \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \alpha' \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \times \mathbf{H}_0 = \sigma_{\text{пр}}\left(\mathbf{e} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right), \tag{10.19}$$

$$\varepsilon' \operatorname{div}\mathbf{e} + \alpha' \operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right) = 0, \quad \mu_1 \operatorname{div}\mathbf{h} - \alpha' \operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{E}_0\right) = 0, \tag{10.20}$$

$$\begin{gathered} (\lambda + 2G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - G\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \sigma_{\text{пр}}\Big\{\mu_1\mathbf{E}_0 \times \mathbf{h} + \mu_1\mathbf{e} \times \mathbf{H}_0 - \\ - \alpha'\left(\mathbf{E}_0 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{E}_0\right) + \mu_1^2\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0\right)\Big\} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{10.21}$$

Соотношения для возмущенного состояния после линеаризации граничных

условий (10.6) следующие:

$$\left[\mathbf{e}_\tau + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_{0\tau}\right] = 0, \quad \left[\mathbf{h}_\tau - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{E}_{0\tau}\right] = 0,$$
$$\left[\mu_1 \mathbf{h} - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{E}_0\right] \mathbf{n} = 0, \quad \left[\varepsilon \mathbf{e} + \alpha' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right] \mathbf{n} = 0. \tag{10.22}$$

Для электропроводного тела, находящегося в однородном магнитном поле с вектором напряженности $\mathbf{H}_0$, можно пренебречь токами смещения в уравнениях (10.14) и полагать $\alpha' = 0$. Тогда при $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{J}_0 = 0$ система линеаризованных уравнений магнитоупругости принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \tag{10.23}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sigma_{\text{пр}} \left(\mathbf{e} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right), \tag{10.24}$$

$$\sigma_{ij,j} + \mu_1 (\mathbf{j} \times \mathbf{H}_0)_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{10.25}$$

Исключая вектор $\mathbf{e}$ из уравнений (10.23), (10.24), получаем

$$\Delta \mathbf{h} - \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right) = 0, \tag{10.26}$$

$$\sigma_{ij,j} + \mu_1 (\operatorname{rot} \mathbf{h} \times \mathbf{H}_0)_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{10.27}$$

При идеальной электрической проводимости материала система уравнений (10.26), (10.27) значительно упрощается, т. е. при $\sigma \to \infty$

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \tag{10.28}$$

тогда уравнение (10.27) можно записать в виде

$$G \Delta \mathbf{u} + (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_1 \operatorname{rot} \mathbf{h} \times \mathbf{H}_0 = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{10.29}$$

При наличии процесса теплопроводности уравнения Максвелла и движения среды необходимо дополнить обобщенным уравнением теплопроводности электропроводящих сред. С учетом связанности полей деформации и температуры оно записывается в виде [2]

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \eta \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) - \frac{Q}{\lambda_\text{т}} + \frac{\pi_0}{\lambda_\text{т}} \operatorname{div} \mathbf{J}, \tag{10.30}$$

где $\eta = \frac{\beta T_0}{\lambda_\text{т}}$; $\beta = \alpha_t (3\lambda + 2G)$; T_0—температура в недеформированном и ненапряженном состоянии; $a = \lambda_\text{т}/C_v$ — температуропроводность; $\mathbf{J}$ — плотность тока; Q — интенсивность внутренних тепловых источников;

π_0 — коэффициент, определяющий влияние электрического тока на плотность теплового потока.

Соотношение, выражающее обобщенный закон Ома, также дополняется слагаемым, связывающим электромагнитное поле с температурным градиентом:

$$\mathbf{J} = \sigma_{\text{пр}} \left[\mathbf{E} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \right] - \varkappa \operatorname{grad} T. \tag{10.31}$$

Если электро- и теплопроводящее тело находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, а связанностью полей температуры и деформации можно пренебречь, то в результате линеаризации уравнений магнитотермоупругости можно получить [2]

$$\Delta \mathbf{h} - \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right) = 0;$$

$$G \Delta \mathbf{u} + (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta \operatorname{grad} T + \mu_1 (\operatorname{rot} \mathbf{h} \times \mathbf{H}_0) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{10.32}$$

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{Q}{\lambda_т}.$$

Термоупругое состояние электропроводных тел, находящихся в переменном электромагнитном поле, исследуется с помощью упрощенной схемы несвязанной задачи магнитотермоупругости, в соответствии с которой из уравнений электродинамики определяется электромагнитное поле и отвечающее ему распределение джоулевых источников тепла. Без учета токов смещения данная задача сводится к решению уравнения

$$\Delta \mathbf{H} = - \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{10.33}$$

и определению плотности электрического тока

$$\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \tag{10.34}$$

На основании этого выражения можно найти интенсивность джоулевых источников тепла

$$Q = \frac{1}{\sigma_{\text{пр}}} |\mathbf{J}|^2, \tag{10.35}$$

а затем использовать выражение (10.35) (осредненное по периоду колебаний электромагнитного поля) для установления функции температуры T. После определения температурного поля можно найти напряженно-деформированное термоупругое состояние тела, пренебрегая при этом пондеромоторными силами и связанностью полей деформации и температуры.

10.2. Уравнения магнитоупругости с учетом эффекта намагниченности

Воздействие внешнего магнитного поля на некоторые тела связано с явлением намагниченности, которое состоит в том, что тело, помещенное во внешнее магнитное поле, приобретает магнитный момент и подвергается механическому воздействию со стороны внешнего поля. При изучении дан-

ного явления вводится в рассмотрение вектор намагниченности **M**, совпадающий с направлением магнитного момента и равный значению этого момента, отнесенного к единице объема деформируемого тела. Вектор магнитной индукции **B** внутри тела определяется выражением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{10.36}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/a^2$; **H** — вектор напряженности магнитного поля.

При выводе уравнений движения намагниченных сред необходимо учитывать, что в них на единицу массы, заключенной внутри произвольного объема dV, действуют объемные силы f_k и объемные пары l_k [3]

$$f_k = \mu_0 M_j H_{kj}; \qquad l_k = \mu_0 \varepsilon_{ijk} M_j H_l, \tag{10.37}$$

где ε_{ijk} — кососимметричный символ Кронекера. С учетом выражений (10.37) из уравнения количества движения и момента количества движения можно получить уравнения движения намагниченной среды

$$\sigma'_{ij,j} + \mu_0 M_i H_{j,i} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \tag{10.38}$$

и соотношение

$$\varepsilon_{ijk} (\sigma'_{jk} + \mu_0 M_j H_k) = 0, \tag{10.39}$$

выражающее несимметричность тензора напряжений σ'_{ij}. Таким образом, из равенства (10.39), которое можно записать в виде

$$\sigma'_{jk} - \sigma'_{kj} + \mu_0 (M_j H_k - M_k H_j) = 0, \tag{10.40}$$

следует, что учет намагниченности приводит к несимметричному тензору напряжений.

Соотношение (10.40) будет удовлетворяться тождественно, если

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \mu_0 (M_i H_j - M_j H_i), \tag{10.41}$$

где σ_{ij} — симметричный тензор. Уравнения движения намагниченной среды могут быть также записаны в виде

$$(\sigma'_{ij} + \sigma^{M}_{ij})_{j,i} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \tag{10.42}$$

где $\sigma^{M}_{ij} = \mu_0 \left[H_i H_j - \frac{1}{2} (H_k H_k) \delta_{ij} \right] + \mu_0 M_i H_j$—несимметричный магнитный тензор Максвелла.

При движении проводящего тела в магнитном поле или изменении магнитного поля во времени в теле возникают индуцированные токи и обусловленные ими пондеромоторные силы Лоренца. Причем для некоторых материалов влияние индуцированного тока выражено более слабо, чем влияние намагниченности. Последнее справедливо для магнитно-мягких ферромагнетиков с малыми гистерезисными потерями (узкая петля гистерезиса) и низкой остаточной намагниченностью. К ним принадлежат различные железо-никелевые сплавы, используемые в элементах электродвигателей, генераторов, индукторов и т. п. Влиянием токов проводимости на упругую деформацию тела при изучении взаимодействия магнитного поля с пьезо-

магнитными материалами можно пренебречь. Среди пьезомагнитных наиболее важное место занимают ферриты, изготовленные по керамической технологии, так называемая пьезомагнитная керамика.

В условиях квазистатического приближения уравнения движения упругого намагниченного тела (10.42) следует дополнить уравнениями магнитостатики

$$B_{i,i} = 0, \quad H_{j,k} - H_{k,j} = 0 \tag{10.43}$$

и соответствующими граничными условиями на поверхности S для напряжений $\sigma'_{ij} + \sigma^{M}_{ij}$ и составляющих B_i, H_i соответствующих векторов.

При решении задачи магнитоупругого взаимодействия необходимо к уравнениям (10.42) и (10.43) добавить уравнения состояния намагниченных сред, связывающие напряжение магнитного поля с деформациями и намагниченностью. Полученная система уравнений будет нелинейной и для решения конкретных задач весьма полезна ее линеаризация.

Предложенная в работе [4] линейная теория магнитоупругости для магнитно-мягких ферромагнетиков многодоменной структуры построена на основе теории упругости при конечных деформациях и классической теории ферромагнетизма. Общие уравнения механики и электродинамики для намагниченных сред в этой работе линеаризуются с помощью предположения о том, что все компоненты магнитного поля (интенсивность магнитного поля, индукция и намагниченность) в деформируемом теле можно разделить на две части, связанные с состоянием жесткого недеформированного тела и с возмущенным состоянием. Таким образом, предполагается, что

$$B_i = B_{0i} + b_i, \quad M_i = M_{0i} + m_i, \quad H_i = H_{0i} + h_i, \tag{10.44}$$

$$B_{0i} = \mu_0 (H_{0i} + M_{0i}), \quad b_i = \mu_0 (h_i + m_i).$$

Здесь величины B_{0i}, M_{0i}, H_{0i} относятся к жесткому недеформированному состоянию и определяются решением уравнений магнитостатики, а b_i, m_i, h_i соответствуют возмущенному состоянию, связанному с деформацией тела. Для нахождения жесткого недеформированного состояния можно использовать уравнения магнитостатики

$$e_{ijk} H_{0k,j} = 0, \quad B_{0i,i} = 0,$$
$$B_{0i} = \mu_0 (H_{0i} + M_{0i}) = \mu_1 H_{0i}, \quad H_{0i} = \frac{1}{\chi} M_{0i}, \tag{10.45}$$

где $\mu_1 = \mu_0 (1 + \chi)$; χ — магнитная восприимчивость.

Соответствующие граничные условия записываются в виде

$$e_{ijk} n_j [H_{0k}] = 0, \quad n_k [B_{0k}] = 0. \tag{10.46}$$

Для возмущенного состояния магнитного поля в изотропном материале также справедливы уравнения магнитостатики

$$e_{ijk} h_{kij} = 0, \; b_{i,i} = 0, \; b_i = \mu_0 (h_i + m_i) = \mu_1 h_i, \quad h_i = \frac{1}{\chi} m_i, \tag{10.47}$$

а линеаризованные уравнения движения изотропного тела имеют вид [4]

$$\sigma'_{ij,i} + \mu_0 (M_{0j} H_{0i,i} + M_{0i} h_{j,i} + m_i H_{0j,i}) = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \tag{10.48}$$

где тензор магнитоупругих напряжений σ'_{ij} определяется по формуле

$$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}+\frac{\mu_0}{\chi}M_{0i}M_{0j}+\frac{\mu_0}{\chi}(M_{0i}m_j+M_{0j}m_i) \tag{10.49}$$

(здесь $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+G(u_{i,j}+u_{j,i})$).

При этом линеаризованное выражение для магнитного тензора максвелловских напряжений следующее:

$$\sigma^M_{ij}=\mu_0H_{0i}H_{0j}-\frac{1}{2}\mu_0H_{0k}H_{0k}\delta_{ij}+\mu_1(H_{0i}h_j+h_iH_{0j})-\mu_0H_{0k}h_k\delta_{ij}. \tag{10.50}$$

В рассматриваемом варианте линеаризованных уравнений магнитоупругости граничные условия имеют вид

$$e_{ijk}\{n_j[h_k]-n_mu_{m,j}[H_{0k}]\}=0; \tag{10.51}$$

$$n_i[b_i]-n_mu_{m,i}[B_{0i}]=0,\qquad n_i[\sigma'_{ij}-\sigma^M_{ij}]=0, \tag{10.52}$$

где n_m — единичный вектор нормали к граничной поверхности. Здесь при проведении линеаризации предполагалось выполнение условия $|H_{0j}u_{i,j}|\ll|h_i|$ всюду внутри материала, однако скачок величины $|H_{0j}, u_{i,j}|$ на границе может быть того же порядка, что и скачок $|h_i|$.

10.3. Влияние магнитного поля на развитие трещин в электропроводных телах

Для изучения эффекта взаимодействия магнитного поля и проводящего тела с трещиной рассмотрим некоторые динамические задачи магнитоупругости в рамках простейшего варианта магнитоупругого взаимодействия, т. е. без учета намагниченности.

Дифракция плоской сдвиговой волны на прямолинейной трещине. Рассмотрим динамическую задачу антиплоской деформации неограниченной идеально проводящей среды с прямолинейной трещиной [5]. Пусть материал среды находится под действием однородного магнитного поля с вектором напряженности

$$\mathbf{H}_0=(H_0\cos\theta_0,\ H_0\sin\theta_0,\ 0) \tag{10.53}$$

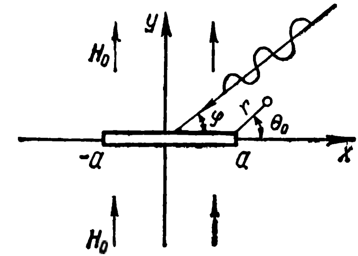


Рис. 10.1. Схема нагружения пластины с прямолинейной трещиной магнитоупругой волной сдвига.

и пусть плоская гармоническая магнитоупругая волна сдвига падает на трещину под углом φ (рис. 10.1). Для идеально проводящей среды система ос-

новных уравнений магнитоупругости записывается в виде

$$e_x = \mu_1 H_0 \sin\theta_0 \frac{\partial u_z}{\partial t}, \quad e_y = -\mu_1 H_0 \cos\theta_0 \frac{\partial u_z}{\partial t}, \tag{10.54}$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial h_z}{\partial t} = 0, \tag{10.55}$$

$$G\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) + \mu_1 H_0 \left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\sin\theta_0 + \frac{\partial h_z}{\partial x}\cos\theta_0\right) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \tag{10.56}$$

Граничные условия на берегах трещины такие:

$$e_x^{(e)} - e_x - (\mu_1 - \mu_3)\frac{\partial u_z}{\partial t} H_0 \sin\theta_0 = 0, \quad h_z^{(e)} - h_z = 0,$$

$$e_y + \mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial t} H_0 \cos\theta_0 = 0, \quad \varepsilon_0 e_y^{(e)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} H_0 \cos\theta_0 = 0,$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (y = 0, \ |x| < a), \tag{10.57}$$

где $e_x^{(e)}$, $h_z^{(e)}$ — составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей внутри трещины.

Для связанной гармонической волны, которая распространяется в направлении, указанном на рис. 10.1, решение уравнений (10.54)—(10.56) следующее:

$$u_z^{(i)} = W_0 e^{-i\omega t} \exp\left[-i\omega \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c_2\sqrt{1 + \varkappa h_c^2 \cos^2(\varphi - \theta_0)}}\right]; \tag{10.58}$$

$$h_z^{(i)} = -ip_h W_0 e^{-i\omega t} \frac{H_0 \cos(\varphi - \theta_0)}{c_2\sqrt{1 + \varkappa h_c^2 \cos^2(\varphi - \theta_0)}} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c_2\sqrt{1 + \varkappa h_c^2 \cos^2(\varphi - \theta_0)}}\right]; \tag{10.59}$$

$$e_x^{(i)} = -i\omega\mu_1 H_0 \sin\theta_0 u_z^{(i)}, \quad e_y^{(i)} = i\omega\mu_1 H_0 \cos\theta_0 u_z^{(i)}. \tag{10.60}$$

Здесь $\varkappa = \frac{\mu_1}{\mu_0}$; $h_c = \sqrt{\frac{\mu_0 H_0^2}{G}}$; $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$; W_0 — амплитуда падающей волны; ω — частота.

Так как поверхности трещины свободны от внешней нагрузки, то решение уравнений (10.54)—(10.56) для отраженной волны должно удовлетворять условиям

$$\sigma_{yz}^{(s)}\big|_{y=0} = -p_h e^{-i\omega t} e^{-i\omega \frac{x z_h}{c_2}} \quad (|x| < a), \tag{10.61}$$

$$u_z^{(s)}\big|_{y=0} = 0 \quad (|x| > a), \tag{10.62}$$

где $p_h = -\frac{iGW_0\omega\sin\varphi}{c_2\sqrt{1 + \varkappa h_c^2\cos^2(\varphi - \theta_0)}}$; $z_h = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + \varkappa h_c^2\cos^2(\varphi - \theta_0)}}$.

Применяя преобразование Фурье, можно представить решение уравнений (10.54)—(10.56) при $y > 0$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует симметричному относительно оси y решению, а другое — антисимметричному:

$$u_z^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_s(\upsilon) e^{\beta_h y} \cos \upsilon x d\upsilon - \frac{2}{\pi} i \int_0^\infty A_a(\upsilon) e^{\beta_h y} \sin \upsilon x d\upsilon \quad (y > 0) \tag{10.63}$$

где $A_s(\upsilon)$, $A_a(\upsilon)$ — функции, определяемые из условий (10.61), (10.62), а

$$\beta_h = -\sqrt{\frac{(1 + \varkappa h_c^2)\upsilon^2}{(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0)^2} - \frac{(\omega^2/c_2)^2}{1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0}}.$$

Полагая

$$A_s(\upsilon) = \frac{\pi}{2} \frac{(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0) P_h a}{G\sqrt{1 + \varkappa h_c^2}} \int_0^\infty \xi \Psi_s(\xi) J_0(\upsilon a \xi) d\xi,$$

$$A_a(\upsilon) = \frac{\pi}{2} \frac{(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0) P_h a}{G\sqrt{1 + \varkappa h_c^2}} \int_0^\infty \xi \Psi_a(\xi) J_1(\upsilon a \xi) d\xi, \tag{10.64}$$

получаем из граничных условий (10.61) и (10.62) два интегральных уравнения Фредгольма второго ряда для определения $\Psi_s(\xi)$ и $\Psi_a(\xi)$. После решения этих уравнений и вычисления значений $\Psi_s(1)$ и $\Psi_a(1)$ можно найти сингулярную часть касательных напряжений в окрестности кончика трещины. Если ввести полярные координаты r, θ с центром в вершине трещины $x = a$, $y = 0$, то при $r \to 0$

$$\sigma_{yz}^{(s)} \cong K_{III} \frac{1}{\sqrt{2r}} H_c(\varkappa, h_c, \theta_0, \theta), \tag{10.65}$$

$$K_{III} = \lim_{x \to a} \sqrt{2(x-a)}\, \sigma_{yz}^{(s)}|_{y=0} = \sqrt{a} p_h [\Psi_s(1) - i\Psi_a(1)]. \tag{10.66}$$

Здесь

$$H_c(\varkappa, h_c, \theta_0, \theta) =$$

$$= \left\{ \frac{(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0 [\sqrt{(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta)^4 \cos^2 \theta + (1 + \varkappa h_c^2)^2 \sin^2 \theta} + (1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0)^2 \cos \theta]}{2[(1 + \varkappa h_c^2 \sin^2 \theta_0)^2 \cos^2 \theta - (1 + \varkappa h_c^2) \sin^2 \theta]} \right\}^{1/2}.$$

Результаты расчета зависимости динамического коэффициента интенсивности напряжений от частоты представлены на рис. 10.2 для двух ориентаций вектора напряженности магнитного поля относительно плоскости трещины. Видно, что магнитное поле при $\theta_0 = 0$ (действует параллельно линии трещины) незначительно сдвигает максимум динамического коэффициента интенсивности напряжений в сторону больших частот, а при $\theta_0 = 90°$ практически не влияет на него

Дифракция продольной гармонической волны на дисковидной трещине при наличии осевого магнитного поля. В [6] представлено решение динамической задачи магнитоупругости и дифракции плоской гармонической волны

$\left[\frac{K_{IIIД}}{p_h\sqrt{a}}\right]$

1,0

0,5

0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 $\Omega = a\omega/c_2$

$\varphi = 90°$

60°

а

$\left[\frac{K_{IIIД}}{p_h\sqrt{a}}\right]$

1,0

0,5

0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 $\Omega = a\omega/c_2$

$\varphi = 90°$

60°

б

на дисковидной трещине, расположенной в неограниченной идеально проводящей изотропной среде. При этом предполагалось наличие постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\mathbf{H}_0$, направленным перпендикулярно плоскости трещины (рис. 10.3), и рассматривалось взаимодействие трещин с плоской упругой волной, распространяющейся вдоль оси z.

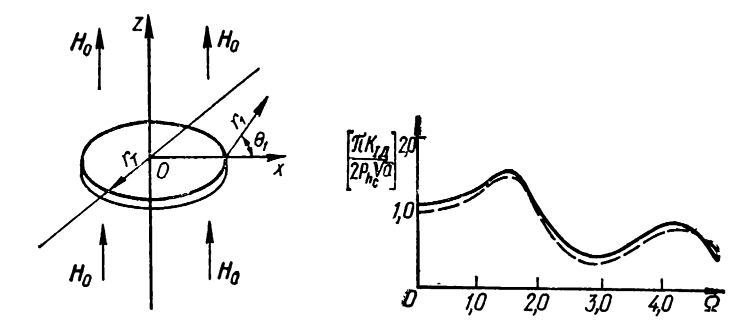


Рис. 10.3. Схема нагружения неограниченного тела с дисковидной трещиной магнитоупругой волной.

Рис. 10.4. Зависимость динамического коэффициента интенсивности напряжений $K_{\text{Iд}}$ от безразмерной частоты (сплошная линия $h_c = 0{,}5$, штриховая $h_c = 0$).

Для осесимметричного магнитоупругого состояния идеально проводящей среды основные уравнения магнитоупругости, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид

$$e_\theta - \mu_0 H_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial e_\theta}{\partial z} - \mu_0 \frac{\partial h_r}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta + \mu_0 \frac{\partial h_z}{\partial t} = 0; \tag{10.67}$$

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r\right] + \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1\right] \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} +$$
$$+ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\mu_0 H_0}{G}\left(\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \tag{10.68}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1\right]\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} +$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1\right]\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \tag{10.69}$$

Рис. 10.2. Зависимость динамического коэффициента интенсивности напряжений $K_{\text{IIIд}}$ от частоты ω для θ=0 (*а*) и θ=90° (*б*) (сплошная линия — $h_c = 1$, штриховая — $h_c = 0$).

Здесь $u_r = u_r(r, z, t)$, $u_z = u_z(r, z, t)$ — компоненты вектора смещений; e_θ — компонента вектора напряженности электрического поля; h_r, h_z — компоненты вектора напряженности магнитного поля; $c_1^2 = (\lambda + 2G)/\rho$, $c_2^2 = G/\rho$ — квадраты скорости продольных и поперечных упругих волн в среде.

Для решения уравнений (10.67)—(10.69) применяется [6] интегральное преобразование Ханкеля. При распространении плоской упругой волны с компонентами вектора смещения

$$u_z^{(i)} = W_0 e^{-i\omega t - iz/c_2}, \quad u_r^{(i)} = 0. \qquad (10.70)$$

В результате решения смешанной краевой задачи получаются выражения для электромагнитного поля в отраженной волне и компоненты механических напряжений. При этом обычным образом определяется динамический коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{I\text{д}} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2(r-a)}\, \sigma_{zz} \mid z = 0.$$

На рис. 10.4 показана зависимость модуля величины $\pi K_{I\text{д}}/2p_{h_c}\sqrt{a}$ от безразмерной частоты $\Omega = a\omega/c_2$, где $p_{h_c} = -\left[\frac{2iG\omega(1-\mu)}{1-2\mu/c_1}\right] W_0$ при $\mu = 0{,}25$.

Дифракция гармонической волны кручения на дисковидной трещине при наличии магнитного поля. Рассмотрим влияние стационарного магнитного поля на динамические напряжения, возникающие в окрестности края дисковидной трещины при падении на нее плоской гармонической волны кручения.

Пусть неограниченная идеально проводящая изотропная среда содержит дисковидную трещину и помещена во внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$ (см. рис. 10.3). Если упругие смещения и составляющие электромагнитного поля определяются векторами $\mathbf{u} = \{0, u_\theta(r, z, t), 0\}$, $\mathbf{e} = \{e_r(r, z, t), 0, 0\}$ и $\mathbf{h} = \{0, h_\theta(r, z, t), 0\}$, то соответствующая система уравнений магнитоупругости для идеального проводника будет иметь вид

$$e_r + \mu_0 H_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial e_r}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial h_\theta}{\partial t} = 0, \qquad (10.71)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{\mu_0 H_0}{G}\frac{\partial h_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \qquad (10.72)$$

Для падающей волны, распространяющейся в неограниченной среде вдоль оси z, решение системы уравнений (10.71) и (10.72) можно записать так:

$$u_\theta^{(i)} = \frac{U_0}{r_\text{т}} r e^{-i\omega t - i\omega \frac{z}{V_h c_2}}, \qquad (10.73)$$

$$h_\theta^{(i)} = -\frac{i\omega H_0}{V_h c_2 r_\text{т}} r e^{-i\omega t - i\omega \frac{z}{V_h a}}, \quad e_r^{(i)} = \frac{i\omega \mu_0 H_0}{r_\text{т}} U_0 r e^{-i\omega t - i\omega \frac{z}{V_h c_2}}, \qquad (10.74)$$

где $V_h = \sqrt{1 + h_c^2}$; U_0 — амплитуда падающей волны.

Поле отраженной волны определяется решением системы уравнений (10.71) и (10.72) для области $z > 0$ и с помощью преобразования Ханкеля может быть представлено в виде

$$u_\theta^{(s)} = \int_0^\infty \upsilon A(\upsilon)\, e^{-\gamma(\upsilon)z} J_1(\upsilon r)\, d\upsilon,$$

$$e_r^{(s)} = i\omega\mu_0 H_0 \int_0^\infty \upsilon A(\upsilon)\, e^{-\gamma(\upsilon)z} J_1(\upsilon r)\, d\upsilon, \qquad (10.75)$$

$$h_\theta^{(s)} = -H_0 \int_0^\infty \upsilon\gamma(\upsilon)\, A(\upsilon)\, e^{-\gamma(\upsilon)z} J_1(\upsilon r)\, d\upsilon,$$

где

$$\gamma(\upsilon) = \frac{1}{V_h}\sqrt{\upsilon^2 - (\omega/c_2)^2}, \quad \operatorname{Re}\gamma(\upsilon) > 0, \quad \operatorname{Im}\gamma(\upsilon) < 0.$$

Используя граничные условия

$$\sigma_{\theta z}^{(s)}\big|_{z=0} = -P_{h_0}\frac{r}{r_\text{т}} \qquad (r < r_\text{т}),$$

$$u_\theta^{(s)}\big|_{z=0} = 0 \qquad (r \geqslant r_\text{т}), \qquad (10.76)$$

где $P_{h_0} = -\dfrac{i\omega G}{V_h c_2} U_0$, можно получить парные интегральные уравнения для определения $A(\upsilon)$, которые затем сводятся к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Выделяя сингулярную часть в напряжениях, соответствующих отраженной волне, легко показать, что при $r \to 0$ для составляющих упругих и максвелловских напряжений справедливы следующие асимптотические формулы [8]:

$$\sigma_{r\theta} \cong -\frac{K_\text{III}}{V_h\sqrt{2r_1}} H_s\left(\frac{1}{V_h}, \theta_1\right), \quad \sigma_{\theta z} \cong \frac{K_\text{III}}{V_h^2\sqrt{2r_1}} H_c\left(\frac{1}{V_h}, \theta_1\right), \qquad (10.77)$$

$$\sigma_{r\theta}^\text{M} \cong 0, \quad \sigma_{\theta z}^\text{M} \cong \frac{h_c^2 K_\text{III}}{V_h^2\sqrt{2r_1}} H_c\left(\frac{1}{V_h}, \theta_1\right), \qquad (10.78)$$

где r_1, θ_1 — полярные координаты, связанные с краем дисковидной трещины (см. рис. 10.3); $K_\text{III} = \lim\limits_{r\to r_\text{т}} \sqrt{2(r - r_\text{т})}\,(\sigma_{\theta z} + \sigma_{\theta z}^{(m)})$ — коэффициент интенсивности напряжений;

$$H_c\left(\frac{1}{V_h}, \theta_1\right) = \left[\frac{\sqrt{\cos^2\theta_1 + (1/V_h)^2\sin^2\theta_1} + \cos\theta_1}{2(\cos^2\theta_1 + (1/V_n)^2\sin^2\theta_1)}\right]^{1/2} =$$

$$= H_s\left(\frac{1}{V_h}, \pi - \theta_1\right).$$

Мгновенное приложение крутящей нагрузки к берегам дисковидной трещины, расположенной в неограниченном изотропном пространстве с конечной электрической проводимостью. На основе линеаризованных уравнений (10.14)—(10.17) в работе [9] рассмотрена задача о мгновенном нагружении берегов дисковидной трещины касательной нагрузкой, изменяющейся линейно по радиусу. При этом предполагалось, что неограниченная изотропная среда с трещиной находится под действием постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$ и обладает конечной электрической проводимостью. Если векторы напряженности возмущенного электромагнитного поля имеют вид $\mathbf{e} = \{e_r(r, z, t), 0, e_z(z, r, t)\}$, $\mathbf{h} = \{0, h_\theta(r, z, t), 0\}$, а вектор смещения $\mathbf{u}$ определяется одной составляющей $z > 0$, система основных уравнений задачи в условиях квазистатического приближения для электромагнитного поля будет следующей [9]:

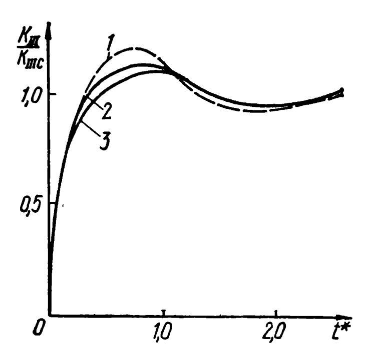


Рис. 10.5. Зависимость отношения K_{III}/K_{IIIC} от безразмерного времени t^*:
1—Γ_h=0; 2—Γ_h=1,0; 3—Γ_h=2,0.

$$\frac{\partial e_r}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial z} + \sigma_{\text{пр}}\left(e_r + \mu_1 H_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial t}\right) = 0, \tag{10.79}$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} h_\theta - \sigma_{\text{пр}} e_z = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \mu_1^2 H_0^2}{G}\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \frac{\dot{\sigma}_{\text{пр}}\mu_1 H_0}{G} e_r = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \tag{10.80}$$

Решение этой системы определяется в полупространстве при граничных условиях вида

$$e_r^{(e)} - e_r = h_\theta^{(e)} - h_\theta = 0 \qquad (z = 0,\ r < r_\text{т}), \tag{10.81}$$

$$e_r = 0 \qquad (z = 0,\ r \geqslant r_\text{т}),$$

$$\sigma_{\theta z} = -\tau_0 \frac{r}{r_\text{т}} H(t) \qquad (z = 0,\ r < r_\text{т}), \tag{10.82}$$

$$u_\theta = 0 \qquad (z = 0,\ r \geqslant r_\text{т}).$$

Здесь $\tau_0 = \text{const}$; $H(t)$ — единичная функция; u_θ, e_r, e_z, $h_\theta \to 0$ при $\sqrt{r^2 + z^2} \to \infty$. Указанная задача решается с помощью интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля и в конечном счете сводится к чис-

ленному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, а затем к численному обращению преобразования Лапласа. В результате получаются следующие асимптотические формулы для упругих и максвелловских напряжений:

$$\sigma_{r\theta} \cong -\frac{K_{III}(t^*)}{\sqrt{2r_1}} \sin\frac{\theta_1}{2}, \quad \sigma_{\theta r} \cong \frac{K_{III}(t^*)}{\sqrt{2r_1}} \cos\frac{\theta_1}{2}, \qquad (10.83)$$

$$\sigma^{М}_{r\theta} \cong 0, \quad \sigma^{М}_{\theta r} \cong 0, \qquad (10.84)$$

где $K_{III}(t^*) = \lim\limits_{r \to r_т} \sqrt{2(r - r_т)}\, \sigma_{\theta r}(r, 0, t^*)$ $(t^* = C_2 t / r_т)$ — динамический коэффициент интенсивности напряжений; $r_1 = \sqrt{(r - r_т)^2 - z^2}$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{r - r_т}\right)$ — полярные координаты, связанные с краем трещины. На рис. 10.5 представлена расчетная зависимость отношения K_{III}/K_{IIIC} от t^* при различных значениях параметра $\Gamma_h = h_c^2 r_т C_2 \sigma_{пр} \mu_1 = 0;\ 1,0;\ 2,0$. Таким образом, наличие магнитного поля в проводящей среде с трещиной приводит к незначительному уменьшению максимального значения динамического коэффициента интенсивности напряжений. В рассмотренном случае максвелловские напряжения не имеют особенности (несингулярны) у края трещины, но при идеальной проводимости она появляется. Кроме того, для идеально проводящей среды динамический коэффициент интенсивности напряжений отличается от соответствующего значения для чисто упругой среды только постоянным множителем $(1 + h_c^2)$.

10.4. Трещины в магнитно-мягких ферромагнетиках

На основе линейной теории магнитоупругости для магнитно-мягких ферромагнетиков, представленной в работе [10], рассмотрим постановку и решение некоторых задач механики разрушения ферромагнитных упругих тел, находящихся под действием однородного магнитного поля. В представленных ниже решениях для таких тел с трещинами исследуется эффект индуцированной намагниченности мягкого ферромагнитного упругого материала и используется квазистатическая модель магнитоупругости без учета токов проводимости.

Плоская статическая задача магнитоупругости для изотропного упругого тела из магнитно-мягкого ферромагнетика с прямолинейной трещиной. Для неограниченного изотропного ферроупругого тела, находящегося в условиях плоской деформации в однородном поле с вектором индукции $\mathbf{B}_0 = \{0, B_0, 0\}$, система линейных уравнений статической магнитоупругости (10.47) и (10.48) записывается в виде

$$\nabla^2 u_x + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{2\chi B_0}{(1+\chi) G} \frac{\partial h_x}{\partial y} = 0, \qquad (10.85)$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{2\chi B_0}{(1+\chi) G} \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0, \qquad (10.86)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0, \qquad (10.87)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\mathbf{h} = \{h_x, h_y, 0\}$ — вектор напряженности магнитного поля.

При заданном внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_0 = \{0, B_0, 0\}$ ($B_0 = \text{const}$) из уравнений магнитостатики (10.45) определяются значения векторов напряженности и намагниченности в жестком недеформированном состоянии ферромагнитного тела:

$$\mathbf{H}_0 = \left\{0, \frac{B_0}{\mu_1}, 0\right\}, \quad \mathbf{M}_0 = \left\{0, \frac{\chi B_0}{\mu_1}, 0\right\}. \tag{10.88}$$

Для нахождения составляющих h_x, h_y вектора напряженности удобно ввести магнитный потенциал Ф. Уравнения (10.87) удовлетворяются, если

$$h_x = \frac{\partial \Phi}{\partial_x}, \quad h_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{10.89}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{10.90}$$

Рассмотрим задачу о свободной трещине, расположенной на участке $|x| < a$, $y = 0$. В соответствии с условиями (10.51) решение системы уравнений (10.85), (10.86) и (10.90) в области $y > 0$ необходимо искать при [4, 10]

$$h_x(x, 0) = \frac{\chi B_0}{\mu_1} \frac{\partial u_y}{\partial x}\bigg|_{y=0} \quad (|x| < a), \tag{10.91}$$

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad (|x| > a),$$

$$\mu_0 h_y^{(e)}(x, 0) - \mu_1 h_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \tag{10.92}$$

$$\sigma'_{xy}(x, 0) = 0 \quad (|x| < \infty), \tag{10.93}$$

$$\begin{cases} \sigma'_{yy}(x, 0) = \frac{\mu_0 \chi^2}{\mu_1}\left[\frac{B_0^2}{2\mu_1} + B_0 h_y(x, 0)\right] & (|x| < a) \\ u_y(x, 0) = 0 & (|x| > a). \end{cases} \tag{10.94}$$

Здесь $h_y^{(e)}$ — составляющая напряженности возмущенного магнитного поля внутри трещины.

С помощью преобразования Фурье можно получить полное решение указанной задачи и найти распределение магнитоупругих напряжений в окрестности трещины. Согласно работе [10], формулы для магнитоупругих и максвелловских напряжений на продолжении трещины $x > a$ следующие:

$$\frac{\sigma'_{xx}}{G}\bigg|_{y=0} = \frac{\chi(\chi - 2) b_c^2 \left[2 + (1 - 2\mu)\left(\frac{\chi b_c^2}{1 + \chi}\right)^2\right]}{4(1 + \chi)^2 - 2\chi^2 b_c^2 [2\mu - 1 + 2(1 - \mu)\chi]} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right); \tag{10.95}$$

$$\frac{\sigma'_{yy}}{G}\bigg|_{y=0} = \frac{\sigma'_{xx}}{G}\bigg|_{y=0} + \frac{\chi b_c^2}{(1 + \chi)^2} \tag{10.96}$$

$\left(\text{здесь } b_c^2 = \frac{B_0^2}{G\mu_0}\right)$;

$$\left.\frac{\sigma_{xx}^{M}}{G}\right|_{y=0} = -\frac{(1-\mu)(\chi-2)\left(\dfrac{\chi b_c^2}{1+\chi}\right)^2}{4(1+\chi)^2 - 2\chi^2 b_c^2\,[2\mu - 1 + 2(1-\mu)\chi]} \times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b_c}{1+\chi}\right)^2; \qquad (10.97)$$

$$\left.\frac{\sigma_{yy}^{M}}{G}\right|_{y=0} = \frac{(1-\mu)(\chi-2)(1+2\chi)\left(\dfrac{\chi b_c^2}{1+\chi}\right)^2}{4(1+\chi)^2 - 2\chi^2 b_c^2\,[2\mu - 1 + 2(1-\mu)\chi]} \times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) + \frac{1+2\chi}{2}\left(\frac{b_c}{1+\chi}\right)^2. \qquad (10.98)$$

На основании формул (10.96) и (10.98) коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{\text{I}} = \lim_{x\to a}\sqrt{2(x-a)}\,(t_{yy} + t_{yy}^{M})\,|_{y=0} =$$

$$= -\frac{\chi(\chi-2)\,b_c^2\,\{(1+\chi)^2 + [2(1-\mu) + (5-6\mu)\chi]\,(\chi b_c^2)\}\,G\sqrt{a}}{2(1+\chi^2)\,\{2(1+\chi)^2 - (\chi b_c)^2\,[2\mu - 1 + 2(1-\mu)\chi]\}}. \qquad (10.99)$$

В формулах (10.95) — (10.98) знаменатель обращается в нуль, если

$$b_{c*}^2 = \frac{2(1+\chi)^2}{\chi^2\,[4\mu - 1 + 2(1-\mu)\chi]} \qquad (10.100)$$

Таким образом, при критическом значении внешнего магнитного поля $B_{0*} = b_{c*}\sqrt{G\mu_0}$ коэффициент интенсивности напряжений равен бесконечности и трещина будет неустойчивой.

Осесимметричная задача статической магнитоупругости для изотропного упругого тела с дисковидной трещиной. Рассмотрим взаимодействие однородного магнитного поля с дисковидной трещиной, расположенной в неограниченном ферромагнитном упругом теле. Если в цилиндрических координатах (r, θ, z) внешнее магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\mathbf{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$ ($B_0 = \text{const}$), то при осесимметричной деформации система уравнений (10.47) и (10.48) принимает вид [9]

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_r\right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} +$$

$$+\frac{2\chi B_0}{(1+\chi)G}\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0, \qquad (10.101)$$

$$\frac{1}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2\chi B_0}{(1+\chi)G}\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0, \qquad (10.102)$$

$$h_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad h_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{10.103}$$

Здесь u_r, u_z — компоненты вектора перемещения в цилиндрических координатах; Φ — магнитостатический потенциал; $\mathbf{h} = (h_r, 0, h_z)$ — вектор напряженности возмущенного магнитного поля; $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$. Ненулевые компоненты тензора магнитоупругих и максвелловских напряжений в системе цилиндрических координат определяются по формулам

$$\sigma'_{rr} = \frac{2G}{1-2\mu}\left\{(1-\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{2G}{1-2\mu}\left\{(1-\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r\right)\right\} + \tag{10.104}$$

$$+\frac{\chi B_0^2}{\mu_1^2} + \frac{2\chi B_0 h_z}{1+\chi},$$

$$\sigma'_{rz} = G\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\chi B_0}{1+\chi} h_a,$$

$$\sigma^{M}_{rr} = \sigma^{M}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\mu_0\frac{B_0}{\mu_1^2} - \frac{B_0}{1-\chi}h_z, \quad \sigma^{M}_{rz} = B_0 h_r,$$

$$\tag{10.105}$$

$$\sigma^{M}_{zz} = \frac{1}{2}\mu_0(1+2\chi)\frac{B_0^2}{\mu_1^2} + (1+2\chi)\frac{B_0}{1+\chi}h_z.$$

Граничные условия для свободной от внешней нагрузки дисковидной трещины радиусом $r_{т}$, расположенной в плоскости $z = 0$, при $z = 0$ будут иметь вид

$$\begin{cases} h_r = \dfrac{\chi B_0}{\mu_1}\dfrac{\partial u_z}{\partial r} & (r < r_{т}), \\ \Phi = 0 & (r > r_{т}), \end{cases} \tag{10.106}$$

$$h_z^{(e)} - (1+\chi)h_z = 0 \quad (r < r_{т}), \tag{10.107}$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\chi^2}{1+\chi}\left(\frac{B_0^2}{2\mu_1} + B_0 h_z\right) \quad (r < r_{т}); \ u_z = 0 \ (r > 0), \tag{10.108}$$

$$\sigma'_{rz} = 0 \quad (r < \infty). \tag{10.109}$$

Решение уравнений (10.101)—(10.103) в области $z > 0$ при смешанных условиях (10.106)—(10.109) получено в работе [9] с помощью преобразования Ханкеля. Окончательное выражение для коэффициента интенсивности на-

пряжений следующее:

$$K_1 = \lim_{r \to r_т} \sqrt{2(r - r_т)}\,(\sigma'_{zz} + \sigma^{M}_{zz}) =$$

$$= -\frac{\chi(\chi-2)\, b_c^2 \{2(1+\chi)^2 + [2(1-\mu) + (5-6\mu)\chi]\chi b_c^2\}\, G\sqrt{r_т}}{\pi(1+\chi)^2\{2(1+\chi)^2 + [1-2\mu-2(1-\mu)\chi](\chi b_c)^2\}}. \quad (10.110)$$

Здесь условие неустойчивости для дисковидной трещины полностью совпадает с аналогичным условием для прямолинейной трещины (формула (10.100)), а выражение для коэффициента интенсивности отличается от такового в плоской задаче только постоянным множителем.

Дифракция продольной гармонической волны на прямолинейной трещине в магнитно-мягком ферромагнетике. Рассмотрим плоскую динамическую задачу для неограниченной среды из ферромагнитного материала с прямолинейной трещиной, расположенной на участке $|x| < r_т$ оси x [12]. Пусть однородное магнитное поле напряженностью $\mathbf{B}_0 = \{0, B_0, 0\}$ направлено перпендикулярно поверхности трещины и решение уравнений магнитостатики для жесткого недеформированного состояния тела имеет вид

$$B_{0y} = B_0, \quad H_{0y} = \frac{B_0}{\mu_1}, \quad M_{0y} = \frac{\chi B_0}{\mu_1}. \quad (10.111)$$

В случае плоской деформации линеаризованные динамические уравнения магнитоупругости для возмущенного состояния получаются из выражений (10.85) и (10.86) добавлением инерционных членов

$$\nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{2\chi B_0}{G(1+\chi)}\frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (10.112)$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{2\chi B_0}{G(1+\chi)}\frac{\partial h_y}{\partial y} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \quad (10.113)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0. \quad (10.114)$$

Используя представление смещений u_x, u_y через волновые потенциалы φ, ψ

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.115)$$

и вводя магнитный потенциал Φ (см. формулу (10.89)), из уравнений (10.112)—(10.114) получаем

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2\chi B_0}{G(1+\chi)}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (10\ 116)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (10.117)$$

Рассмотрим задачу о дифракции на свободной трещине плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси y. Волновые по-

тенциалы φ и ψ для падающей волны определяются в виде

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 e^{-i\omega t - i\omega \frac{y}{c_1}}, \quad \psi^{(i)} = 0, \tag{10.118}$$

а решения уравнений (10.116) и (10.117) для отраженных волн находятся с помощью преобразования Фурье:

$$\varphi^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[A(\upsilon)\, e^{-\gamma_1(\upsilon) y} + \frac{2\chi B_0}{G(\omega/C_2)^2 (1+\chi)}\, \upsilon a(\upsilon)\, e^{-\upsilon y} \right] \cos \upsilon x d\upsilon, \tag{10.119}$$

$$\psi^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\upsilon)\, e^{-\gamma_2(\upsilon) y} \sin \upsilon x d\upsilon, \tag{10.120}$$

$$\Phi^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a(\upsilon)\, e^{-\upsilon y} \cos \upsilon x d\upsilon, \tag{10.121}$$

где $A(\upsilon)$, $B(\upsilon)$, $a(\upsilon)$ — функции, определяемые из граничных условий; $\gamma_1(\upsilon) = (\upsilon^2 - \omega^2/c_1^2)^{1/2}$; $\gamma_2(\upsilon) = (\upsilon - \omega^2/c_2^2)^{1/2}$; $\operatorname{Re}\gamma_{1,2}(\upsilon) > 0$; $\operatorname{Im}\gamma_{1,2}(\upsilon) < 0$.

На основании выражений (10.119)—(10.121) можно найти выражения для составляющих магнитного поля и смещений в отраженной волне при $y > 0$:

$$h_x^{(s)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \upsilon a(\upsilon)\, c^{-\upsilon y} \sin \upsilon x d\upsilon,$$

$$h_y^{(s)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \upsilon a(\upsilon)\, e^{-\upsilon y} \cos \upsilon x d\upsilon, \tag{10.122}$$

$$u_x^{(s)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Big\{ \upsilon A(\upsilon)\, e^{-\gamma_1(\upsilon) y} + \gamma_2(\upsilon) B(\upsilon)\, e^{-\gamma_2(\upsilon) y} + \frac{2\chi B_0}{(\omega^2/c_2^2)\, G (1+\chi)}\, \upsilon^2 a(\upsilon)\, e^{-\alpha y} \Big\} \sin \upsilon x d\upsilon, \tag{10.123}$$

$$u_y^{(s)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Big\{ \gamma_1(\upsilon)\, A(\upsilon)\, e^{-\gamma_1(\upsilon) y} + \upsilon B(\upsilon)\, e^{-\gamma_2(\upsilon) y} + \frac{2\chi B_0}{(\omega^2/c_2^2)\, G (1+\chi)}\, \upsilon^2 a(\upsilon)\, e^{-\upsilon y} \Big\} \cos \upsilon x d\upsilon. \tag{10.124}$$

Динамические магнитоупругие и максвелловские напряжения $\sigma_{ij}^{\prime(s)}$, $\sigma_{ij}^{M(s)}$

определяются на основании формул (10.49), (10.50)

$$\sigma_{xx}^{\prime(s)} = \sigma_{xx}^{(s)}, \quad \sigma_{yy}^{\prime(s)} = \sigma_{yy}^{(s)} + \frac{2\chi B_0}{1+\chi} h_y^{(s)},$$

$$\sigma_{xy}^{\prime(s)} = \sigma_{xy}^{(s)} + \frac{\chi B_0}{1+\chi} h_x^{(s)}; \qquad (10.125)$$

$$\sigma_{xx}^{M(s)} = -\frac{B_0}{1+\chi} h_y^{(s)},$$

$$\sigma_{yy}^{M(s)} = \frac{1+2\chi}{1+\chi} h_y^{(s)},$$

$$\sigma_{xy}^{M(s)} = B_0 h_x^{(s)}. \qquad (10.126)$$

Рис. 10.6. Зависимость динамического коэффициента интенсивности напряжений $K_{I\text{д}}$ от частоты (сплошная линия — $b_c = 0{,}005$, штрихпунктирная — $b_c = 0{,}003$, штриховая — $b_c = 0$).

Здесь

$$\sigma_{xx}^{(s)} = -\frac{2G}{\pi}\int_0^\infty \Big[(2\upsilon^2 + \omega^2/c_2^2 - 2\omega^2/c_1^2)\,A(\upsilon)e^{-\gamma_1(\upsilon)y} + 2\upsilon\gamma_2(\upsilon)\,B(\upsilon)\,e^{-\gamma_2(\upsilon)y} + \frac{1}{(\omega^2/c_2^2)}\,\frac{4\chi B_0}{G(1+\chi)}\,\upsilon^3 a(\upsilon)\,e^{-\upsilon y}\Big]\cos\upsilon x\,d\upsilon;$$

$$\sigma_{yy}^{(s)} = \frac{2G}{\pi}\int_0^\infty \Big[(2\upsilon^2 - \omega^2/c_2^2)\,A(\upsilon)\,e^{-\gamma_1(\upsilon)y} + 2\upsilon\gamma_2(\upsilon)\,B(\upsilon)\,e^{-\gamma_2(\upsilon)y} + \frac{1}{\omega^2/c_2^2}\,\frac{4\chi B_0}{G(1-\chi)}\,\upsilon^3 a(\upsilon)\,e^{-\upsilon y}\Big]\cos\upsilon x\,d\upsilon; \qquad (10.127)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{2G}{\pi}\int_0^\infty \Big[2\upsilon\gamma_1(\upsilon)\,A(\upsilon)\,e^{-\gamma_1(\upsilon)y} + (2\upsilon^2 - \omega^2/c_2^2)\,B(\upsilon)\,e^{-\gamma_2(\upsilon)y} + \frac{1}{\omega^2/c_2^2}\,\frac{4\chi B_0}{G(1-\chi)}\,\upsilon^3 a(\upsilon)\,e^{-\upsilon y}\Big]\sin\upsilon x\,d\upsilon \quad (y>0);$$

Удовлетворяя смешанным граничным условиям при $y = 0$

$$h_x^{(s)}(x, 0) = \frac{\chi B_0}{\mu_1}\,\frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial x}\Big|_{y=0} \quad (|x| < a); \qquad (10.128)$$

$$\Phi^{(s)}(x, 0) = 0 \quad (|x| \geqslant a),$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}(x, 0) = 0 \quad (|x| < \infty) \qquad (10.129)$$

$$\sigma_{yy}^{\prime(s)}(x, 0) = \frac{2\chi}{1+\chi} B_0 h_y^{(s)}(x, 0) + G(\omega^2/c_2^2)\varphi_0 \quad (|x| < a), \quad (10.130)$$

получаем одно алгебраическое соотношение, связывающее функции $A(\upsilon)$, $B(\upsilon)$, $a(\upsilon)$ и систему парных интегральных уравнений, решение которых выражается через одну вспомогательную функцию $F(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма второго рода. На основе решения этого уравнения можно определить динамический коэффициент интенсивности напряжений и выделить сингулярную часть для $\sigma_{xx}^{\prime(s)}$, $\sigma_{xy}^{\prime(s)}$, $\sigma_{yy}^{\prime(s)}$, $\sigma_{xx}^{M(s)}$, $\sigma_{xy}^{M(s)}$, $\sigma_{yy}^{M(s)}$ в окрестности вершины трещины.

При изучении влияния магнитного поля на динамический коэффициент интенсивности напряжений в работе [12] было получено численное решение интегрального уравнения Фредгольма и определена зависимость коэффициента интенсивности от безразмерного параметра $q = \omega a/c_2$. На рис. 10.6 представлена зависимость величины $|K_{\text{Iд}}/(\varphi_0 G\omega^2/c_2^2)|$ от q при различных значениях $b_c = B_0/(G\mu_0)^{1/2}$ и при $\mu = 0{,}3$, $\chi = 10^4$.

10.5. Электромагнитное и тепловое поля в электропроводных телах с трещинами при наличии электрического тока

При пропускании электрического тока через пластинку с трещиной происходит концентрация тока в вершине непроводящей трещины и быстрый разогрев материала пластинки в малой области вершины трещины, приводящий к сплавлению материала и образованию в кончике трещины микрократера. В результате увеличивается радиус кривизны вершины трещины, что приводит к уменьшению концентрации механических напряжений и дает возможность использовать данный эффект для подавления потенциальных источников образования магистральных трещин, а также для торможения распространяющихся трещин.

Теоретическое исследование эффекта концентрации электромагнитных и термоупругих полей в окрестности вершины трещины проводится по приближенной схеме решения задачи магнитотермоупругости, в которой не учитываются пондеромоторные силы, механоэлектрические эффекты и связанность полей деформации и температуры [9] Таким образом, в соответствии с этой схемой решение несвязанной задачи магнитотермоупругости сводится к определению электромагнитного поля из уравнений Максвелла и вызванного данным полем распределения джоулевых источников тепла. На основе этого распределения, решая уравнение теплопроводности, можно найти нестационарное температурное поле, а затем, с учетом определенного температурного поля, исследовать напряженно-деформированное состояние в рамках квазистатической постановки задачи термоупругости.

Электромагнитное и термоупругое поля в проводящей пластинке с разрезом конечной длины. Для изучения нестационарного процесса концентрации электромагнитного и теплового полей в окрестности вершины трещины рассмотрим неограниченную тонкую пластинку $-\infty < x, y < \infty$, $|z| < h$ ($2h$ — толщина пластинки) из проводящего материала, через которую пропускается постоянный ток с вектором плотности $\mathbf{J} = \{0, J_0, 0\} = \text{const}$ [9]. Электромагнитное поле в такой пластинке будет следующим: $\mathbf{H}_0 = \{J_0 z, 0, 0\}$, $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sigma_{\text{пр}}}\{0, J_0, 0\}$, где $\sigma_{\text{пр}}$ —проводимость материала.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в пластинке мгновенно образуется трещина конечной длины, расположенная на участке $y = 0$, $|x| <$

$< l$. Для определения возмущенного электромагнитного поля, обусловленного появлением трещины, используем уравнения Максвелла, пренебрегая при этом токами смещения, поляризацией и намагниченностью. Векторы напряженности электрического и магнитного полей для пластинки с трещиной представляются в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^*,$$

$$\mathbf{H}^* = \{0, 0, H_z^*(x, y, t)\}, \quad \mathbf{E}^* = \{E_x^*(x, y, t), E_y^*(x, y, t), 0\}. \quad (10.131)$$

С учетом выражений (10.131) уравнения Максвелла для проводящей среды будут следующими:

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial x} + \frac{\partial E_y^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y^*}{\partial x} - \frac{\partial E_x^*}{\partial y} = -\mu_1 \frac{\partial H_z^*}{\partial t}, \quad (10.132)$$

$$\frac{\partial H_z^*}{\partial y} = \sigma_{\text{пр}} E_x^* = J_x, \quad J_0 - \frac{\partial H_z^*}{\partial x} = \sigma_{\text{пр}} E_y^* = J_y \quad (10.133)$$

где μ_1 — магнитная проницаемость; $\mathbf{J} = \{J_y, J_y, 0\}$ — вектор плотности тока.

С учетом уравнений (10.133) первое из уравнений (10.132) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения (10.132) находим

$$\frac{\partial^2 H_z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z^*}{\partial y^2} = \sigma_{\text{пр}} \mu_1 \frac{\partial H_z^*}{\partial t}, \quad (10.134)$$

причем функция H_z^* должна удовлетворять нулевому начальному условию $H_z^*(x, y, 0) = 0$.

Если считать трещину непроводящей в направлении оси y, то при $y=0$ должны выполняться следующие условия:

$$-J_0 + \left. \frac{\partial H_z^*}{\partial x} \right|_{y=0} = 0 \quad (|x| < l), \quad (10.135)$$

$$\left. \frac{\partial H_z^*}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (|x| > l). \quad (10.136)$$

Равенство (10.136) вытекает из условия симметрии электромагнитного поля в окрестности трещины и соответствует нулевому значению компоненты j_x вектора плотности тока в области $y = 0$, $|x| > l$.

Таким образом, возмущенное электромагнитное поле определяется при помощи функции $H_z^*(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению (10.134), граничным условиям (10.135), (10.136) и нулевому начальному условию

Применяя к уравнению (10.134) и условиям (10.135), (10.136) преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}_z^*}{\partial y^2} - k^2 \tilde{H}_z^* = 0, \quad (10.137)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}_z^*}{\partial x} \right|_{y=0} = J_0/p \quad (|x| < l), \quad \left. \frac{\partial \tilde{H}_z^*}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (|x| > l). \quad (10.138)$$

Здесь $\tilde{H}_z^*(x,y,p)=\int\limits_0^\infty H_z^*(x,y,t)\,c^{-pt}dt$; $k^2=p\sigma_{\text{пр}}\mu_1$ (где p — параметр преобразования Лапласа). С учетом симметрии магнитного поля решение (10.137) представляется в виде

$$\tilde{H}_z^*(x,y,p)=\int\limits_0^\infty A(\upsilon)\,e^{-y\sqrt{\upsilon^2-k^2}}\sin\upsilon x d\upsilon \quad (y>0;\ x>0). \qquad (10.139)$$

На основании этого граничные условия (10.138) приводятся к парным интегральным уравнениям относительно функции $A(\upsilon)$:

$$\int\limits_0^\infty A(\upsilon)\sin\upsilon x d\upsilon=J_0x/p \quad (0\leqslant x<l), \qquad (10.140)$$

$$\int\limits_0^\infty \sqrt{\upsilon^2+k^2}\,A(\upsilon)\sin\upsilon x d\upsilon=0 \quad (l<x<\infty). \qquad (10.141)$$

Приближенное решение уравнений (10.140) и (10.141) при $kl\gg 1$ следующее [9]:

$$A(\upsilon)\cong\frac{2J_0}{\pi p}\left[\left(\frac{\cos\upsilon l}{\upsilon}+l\sin\upsilon l\right)\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\sqrt{k^2+\upsilon^2}-k}}{\upsilon\sqrt{k^2+\upsilon^2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sin\upsilon l}{\upsilon}-l\cos\upsilon l\right)\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\sqrt{k^2+\upsilon^2}+k}}{\upsilon\sqrt{k^2+\upsilon^2}}\right]. \qquad (10.142)$$

После подстановки решения (10.142) в выражение (10.139) и вычисления несобственных интегралов определяется выражение для $\tilde{H}_z^*(x,y,p)$, а затем (в результате обращения преобразования Лапласа) — для $H_z^*(x,y,t)$:

$$H_z^*(x,y,t)\cong\frac{J_0l}{\pi}\left\{x_1\frac{2^{1/4}}{\tau^{1/4}}\int\limits_{y_1}^\infty\frac{e^{-\eta^2/8\tau}}{\sqrt{\eta+y_1}}D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)d\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{2^{3/4}\tau^{1/4}}\int\limits_{y_1}^{\rho_2}e^{-\eta^2/8\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y_1}}-\frac{1}{\sqrt{\eta+y_1}}\right)\left[x_1D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}D_{-3/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)\right]d\eta\pm\frac{1}{2^{3/4}\tau^{1/4}}\int\limits_{y_1}^{\rho_1}e^{-\eta^2/8\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y_1}}\mp\frac{1}{\sqrt{\eta+y_1}}\right)\times$$

$$\times\left[x_1D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)-\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}D_{-3/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)\right]d\eta+$$

$$+\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}\left(\sqrt{\rho_2+y_1}-\sqrt{\rho^2-y_1}\right)e^{-\rho_2^2/8\tau}D_{-3/2}\left(\frac{\rho_2}{\sqrt{2\tau}}\right)-$$

$$-\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}\sqrt{\rho_1+y_1}\mp\sqrt{\rho_1-y_1}\,e^{-\rho_1^2/8\tau}D_{-3/2}\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{2\tau}}\right)\Bigg]. \qquad (10.143)$$

Здесь $x_1 = x/l$; $y_1 = y/l$; $\rho_1 = \sqrt{y_1^2+(x_1-1)^2}$; $\rho_2 = \sqrt{y_1^2+(x_1+1)^2}$; $\tau = t/l^2\sigma_{пр}\mu_1$; $D_{-\upsilon}(z)$ — функция параболического цилиндра, верхние знаки соответствуют области $x_1 < 1$, а нижние — области $x_1 > 1$. Компоненты вектора плотности тока теперь могут быть определены по формулам (10.133) и (10.143). Если ввести полярные координаты r, θ с центром в вершине трещины $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, то из этих формул можно найти асимптотические выражения для составляющих J_x, J_y при $r \to 0$:

$$J_x \cong -\frac{J_0}{\pi}\frac{2^{1/4}}{\tau^{1/4}}\frac{\sin\theta/2}{\sqrt{r}}\,e^{r^2/8\tau}D_{-1/2}\left(\frac{r}{\sqrt{2\tau}}\right),$$

$$J_y \cong \frac{J_0}{\pi}\frac{2^{1/4}}{\tau^{1/4}}\frac{\cos\theta/2}{\sqrt{r}}\,e^{-r^2/8\tau}D_{-1/2}\left(\frac{r}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi). \qquad (10.144)$$

Используя асимптотические формулы (10.144), определяем интенсивность тепловых источников в окрестности вершины трещины при $\rho_1 \to 0$

$$Q = \frac{1}{\sigma_{пр}}(J_x^2+J_y^2) \cong \frac{J_0^2\sqrt{2}}{\pi^2\sigma_{пр}}\frac{e^{-\rho_1^2/4\tau}}{\rho_1\sqrt{\tau}}D^2_{-1/2}\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{2\tau}}\right) \qquad (10.145)$$

и находим температурное поле, обусловленное действием джоулевых тепловых источников (10.145). При определении температуры будем предполагать, что через поверхности $z = \pm h$ тонкой пластинки происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона. Для симметричного относительно плоскости $z = 0$ распределения температуры уравнение теплопроводности имеет вид [9]

$$\nabla_1^2 T^* - \beta_0 T^* - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T^*}{\partial\tau} = -\frac{l^2\theta}{\lambda_т}, \qquad (10.146)$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}; \qquad T_2^*(x, y, t) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} T(x, y, z, t)\,dz;$$

$$a^2 = \varkappa^2\sigma_{пр}\mu_1; \qquad \varkappa^2 = \lambda_т/\rho c; \qquad \beta_0 = \beta l^2/\lambda_т h; \qquad x_1' = x_1 - 1;$$

β — коэффициент теплоотдачи с поверхности $z = \pm h$; c — теплоемкость

До появления трещины в пластинке, через которую пропускается ток, установится постоянная температура $T_0^* = J_0^2 h/\beta\sigma_{пр}$, следовательно, решение уравнения (10.146) должно уравлетворять условию

$$T^*(x, y, 0) = T_0^*, \qquad (10.147)$$

с учетом последнего оно представляется в виде

$$T^*(x, y, \tau) = T_0^* e^{-\beta_0 a^2\tau} + T_1^*(x, y, \tau), \qquad (10.148)$$

где функция $T_1^*(x, y, \tau)$ — решение (10.146) при нулевом начальном ус-

ловии. Температура $T_1^*(x, y, \tau)$, обусловленная концентрацией тока в окрестности вершины непроводящего разреза, определяется с помощью функции источника

$$T_1^*(x, y, \tau) = \frac{l^2}{4\pi\lambda_0} \int_0^{\tau} \frac{e^{-\beta_0 a^2(\tau-\tau_1)}}{\tau-\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, \eta, \tau_1) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x_1' - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right] d\xi d\eta d\tau_1. \qquad (10.149)$$

Подставляя выражение (10.145) в (10.149) и выполняя ряд преобразований внутреннего интеграла, получаем

$$T_1^*(x, y, \tau) = \frac{J_0^2 l^2 a}{\pi^2 \sigma \lambda_0 \sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{\exp\left[-\beta_0 a^2(\tau-\tau_1) - \rho_1^2 4^{-1} a^{-2}(\tau-\tau_1)^{-1}\right]}{\sqrt{\tau-\tau_1}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[\rho_1^2 \tau_1 8^{-1} a^{-2}(\tau-\tau_1)^{-1} \omega^{-1}(\tau, \tau_1, \xi)\right]}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi}\sqrt{\omega(\tau, \tau_1, \xi)}} \times$$

$$\times I_0\left[\rho_1^2 \tau_1 8^{-1} a^{-2}(\tau-\tau_1)^{-1} \omega^{-1}(\tau, \tau_1, \xi)\right] d\xi d\tau_1. \qquad (10.150)$$

Здесь $\omega(\tau, \tau_1, \xi) = \tau_1 + a^2(\tau-\tau_1)(1 + \operatorname{ch}\xi)$; $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. В частности, при $\rho_1 = 0$ из формул (10.148) и (10.150) получим выражение для температуры в кончике трещины

$$T^*(0, 0, \tau) = T_0^*\left[e^{-\beta_0 a^2 \tau} + \right.$$

$$\left. + \beta_0 a \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^1 e^{-\beta_0 a^2 \tau v} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi}\sqrt{1 - v^2 + a^2 v^2(1 + \operatorname{ch}\xi)}} dv\right]. \qquad (10.151)$$

Температура в вершине трещины в момент ее образования может значительно превосходить начальную T_0^* и достигать температуры плавления материала. В случае непроводящей трещины компоненты термоупругих напряжений в окрестности точки $\rho_1 = 0$ определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = -\frac{2G}{l^2}\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2G}{l^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho_1^2}, \qquad (10.152)$$

где $\Phi(\rho_1, \tau)$ — термоупругий потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1}\right) = ml^2 T^*(\rho_1, \tau), \qquad (10.153)$$

где $m = (1 + \mu)\alpha$.

Интегрируя это выражение и подставляя $\Phi(\rho_1, \tau)$ в формулы (10.152), получаем равенства

$$\sigma_{rr} = -2G(1 + \mu)\alpha \frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{1}{\rho_1}\int_0^{\rho_1} \xi T^{(0)}(\xi, \tau_1) d\xi, \qquad (10.154)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2G(1+\mu)\alpha\left[T^*(\rho_1, \tau) - \frac{1}{\rho_1^2}\int_0^{\rho_1} \xi T^*(\xi, \tau_1)\, d\xi\right],$$

которые показывают, что в окрестности вершины мгновенно возникшей трещины существуют сжимающие напряжения, препятствующие ее дальнейшему развитию.

Таким образом, при мгновенном появлении трещины в образце, по которому пропускается электрический ток, возможно ее торможение, вызванное интенсивным разогревом материала в вершине трещины до температуры плавления и наличием сжимающих температурных напряжений в этой зоне.

Магнитотермоупругое поле в пластинке с полубесконечным разрезом. Определим электромагнитное поле в неограниченной пластинке ($-\infty < x$, $y < \infty$, $|z| < h$) из электропроводного материала, через которую пропускается постоянный ток с вектором плотности $\mathbf{J}_0 = \{0, J_0, 0\}$ ($J_0 = \text{const}$) и в которой мгновенно (при $t = 0$) возникает полубесконечный разрез вдоль отрицательной полуоси y [10, 12]. Считая разрез ($y = 0$, $x < 0$) непроводящим и учитывая симметрию магнитного поля $H_z(x, y, t)$ относительно оси y, находим решение уравнения (10.134) при условиях

$$\left.\frac{\partial H_z^*}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad (x > 0); \qquad \left.\frac{\partial H_z^*}{\partial x}\right|_{y=0} = J_0 \quad (x < 0); \tag{10.155}$$

$$H_z^*(x, y, 0) = 0. \tag{10.156}$$

В результате применения преобразования Лапласа решение (10.137) представляется в виде

$$\widetilde{H}_z^*(x, y, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} A(\upsilon)\, e^{-i\upsilon x - y\sqrt{\upsilon^2 + k_2}}\, d\upsilon, \tag{10.157}$$

где интегрирование производится по прямой $\operatorname{Im}\upsilon = -a$ комплексной плоскости $\upsilon = \xi + i\eta$ с разрезами $k < \eta < \infty$, $-\infty < \eta < -k$ вдоль мнимой оси.

Граничные условия (10.138) приводят к парным интегральным уравнениям, решение которых будет [11]

$$A(\upsilon) = \frac{J_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2p\sqrt{2\pi k}}\,\frac{\upsilon + 2ik}{\upsilon^2\sqrt{\upsilon + ik}}. \tag{10.158}$$

Интеграл, который получается при подстановке решения (10.158) в (10.157) можно вычислить стандартным методом, замыкая путь интегрирования дугой окружности, расположенной в верхней ($x < 0$) и нижней ($x > 0$) полуплоскостях. В результате [10]

$$\widetilde{H}_z^*(x, y, p)\big|_{x<0} = \frac{J_0}{p}\, x e^{-ky} - \frac{J_0}{p\sqrt{2\pi k}}\left[(\sqrt{x^2+y^2} - |x|)^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{-k\sqrt{x^2+y^2}} - k|x|\int_{|x|}^{\infty} F(-\xi, y)\, d\xi\right], \tag{10.159}$$

$$\tilde{H}_z^*(x, y, p)|_{x>0} = -\frac{J_0}{p\sqrt{2\pi k}}\Big[(\sqrt{x^2+y^2}+x)^{1/2}e^{-k\sqrt{x^2+y^2}} -$$

$$-kx\int_x^\infty F(\xi, y)\,d\xi\Big],$$

$$F(x, y) = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}+x)^{1/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,e^{-k\sqrt{x^2+y^2}}$$

Выполняя переход к оригиналу в формулах (10.159), получаем следующие выражения для компоненты H_z вектора магнитного поля:

$$\left.\frac{H_z(x, y, t)\sqrt{\sigma_{\text{пр}}\mu_1}}{J_0\sqrt{2t}}\right|_{x<0} = -q\cos\theta\,\mathrm{erfc}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) - G^-(q, \theta),$$

$$\left.\frac{H_z(x, y, t)\sqrt{\sigma_{\text{пр}}\mu_1}}{J_0\sqrt{2t}}\right|_{x>0} = -G^+(q, 0)\quad\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right), \tag{10.160}$$

где

$$\pi G^{\pm}(q, \theta) = \sqrt{2q}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-q^2/4}D_{-3/2}(q) \mp \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,q^2\cos\theta\int_1^\infty e^{-q^2\xi^2/2}\times$$

$$\times\left(\arcsin\sqrt{\frac{\xi-1}{\xi-\sin\theta}} \pm \arcsin\sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+\sin\theta}}\right)d\xi;$$

$$q = \sqrt{(x^2+y^2)\,\sigma_{\text{пр}}\mu_1/2t}\,;\qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Составляющие вектора плотности электрического тока теперь легко определяются по формулам (10.133) и (10.160). В частности, асимптотические выражения для компонентов J_x, J_y в окрестности $x = 0$, $y=0$ полубесконечного разреза имеют вид

$$J_x \cong -\frac{J_0}{\pi}\frac{\sin\theta/2}{\sqrt{r}}\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}D_{-3/2}\left(\frac{r}{\sqrt{2\tau}}\right)e^{-r^2/8\tau},$$

$$J_y \cong \frac{J_0}{\pi}\frac{\cos\theta/2}{\sqrt{r}}\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}D_{-3/2}\left(\frac{r}{\sqrt{2\tau}}\right)e^{-r^2/8\tau}\ (r = \sqrt{x^2+y^2}\to 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{10.161}$$

и соответствуют автомодельному решению задачи.

Переходя к определению температурного поля, обусловленного действием джоулевых источников, будем по-прежнему предполагать, что на поверхностях $z = \pm h$ пластинки происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Тогда решение уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 T^*(x, y, t) - \frac{\beta}{\lambda_{\text{т}}h}T^* - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial T^*}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda_{\text{т}}} \tag{10.162}$$

(здесь $T^*(x, y, t)$ — среднее по толщине пластинки значение температу-

ры; $Q = \frac{1}{\sigma_{\text{пр}}}(J_x^2 + J_y^2)$) при начальном условии

$$T^*(x, y, 0) = T_0^* \tag{10.163}$$

можно записать в виде [10, 12] ($\beta_0 = \beta/\lambda_{\text{т}}h$)

$$T^*(q, \theta, t) = T_0^* e^{-\beta_0 \varkappa^2 t} + \frac{T_0^* t\beta}{2\pi\sigma_{\text{пр}}\mu_1} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \left[\frac{J_x^2(q', \theta')}{J_0^2} + \frac{J_y^2(q', \theta')}{J_0^2}\right] \times$$

$$\times [P(q, \theta, t, q', \theta') + P(q, \theta, t, q', -\theta')]\, q' dq' d\theta', \tag{10.164}$$

$$P(q, \theta, t, q', \theta') = \int\limits_1^\infty \exp\left[-\beta_0 \varkappa^2 t (1 - \upsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{q^2 - 2qq'\sqrt{\upsilon}\cos(\theta - \theta') + \upsilon q'^2}{2a^2(1 - \upsilon)}\right] \frac{\upsilon d\upsilon}{1 - \upsilon}.$$

Последняя формула с учетом выражений для составляющих вектора плотности тока позволяет определить температуру любой точки плоскости с полубесконечным непроводящим разрезом.

Анализ напряженного состояния в окрестности вершины разреза показывает, что термоупругие напряжения в этой области будут сжимающими и при отсутствии внешней механической нагрузки трещина, возникающая в начальный момент времени, развиваться не будет. При появлении трещины в пластинке, нагруженной внешними механическими усилиями, наличие локальных сжимающих напряжений приведет к уменьшению коэффициента интенсивности напряжений и последующему торможению трещины за счет роста этих напряжений и увеличения температуры в окрестности ее вершины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К гл. 1

1. *Lang A. R.* Direct observation of individual dislocations by X-ray diffraction // J. Appl. Phys.— 1958.— **29**, N 3.— P. 597—598.
2. *Финкель В. М.* Физика хрупкого разрушения.— М. : Металлургия, 1970.— 376 с.
3. *Гарбер Ф. И., Поляков Л. М.* Исследование ультрамикроскопических неоднородностей пластически деформированной каменной соли // Физика твердого тела.— 1960.— **2**, № 5.— С. 974—981.
4. *Bendler H. A., Wood W. A.* Electron metallographic observation on the formation of fatigue cracks // Acta met.— 1960-— **8**, N 6.— P. 402—403.
5. *Бобриков В. П.* Влияние смачивания поверхности ионных кристаллов на выбор одной из равноправных систем додекаэдрического скольжения при линейной деформации образцов // Журн. теорет. физики.— 1957.— **27**, № 4.— С. 830—832.
6. *Kameda Sun.* Effect of solute segregation on fracture toughness in a Ni—Gr steel // Met. Trans.— 1981.— **A12**, N 12.— P. 2039—2048.
7. *Gell M., Robertson W. D.* Anisotropic growth of cleavage cracks in iron — 3 % silicon single crystals // Acta met.— 1964.— **12**, N 1.— P. 108—111.
8. *Tatelman A.* The ductile — brittle transition in iron — 3 % silicon // Acta met.— 1964.— **12**, N 3.— P. 324—326.
9. *Екобори Т.* Физические основы прочности и разрушения материалов.— Киев : Наук. думка, 1978.— 352 с.
10. *Владимиров В. И., Карпинский Д. Н., Орлов А. Н.* Теория роста трещин в материале с крупными неоднородностями // Физика металлов и металловедение.— 1975.— **39**, № 5.— С. 952—959.
11. *Владимиров В. И., Карпинский Д. Н.* Теория вязкого роста трещин в массивном образце, содержащем крупные неоднородности // Физика металлов и металловедение.— 1975.— **40**, № 4.— С. 704—713.
12. *Бичем К. Д., Пеллу Р. М. Н.* Электронная фрактография — средство изучения микромеханизма разрушения // Прикладные вопросы вязкости разрушения. — М. : Мир, 1968.— С. 311—346.
13. *Браун М. П., Веселянский Ю. С., Костырко О. С. и др.* Фрактография прокаливаемость и свойства сплавов.— Киев : Наук. думка, 1966.— 312 с.
14. *Гуляев А. П., Зеленова В. Д., Шермазон И. В.* Определение порога хладноломкости стали микрофрактографическим методом // Завод. лаб.— 1966.— **32**, № 7.— С. 870—872.
15. *Романів О. М., Зима Ю. В., Карпенко Г. В.* Електронна фрактографія зміцнених сталей.— К. : Наук. думка, 1974.— 207 с.
16. *Бичем К. Д.* Микропроцессы разрушения // Разрушение.—М. : Мир, 1973.— Т.1. — С. 265—375.
17. *Broek D.* Correlation between stretched zone size and fracture toughness // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 1.— P. 173—181.
18. *Романив О. Н., Гладкий Я. Н., Зима Ю. В.* Влияние структурных факторов на кинетику трещин усталости в конструкционных сталях // Физ.-хим. механика материалов.— 1978.— № 2. – С. 3—15.

К гл. 2

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— М. : Наука, 1984.— 2 т.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М. : Наука, 1970.— 940 с.

4. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред.— М. : Мир, 1974.— 320 с.
5. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости.— Киев : Наук. думка. 1981.— 584 с.
6. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести.— М. : Высш. школа, 1968.— 511 с.
7. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. — Киев : Наук. думка, 1969.— 209 с.
8. *Ильюшин А. А.* Пластичность.— М. : Изд-во АН СССР, 1963.— 272 с.
9. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела.— М. : Наука, 1979.— 744 с.
10. *Экспериментальные* методы исследования деформаций и напряжений / Б. С. Касаткин, А. Б. Кудрин, Л. М. Лобанов и др.— Киев : Наук думка, 1981.— 584 с.

К гл. 3

1. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин.— Киев : Наук. думка, 1982.— 345 с.
2. *Каминский А. А.* Механика разрушения вязко-упругих тел.— Киев : Наук. думка, 1980.— 160 с.
3. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
4. *Панасюк В. В.* О важнейших задачах исследований по физико-химической механике конструкционных материалов // Физ.-хим механика материалов.— 1974.— № 4.— С. 3—13.
5. *Панасюк В. В.* О современных проблемах механики разрушения // Там же. — 1982.— № 2.— С. 7—27.
6. *Панасюк В. В.* Деформационные критерии в механике разрушения // Там же. — 1986. — № 1.— С. 7—17.
7. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1985.— 502 с.
8. *Черепанов Г. П* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
9. *Ярема С. Я., Иваницкая Г. С.* Предельное равновесие и развитие косых трещин : (Обзор критериев) // Физ.-хим. механика материалов.— 1986.— № 1.— С. 45—57.
10. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ризничук Р. В.* Деформационный критерий локального разрушения упругопластических тел с щелевыми дефектами // Докл. АН СССР.— 1987.— **293**, № 4.— С. 848—852.
11. *Романив О. Н.* Вязкость разрушения конструкционных сталей.— М. : Металлургия, 1979.— 176 с.
12. *Романів О. М., Зима Ю. В , Карпенко Г. В.* Електронна фрактографія зміцнених сталей.— К. : Наук. думка, 1974.— 207 с.
13. *Красовский А. Я.* Хрупкость металлов при низких температурах.—Киев : Наук. думка, 1980.— 338 с.
14. *Бичем К. Д.* Микропроцессы разрушения // Разрушение.— М. : Мир, 1973.— Т. 1.— С. 265—375.
15. *Wolf V. E.* Microfractographic features of stretched zone in an aluminum alloy fracture toughness specimen // ASTM STP 493.— Philadephia : ASTM.— 1971.— P. 20—35.
16. *Broek D* Correlation betwen stretched zone size and fracture toughness // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 1.— P. 173—181.
17. *Зима М. Н., Зима Ю. В., Ковчик С. Е.* Связь микрофрактографических особенностей разрушения с некоторыми характеристиками трещиностойкости углеродистых сталей // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— № 6.— С. 92—96.

К гл. 4

1. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1977.— 277 с.
2. *Каминский А. А.* Механика разрушения вязкоупругих тел.— Киев : Наук. думка, 1980.— 160 с.
3. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения.— М. : Машиностроение, 1985.— 264 с.
4. *International* Journal of Fracture, 1985, **27**, N 3/4.
5. *Engineering Fracture Mechanics*, 1986, **23**, N 1.
6. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1985.— 504 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
8. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. — Киев : Наук. думка, 1982.— 346 с.
9. *Иванова В. С., Терентьев В. Ф.* Природа усталости металлов.— М. : Металлургия, 1975.— 455 с.
10. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела.— М. : Наука, 1979.— 743 с.
11. *Ярема С. Я.* Некоторые вопросы методики испытаний материалов на циклическую трещиностойкость // Физ.-хим. механика материалов.— 1978.— № 4.— С. 68—77.
12. *Панасюк В. В., Романив О. Н.* Механика коррозионно-усталостного разрушения // Коррозионная усталостность материалов.— Киев : Наук. думка, 1982.— С. 39—66.
13. *РД 50—345—82.* Методические указания. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при циклическом нагружении.— М. : Изд-во стандартов, 1983.— 96 с.
14. *Ярема С. Я., Мельничок Л. С.* Исследование математических моделей роста усталостных трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— № 4.— С. 55—61.
15. *Панасюк В. В., Ратыч Л. В., Дмытрах И. Н.* О некоторых задачах исследования циклической трещиностойкости материалов в жидких средах // Там же.— № 6.— С. 42—49.
16. *Трощенко В. Т.* Усталость и неупругость металлов.— Киев : Наук. думка, 1971.— 267 с.
17. *Бартенев Г. М., Зеленов Ю. В.* Физика и механика полимеров.— М. : Высш. школа, 1983.— 391 с.

К гл. 5

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
3. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин.— Киев : Наук. думка, 1982.— 348 с.
4. *Панасюк В. В.* Деформационные критерии в механике разрушения. // Физ.-хим. механика материалов.— 1986.— № 1.— С. 7—17.
5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М. : Наука, 1977.— 311 с.
6. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике.— М. : Мир, 1975.— 541 с.
7. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов.— М. : Мир, 1979.— 392 с.

8. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения.— М. : Наука, 1980.— 354 с.
9. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем.— Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1978.— 376 с.
10. *Панасюк В. В., Панько И. Н., Васькив И. П.* Применение метода граничной интерполяции для приближенного решения упругопластических задач теории трещин. // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— № 2.— С. 61—65.
11. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
12. *Пальцун Н. В.* Напряжения в упругом слое, ослабленном двумя круглыми щелями. // Гидромеханика и теория упругости.— 1968.— № 7.— С. 72—78.
13. *Isida M.* Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under va icus boundary conditicns // Int. J. Fract. Mech.— 1971.— 7, N 3. —P. 301—316.
14 *Hayes D. J., Williams I. G.* A practical method for determining Dugdale model solution for cracked bodies of arbitrary shape // Ibid.— 1972. — 8, N 3.— P. 239—256.
15. *Howard I. C., Ohez N. R.* On the elastic-plastic defoimation of a sheet containiung an edge crack // J. Mech. and Phys. Solids.— 1975.— **23**, N 2.— P. 139—149.
16. *Витвицкий П. М.* Упругопластическая деформация и разрушение сосредоточенными силами пластинки с внешними щелями. // Физ.-хим. механика материалов.— 1973.— № 3.— С. 75—80.

К гл. 6

1. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 930 с.
2. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 279 с.
3. *Черепанов Г. П.* Дифракция упругих волн на разрезе // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М. : Наука, 1972.— С. 615—622.
4. *Maue A. W.* Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene // Z. angew. Math. und Mech.— 1953.— **33**, N 1—2.— P. 1—10.
5. *Зоммерфельд А.* Оптика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— 487 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости.— М. : Мир, 1975.— 872 с.
7. *Thau S. A., Lu T. H.* Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid by a dilatational wave // Int. J. Solids and Struct.— 1971.— 7, N 7.— P. 731—750.
8. *Sih G. C., Emley G. T., Ravera R. S.* Impact responce of a finite crack in plane extension // Int. J. Solids and Struct.— 1972. — **8**, N 7.— P. 977—993.
9. *Copson E. T.* On certain dual equations // Proc. Glasgow Math. Assos.— 1961.— **5**, N 1.— P. 19—24.
10. *Sih G. C., Loeber J. F.* Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity loaded crack // Quart. Appl. Math.—1969.— **27**, N 2.— P. 193—213.
11. *Miller M. K., Guy W. T.* Numerical inversion of the Laplase transform by use Jacobi polinomials // SIAM J. Num. Anal.— 1966.— **3**.— P 624—635.
12. *Shindo Y.* Sudden twisting of a flat annular crack // Int. J. Solids and Struct.— 1981.— **17**, N 11.— P. 1103—1112.
13. *Bellman R., Kalaba R., Lockett J.* Numerical inversion of the Laplase transform.— Amsterdam : Elsevier, 1966.— 279 p.

14. *Sommer E., Soltesz M.* Crack-opening-displacement measurements of a dynamically loaded crack // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **2**, N 3.— P. 235—241.
15. *Chen E. P.* Elastodynamic responce of a penny-shaped crack in a cylinder of a finite radius // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**.— P. 379—385.
16. *Clos R.* Transient elastodynamic responce of an edge crack // Dyn. Mech. Proper and Fract. Dyn. Eng. Mater Int. Conf. Czechosl., Valtice, June, 1983.— Brno, 1983.— P. 39—45.
17. *Elastodynamic* crack problems / Eds G. C. Sih.— Leyden : Noordhoff, 1977.— 423 p.
18. *Jain D. L., Kanwal R. P.* Diffraction of elastic waves by two complanar Criffith cracks in an infinite elastic medium // Int. J. Solids and Struct.— 1972.— 8, N 8.— P. 961—975.
19. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.— Киев : Наук. думка, 1984.— 344 с.
20. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* Numerical solution of singular integral equations // Methods of analysies and solution of crack problems. — Leyden : Noordhoft, 1973.— P. 368—425.
21. *Lowengrub M., Srivastava K. N.* Research note on two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium // Int. J. Eng. Sci.— 1968.— **6**.— P. 359—362.
22. *Mal A. K.* Interaction of elastic waves with a Griffith crack // Int. J. Eng. Sci.— 1970.— 8.— P. 763—776.
23. *Erdogan F.* Simultaneous dual integral equations with trigonometric and Bessel kernels // Z. angew. Math. und Mech.— 1968.— 48, N 4.— P. 217.
24. *Shindo Y.* Axisymmetric elastodynamic responce of a flat annular crack to normal impact waves // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 5.— P. 837—848.
25. *Ito S.* Three-dimensional wave propagation in a cracked elastic solid // Trans. ASME: J. Appl. Mech.— 1978.— **45**, N 4.— P. 807—811.
26. *Левин Л.* Современная теория волноводов.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 215 с.
27. *Hussain M. A., Pu S. L.* Dynamic stress intensity factor for an unbounded plate having collinear crack // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 4.— P. 875—876.
28. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения.— М. : Машиностроение, 1985.— 264 с.

К гл. 7

1. *Ребиндер П. А.* Поверхностные явления в дисперсных системах. Физ.-хим. механика.— М. : Наука, 1979.— 381 с.
2. *Карпенко Г. В.* Физико-химическая механика конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1985.— Т. 1.— 228 с.
3. *Лихтман В. И., Ребиндер П. А., Карпенко Г. В.* Влияние поверхностно-активной среды на процессы деформации металлов.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— 208 с.
4. *Лихтман В. И., Щукин Е. Д., Ребиндер П. А.* Физико-химическая механика материалов.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 304 с.
5. *Панасюк В. В.* О важнейших задачах исследований по физико-химической механике конструкционных материалов // Физ.-хим. механика материалов.— 1974.— № 4.— С. 3—13.
6. *Колачев В. А.* Водородная хрупкость металлов.— М. : Металлургия, 1985.— 217 с.
7. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В., Харин В. С.* Теоретические аспекты кинетики водородного охрупчивания металлов // Физ.-хим. механика материалов.— 1978.— № 3.— С. 3—23.

8. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Харин В. С.* Теоретический анализ роста трещин в металлах при воздействии водорода // Там же — 1981.— № 4.— С. 61—75.
9. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Харин В. С.* Теория распространения трещин в деформированных металлах, подвергнутых воздействию водорода // Там же .— 1987.— № 2.— С. 5—14.
10. *Коррозионная* усталость металлов: Тр. I сов.-англ. семинара / Под ред. Я. М. Колотыркина.— Киев : Наук. думка, 1982.— 370 с.
11. *Панасюк В. В., Ратыч Л. В., Дмытрах И. Н.* К вопросу определения электрохимического состояния в развивающейся трещине при исследовании трещиностойкости материала в коррозионной среде // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— № 3.— С. 42—49.
12. *Surface* effects in crystal plasticity / Eds. Latanision R. M., Fourie I. P.— Leyden : Noordhoff.— 1977.— 944 p.
13. *Физическая* химия : Современ. пробл. / Под ред. Я. М. Колотыркина.— М. : Химия, 1983.— С. 46—73.
14. *Sieradzki K., Ficalora P. I.* Mechanism of hydrogen embuttlement. Adsorption or decohesion // Scr. met.— 1980.— 14, N 6.— P. 641—644.
15. *Карпенко Г. В., Крипякевич Р. И.* Влияние водорода на свойства стали.— М. : Металлургиздат, 1962.— 198 с.
16. *Smialowski M.* Hydrogen in Steel.— Oxford : Pergamon Press, 1962.— 452 p.
17. *Гельд П. В., Рябов Р. А., Мохрачева Л. П.* Водород и физические свойства металлов и сплавов.— М. : Наука, 1985.— 232 с.
18. *Водород* в металлах / Под. ред. Г. Альфельд, И. Фелькль В 2 т.— М.: Мир, 1981.— Т. 1—2.
19. *Панасюк В. В., Ковчик С. Е., Сморода Г. И.* Методы оценки водородной хрупкости конструкционных материалов // Физ.-хим механика материалов.— 1979.— № 3.— С. 5—17.
20. *Владимиров В. И.* Физическая природа разрушения металлов.— М. : Металлургия, 1984.— 280 с.
21. *Нотт Д. Ф.* Влияние среды на рост трещины при монотонном и циклическом нагружении // Коррозионная усталость металлов / Под ред. Я. М. Колотыркина.— Киев : Наук. думка, 1982.— С. 7—38.
22. *Маричев В. А.* Ветвление трещин при коррозионном растрескивании высокопрочных материалов // Физ.-хим механика материалов.— 1975.— № 2.— С. 14—17.
23. *Романив О. Н., Никифорчин Г. Н., Деев Н. А.* Кинетические эффекты в механике замедленного разрушения высокопрочных сплавов // Там же.— 1976.— № 4.— С. 9—24.
24. *Романив О. Н., Никифорчин Г. Н., Кукляк Н. Л.* К вопросу об адсорбционном снижении трещиностойкости стали при статическом нагружении //Там же.— № 1.— С. 25—31.
25. *Романив О. Н , Никифорчин Г. Н., Петрина Ю. Д.* О влиянии воды и влаги на трещиностойкость конструкционных сталей при кратковременном нагружении // Там же. 1974.— № 1.— С. 16—20.
26. *Cherepanov G. P., Kuliev V. D.* On crack twinning // Int. J. Fract.— 1978.— 14, N 1.— P. 29—38.
27. *Романив О. Н., Никифорчин Г. Н., Студент А. З.* Об условиях инвариатности характеристик коррозионной трещиностойкости // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— № 3.— С. 24—33.
28. *Speidel M. O., Hyatt M. V.* Stress corrosion craking of highstrength aluminium alloys.— New York; London : Plenum Press, 1972.— 115 p.— (Advances in Corrosion Science and Technology; Vol. 2).
29. *Knott I. F.* Fundamentals of Fracture mechanics.— London. Butterworths :.— 1979.— 320 p.

К гл. 8

1. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин.— Киев : Наук. думка, 1982.— 348 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики.— 1984.— 7, № 2.— С. 75—115.
4. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1983.— 277 с.
5. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения— М. : Наука, 1985.— 502 с.

К гл. 9

1. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике.— М. : Мир, 1952.— 378 с.
2. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов.— М. : Мир, 1967.— 391 с.
3. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков.— М. : Наука, 1968.— 329 с.
4. *Глазман И. А.* Пьезокерамика.— М. : Энергия, 1972.— 275 с.
5. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций.— 1975.— Вып. 15.— С. 90—99.
6. *Улитко А. Ф.* О некоторых особенностях постновки граничных задач электроупругости // Современные проблемы механики и авиации.— М. : Машиностроение, 1982.— С. 290—300.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
8. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1974.— 416 с.
9. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2 т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 560 с.
10. *Черепанов Г. П.* Инвариантные J-интегралы и некоторые их приложения в механике // Прикл. математика и механика.— 1977.— 41, № 3.— С. 399—412.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1.— М. : Наука, 1969.— 343 с.
12. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля.— М. : Физматгиз, 1951.— 470 с.
13. *Агрест М. М., Максимов М. З.* Теория неполных цилиндрических функций и их приложения.— М. : Физматгиз, 1965.— 595 с.
14. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1963.— 639 с.
15. *Петч Н.* Металлографические аспекты разрушения // Разрушение / Под ред. Либовица.— М. : Мир, 1973.— Т. 1.— С. 376—420.
16. *Ковалев С. П., Писаренко Г. С.* Экспериментальное исследование остаточных напряжений и вязкости разрушения в сегнетоэлектрической керамике // Проблемы прочности.— 1980.— № 6.— С. 41—43.
17. *Писаренко Г. С., Ковалев С. П., Чушко В. М.* Вязкость разрушения пьезоэлектрической керамики // Там же.— № 12.— С. 29—33.
18. *Pletka B. I., Fuller E. R., Jr., Koepke B. G.* An evaluation of double—torsion—testing—experimental // 11 Nat. Symp. Fract. Mech., Blacksburg, V. A., 12—14 June 1978.— Prepr.— P. 28.
19. *Ковалев С. П.* Исследование разрушения сегнетокерамики при вдавливании индентора//Проблемы прочности.— 1981.— № 8.— С. 81—85.
20. *Чушко В. М.* Докритический рост трещин в сегнетокерамике//Там же.— № 7.— С. 49—53.
21. *Bruce J. G., Gerberich W. W., Koepke B. G.* Subcritical crack growth in PZT // Fract. Mech. Ceramics.— 1978.— 4.— P. 687—709.

22. *Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами // Прикл. математика и механика.— 1979.— **43**, вып. 1.— С. 138—143.
23. *Белокопытова Л. В., Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.* Сопряжённые электрические и механические поля в пьезоупругих телах с разрезами или включениями // Динамика и прочность машин.— 1981.— Вып. 34.— С. 16—21.
24. *Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А.* Напряженное состояние в пьезоэлектрике типа 23, 43, ослабленном криволинейными трещинами // Там же. — 1979.— Вып. 29.— С. 53—57.
25 *Половинкина И. Б., Улитко А. Ф.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами // Тепловые напряжения в элементах конструкций.— 1978.— № 18.— С. 10—17.
26. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикл. механика и метематика.— 1975.— № 1.— С. 149—159.
27. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Осесимметричная трещина на границе с проводником // Там же.— 1975.— № 2.—С. 352—362.
28. *Parton V. Z.* Fracture mecanics for piezoelectric materials // Acta Astronautica.— 1976.— **3**, N 9—10.— P. 671—683.
29. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Механика разрушения при наличии электрических полей // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— № 5. — С. 18—25.

К гл. 10

1. *Suhubi E. S.* Small torsional oscillations of a circular cylinder with finite electric conductivity in a constant axial magnetic field // Int. J. Eng. Sci.— 1965.— **2**, N 5.— P. 441—459.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— Киев : Наук. думка, 1976.— 310 с.
3. *Brown W. E., Jr.* Magnetoelastic interactions.— Berlin etc.: Springer, 1966.— VIII, 155 p.— (Springer tracts in natural philosophy; Vol. 9).
4. *Pao Y.-H., Yeh C.-S.* A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 4.— P. 415—436.
5. *Shindo Y.* Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack in the presence of the magnetic field // Z. angew. Math. und Mech.—1976.— **56**, N 1.— P. 33—41.
6. *Shindo Y.* Diffraction of normal compression waves by a penny-shaped crack in the presence of an axial magnetic field // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 5.— P. 651—658.
7. *Shindo Y.* Diffraction of torsional waves by a penny-shaped crack in the presence of the axial magnetic field // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. techn.— 1978.— **26**, N 4.— P. 325—330.
8. *Sih G. C., Loeber J. E.* Torsional vibrations of elastic solid containing a pehhy-shaped crack // J. Acoust. Soc. Amer.—1968.—**44**.—P. 1237—1245.
9. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1985.— 504 с.
10. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Рубинский Б. Д.* Магнитотермоупругое поле в теле с полубесконечным разрезом // Прикл математика и механика.— 1980.— **44**, № 5.— С. 916—922.
11. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М. : Изд-во иностр лит., 1962.— 279 с.
12. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А., Рубинский Б. Д.* Распространение трещины под действием электромагнитного поля // Докл. АН СССР.— 1980.— **250**, № 5.— С. 1096—1100.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ И ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ

Справочное пособие

Том 1

ПАНАСЮК ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ
АНДРЕЙКИВ АЛЕКСАНДР ЕВГЕНЬЕВИЧ
ПАРТОН ВЛАДИМИР ЗАЛМАНОВИЧ

Основы механики разрушения материалов

Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *А. В. Косяк*
Технические редакторы *А. М. Капустина, И. Н. Лукашенко*
Корректоры *Л. М. Тищенко, Э. Я. Белокопытова*

ИБ № 8156

Сдано в набор 07.01.88. Подп. в печ. 12.09.88. БФ 00130. Формат 84×108/32. Бум тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 25,62. Усл. кр.-отт. 25,62. Уч.-изд. л. 33,67. Тираж 4000 экз Заказ 8 302. Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Наукова думка».
252601 Киев 4, ул Репина, 3.

Киевская книжная типография научной книги,
252004 Киев 4, ул. Репина, 4.